Írta:

PLUHÁR ANDRÁS

JÁTÉKELMÉLET

Egyetemi tananyag

2011

COPYRIGHT: 🅭 2011–2016, Dr. Pluhár András, Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Számítógépes Optimalizálás Tanszék

LEKTORÁLTA: Dr. Pintér Miklós Péter, Corvinus Egyetem Közgazdaságtudományi Kar Matematika Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez" című projekt keretében.

ISBN 978 963 279 519 5

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Gerner József

KULCSSZAVAK:

kombinatorikus játékok, zérusösszegű játékok, Nash-egyensúly, kooperatív játékok, stabil párosítások, döntéshozatal

ÖSSZEFOGLALÁS:

A jegyzet fő célja a játékok különböző formáinak ismertetése és a megértésükhöz használatos matematikai fogalmak és elméletek bemutatása. A kombinatorikus játékokban a fák fogalmának és a teljes indukciónak a használatával eljuthatunk Zermelo tételéig, a végtelen játékok nem determinisztikus voltának bizonyításához mélyebb eszközök szükségesek. Ezek után megmutatjuk, hogy a kombinatorika legfontosabb eszközeinek létezik játékelméleti megfelelője és következésképpen felhasználása is. A zérusösszegű mátrixjátékokra több példát és megoldási módszert adunk, az általános minimax tételt pedig konstruktív úton bizonyítjuk. A nemzérus összegű játékoknál a Nash-egyensúly létezését a Brouwer-féle fixponttétellel, illetve a bimátrixjátékokra adott Lemke–Howson algoritmussal mutatjuk meg. Ismertetjük a Nash-egyensúly klasszikus példáit és továbbfejlesztési lehetőségeit. A kooperatív játékok alapfogalmait tárgyaljuk, a magot, a stabil halmazt és a Shapley-értéket. Az alkalmazások természetes módon magukba foglalják a stabil párosítás problémáját, illetve a Nash-program illusztrációját dolgozzuk ki. Végül a döntéshozatallal kapcsolatos problémákról van szó; ezen belül Arrow tételéről, illetve az igazságos vagy irigységmentes osztozkodások lehetőségeit vizsgáljuk meg.

Tartalomjegyzék

Előszó

A matematika és a játékok elmélete gyakran összekapcsolódik. Emlékezhetünk de Mèrè lovag problémáira, melyeket Fermat és Pascal egyidőben oldott meg, és a feltételes valószínűség illetve a várható érték fogalmát helyesen ragadva meg, hozzájárult a valószínűségszámítás megalapozásához. A játékok azóta is számtalan alkalommal felbukkannak a matematika különböző területein, a halmazelméletben, a kombinatorikában, a bonyolultságelméletben. Játékokat használnak továbbá a közgazdaságtanban, az evolúciós biológiában és sok más helyen, ahol érdekellentétek vizsgálatára van szükség.

Ezen diszciplínák nem használnak egységes nyelvezetet, mások a célkitűzéseik és az eredményeik jellege. Közös bennük, hogy a matematika eszközeivel probálják megragadni a problémákat és ez a törekvés önmagában is mély kapcsolatokat eredményez. A könyv elsődleges célja minél többet megmutatni ezek közül, és így segíteni az Olvasó eligazodását ebben a sokszínű rengetegben.

A tárgyalásban nem időbeli sorrendben haladunk. Először a matematika által inspirált eredményekről lesz szó. Ide tartozik Zermelo klasszikus tétele, a Bouton által vizsgált Nim játék és rokonsága egészen a Grundy-Sprague elméletig. Ez a vonal, az ún. *kombinatorikus játékok* elvezetnek a Conway-féle játék (és szám) fogalomhoz, amely az egész matematikát (aritmetikát) magába foglalja.

Rendkívül sokrétű kapcsolódása van a kombinatorikához a tic-tac-toe általánosításainak, amit összefoglalva *pozíciós játékoknak* nevezhetünk. Ezek vizsgálatánál a Ramsey elmélet, a véletlen módszer, a topológiai eredmények, a gráfok, matroidok, a bonyolultság stb. játszanak jelentős szerepet, melyek aztán felbukkannak egészen másfajta játékokban is.

Ezt követően egy újabb modellt, a *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusössszegű* játékokat, másképpen *mátrixjátékokat* vizsgáljuk meg. Ezek felfoghatók úgy is, hogy az egyik játékos az adott A mátrix egy sorát, a másik pedig egy oszlopát választhatja, és ha ez az i-edik illetve j-edik, akkor az első $a_{i,j}$-t nyer, a második pedig ennyit veszít. Ez modell jól kezelhető és meglepő alkalmazásai vannak.

Egy természetes általánosítása a mátrixjátékoknak, ha egyrészt több játékos van, illetve a nyeremények összege nem nulla. Ebben az esetben nincs olyan megkérdőjelezhetetlen megoldás, mint a korábbiakban. A *Nash-egyensúly* létezése bizonyítható elég általános feltételek mellett. Az egyensúly viszont többnyire nem egyértelmű, sokszor nem stabil és a kiszámítása sem könnyű. Ezen nehézségek ellenére lényeges vonásait megragadják a modellezni kívánt jelenségeknek.

A többszemélyes játékokban felvetődik a *kooperáció* kérdése, matematikai szempontból pedig ennek megfelelő modellezése.

A kezdetek

A játékok szerepe sokféleképpen megközelíthető, más egy evolúció-biológus, egy pszichológus vagy egy közgazdász nézőpontja. Az egyik szerint a játékok a létfontosságú cselekvések biztonságos begyakorlására, rangsorok felállítására valók, míg a másik a kapcsolatok megerősítésének vagy az idő struktúrálásának eszközét látja bennük. Megint mások modellként tekintenek a játékokra, melyekkel megjósolható bonyolult helyzetek kimenetele. A matematika szempontjából is érdekesek a játékok, új gondolatokat sugallhatnak vagy régieket illusztrálhatnak. Itt most ezek némelyikét mutatjuk be.

1. fejezet

Sztochasztikus játékok

Véletlentől függő folyamatokat majd minden civilizáció ismer, amelyeket eredetileg esetleg jóslásra, sorsolásra használtak, később némelyik szórakozássá, sporttá illetve játékká vált. Lenyűgöző, ahogy az asztrológia és alkímia a csillagászat és a kémia megszületéséhez vezet, a valószínűségszámítás és hasznosság elméletek gyökerei a lenézett szerencsejátékokban vannak: de Mèrè lovag szerencsejátékra vonatkozó kérdéseit válaszolta meg Blaise Pascal és Pierre de Fermat és ezzel tisztázták az alapfogalmakat. [1]

1.1. Az osztozkodás paradoxona, 1654

A és B egy, csak a szerencsétől függő, egyenlő esélyű, hat győzelemig tartó játékot játszanak. Tegyük fel, hogy abba kell hagyniuk a játékot amikor A egy, B pedig három nyerésre van a győzelemtől. Mi az egységnyi nyeremény *igazságos* elosztása? Egymástól függetlenül Pascal és Fermat is azt javasolta, hogy A és B a játék folytatásával adódó *várható nyereményt* kapják meg. Mai szóhasználattal, ha X_A az A játékos véletlentől függő nyereménye (0 vagy 1 értékű), akkor $\mathbb{E}X_A$ legyen a kifizetése. $\mathbb{E}X_A = \Pr(\text{A nyer}) = 7/8$. Valóban, a játék legfeljebb három forduló után véget érne, az egyenlő esélyű elemi események (a fordulónkénti nyerővel): AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, és BBB. Ezekből hét az A nyeréséhez vezet, azaz $\Pr(\text{A nyer}) = 7/8$. Az is látható, hogy $EX_B = 1/7$. Általában, ha A-nak a, B-nek pedig b játszmát kellene nyerni a győzelemhez, akkor az $m = a+b-1$ hosszú AB sorozatok közül azokat kell vennünk, ahol legalább a db A van, azaz $\Pr(\text{A nyer}) = 2^{-m}\sum_{i=a}^{m}\binom{m}{i}$.

Megjegyzés. Vannak másfajta igazság fogalmak is, melyek adott környezetben szintén meghonosodhatnak és fennmaradhatnak. Feloszthatnák a nyereményt a megnyert játszmák száma, egyfajta teljesítményelv szerint 5 : 3 arányban. Mondhatnánk, hogy mivel nincs döntés, legyen az arány 1 : 1. Vagy azt, hogy egyik fél sem nyert, ne kapjanak semmit. Általánosságban Daniel Bernoulli nevéhez fűzhető az ún. *Bernoulli-elv*, amely szerint az optimalizálási feladatokban helyettesítsük a valószínűségi változókat a várható értékükkel. Ez a megközelítés nagyon elterjedt a játékelméletben is, viszont megvannak a korlátai.

[1] A feladat maga alighanem arab eredetű, nyomtatásban Fra Luca Paccioli jelentette meg, és foglalkozott vele Niccolo Tartaglia is, lásd [13].

1.2. A szentpétervári paradoxon

Péter és Pál a következő játékot játsza: egy érmét (dukátot) addig dobálnak, amíg fej jön ki. Ha ez az i-edik lépésben következik be, akkor Péter fizet Pálnak 2^i dukátot. Kérdés, mennyi pénzt ér Pálnak a játék, illetve mennyit kérjen Péter Páltól a játék jogáért? A várható nyeremény $\sum_{i=1}^{\infty} 2^i 2^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$, tehát elvileg a játék *végtelen sokat* ér. Ugyanakkor senki sem hajlandó tíz dukátnál többet fizetni érte, ami a Bernoulli-elv alapján nem magyarázható meg. Ez megrázta az akkori matematikai közéletet, hisz, mint említettük, a várható érték fogalma rendkívül fontos volt a világképükben.

Bernoulli ugyanakkor adott egy lehetséges magyarázatot, amely a modern közgazdaságtan megalapozásában vált fontossá. Nem a pénz nominális értékét kell tekinteni, hanem a *hasznosságát*. Tehát míg a nyeremény $x \in X$ valamely X halmazra, a hasznosság vagy *utilitás* az $u(x)$ lesz, ahol $u : X \to \mathbb{R}$ függvény. Jelen esetben olyan hasznosságot érdemes definiálni, amely függ Pál vagyonától. Ha a játék kezdetén Pálnak d dukátja van, akkor az x dukát nyeremény utilitása $u(x,d,c) = c\log(1 + x/d)$, valamely $c > 0$ konstansra.[2]

Megjegyzés. Nem hallgathatjuk el, hogy a véletlentől függő események játékokat használó megközelítése elhitetheti, hogy mindig járható ez az út. Valójában az eseménytér meghatározása többnyire lehetetlen. Ez az ún. *ludic fallacy*, a részletes elemzése megtalálható Nassim Taleb könyvében [14].

[2] Pál számára ezzel véges várható értékűvé válik a fenti játék. A logaritmus függvény megelőlegezi a *csökkenő határhaszon* jelenséget, a valós értékek a *korlátlan oszthatóságot*, a végtelenbe tartásnak pedig csak az *átruházhatóság* mellett van csak értelme.

2. fejezet

Determinisztikus játékok

2.1. Sakk

A determinisztikus játékok közül a sakknak volt talán a legerősebb hatása a matematikára, Ernst Zermelo híres eredményét is ez motiválta.

Korábban felmerült, hogy létezhet valami formula, amelyet követve a játékos nyer. Ma már megmosolyogtató, hogy nem tették fel a kérdést, mi van, ha *mindkét* fél e szerint a formula szerint játszik?

Mielőtt ebben elmélyednénk, lássunk egy problémát, amelyet W. Langstaff közölt a *Chess Amateur* c. lapban 1922-ben.

Világos: Kf5, Bd5, gy. h6 és h5, Sötét: Ke8, Bh8, gy. g5.

Kis gondolkodás után rájöhetünk, hogy világos két lépésben mattol. Ha sötét már lépett a királyával vagy a bástyájával, akkor az 1. Kf5-e6 után nem védheti a 2. Bd5-d8 mattot. Ha sem a király, sem a bástya nem mozdult még a játszma során, akkor sötét utolsó lépése csakis a 0. -, g7-g5 lehetett, hiszen a g6-on álló gyalog támadta volna világos királyt. Ekkor viszont világos lépheti az 1. h5×g6 menet közbeni ütést, majd ha sötét sáncol, akkor 2. h6-h7 matt, különben pedig az előbb látott 2. Bd5-d8 matt.

A feladvány két szempontból is tanulságos. Láttuk, hogy *van* matt két lépésben, de nem tudjuk, *hogyan*. Azaz a matematikában oly gyakori egzisztencia bizonyítás történt. A másik tanulság, hogy ki kell bővítenünk az *állás* fogalmát; az nem pusztán a táblán lévő bábok elhelyezkedése adja meg, hanem számít a játék addigi menete is.

2.2. Kombinatorikus játékok

A sakk kézenfekvő általánosítása az alábbi lehet, lásd [1]:

- Két játékos van, *I* (fehér) és *II* (fekete), *I* kezd.
- Véges sok állás van, és adott egy kezdő állás.
- Minden állásban eldönthetők a játékosok lehetséges lépései.
- A játékosok felváltva lépnek.

- Minden szabályos sorozata a lépéseknek véges.
- Szabályos lépések egy teljes (kezdőállástól végállásig) sorozata egy játszma.
- A kimenetel minden végállásban meghatározott, az egyik játékos nyer, vagy döntetlen.
- Mindkét játékos rendelkezik az összes információval; ismeri a szabályokat és a lehetőségeit, emlékszik a megtett lépésekre, látja saját és az ellenfele lépéseit stb.
- Nincsennek a véletlentől függő lépések, szabályok.

Ezek a feltételek nyilvánvalóan ekvivalensek egy absztrakt Γ játékkal, $\Gamma = (T, F)$, ahol T egy irányított gyökeres fa[1], míg F a T levelein értelmezett függvény mely az I, II vagy D értékeket veheti fel. Az r gyökérpont nulla befokú, minden más pont befoka egy, és minden irányított út véges T-ben. A játék menete a következő: a játékosok egy érmét tologatnak a T fa irányított élei mentén. I kezd r-ben és egy tetszőleges szomszédjára lép, majd ezek után felváltva lépnek. Egy q végállást elérve I (II) nyer, ha $F(q) = I$ (II), illetve döntetlen, ha $F(q) = D$. Az I (II) játékos *stratégiája* alatt egy olyan, parciális, s függvényt értünk, amely T minden olyan x belső pontjához, ahol I (II) lép, egy olyan y pontot rendel, melybe vezet el x-ből. Egy s stratégia nyerő (döntetlen) valamely játékosnak, ha azt követve az ellenfél bármely játéka esetén nyer (döntetlent ér el). Egy s stratégia azonosítható a T fa egy T_s részfájával: minden x pontból induló élt törlünk az $(x, s(x))$ kivételével.

Ezekkel a fogalmakkal kimondhatjuk Zermelo tételét, ahogy Beck József könyvében szerepel [1]:

1. Tétel (Zermelo-Neumann)**.** *Egy kombinatorikus játékban vagy az egyik félnek van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van döntetlen stratégiája.*[2]

Bizonyítás: Először T pontjainak a *paritását* tisztázzuk. Mivel T fa, minden x pontjába pontosan egy út vezet az r gyökérből. Az x pont $p(x)$ paritása ezen út éleinek a paritása. (Ha egy x páros pont, akkor I lép, míg ha páratlan, akkor II.)

Ezek után az ún. *visszafele cimkézést* definiáljuk T pontjain. Egy $q \in V(T)$ végpont címkéje $c(q) := F(q)$, azaz a játék kimenetele. Egy x pontra definiálható a címke, ha a címke már adott az összes olyan y pontra, amelyre $(x, y) \in E(T)$. Ekkor ha $p(x) = 0$,

$$c(x) := \begin{cases} I, & \text{ha van olyan } y \text{, hogy } (x,y) \in E(T) \text{ és } c(y) = I \\ II, & \text{ha minden } y,\ (x,y) \in E(T) \text{ esetén } c(y) = II \\ D & \text{különben.} \end{cases}$$

Páratlan paritású x-re hasonlóan

$$c(x) := \begin{cases} I, & \text{ha minden } y,\ (x,y) \in E(T) \text{ esetén } c(y) = I \\ II, & \text{ha van olyan } y,\ (x,y) \in E(T) \text{ és } c(y) = II \\ D & \text{különben.} \end{cases}$$

[1] T-t az adott kombinatorikus játék fájának szokták hívni.

[2] Ez a véges játékokra vonatkozó *tercium non datur,* azaz nincs harmadik lehetőség, csakúgy, mint a kétértékű logikában. Sokkal meglepőbb, amint azt látni fogjuk, hogy végtelen játékok esetén ez nincs így; a nyerés kérdése lehet eldönthetetlen, holott minden végállásra nyer valamelyik fél.

Így minden pontnak lesz címkéje, hisz egy x_1 pont akkor nem kapott címkét, ha van olyan x_2, $(x_1,x_2) \in E(T)$, hogy x_2-re sem definiált a címke. Ekkor viszont lennie kell egy olyan $x_3, x_4, \ldots$ sorozatnak, amelyre szintén nem definiált a címke, és minden $i \in \mathbb{N}$-re $(x_i, x_{i+1}) \in E(T)$, ami ellentmond annak, hogy T-ben nincs végtelen út.

Ha $c(r) = I$, akkor I nyer, a stratégiája pedig az lehet, hogy minden páros x-re egy olyan $s(x) := y$-et választ, amelyre $(x,y) \in E(T)$ és $c(y) = I)$. Hasonlóan járhat el, és nyer II, ha $c(r) = II$. Végül $c(r) = D$ esetén mindkét játékosnak van döntetlen stratégiája, most a D-vel cimkézett pontokat követve. □

Megjegyzések. Vegyük észre, hogy igazából egy konstruktív bizonyítást (algoritmust) adtunk, amellyel a fa méretével lineáris időben eldönthető bármely állás kimenetele.

Az algoritmus, a visszafele cimkézés, másfajta játékok vizsgálában is nagyon lényeges, később még használjuk.

A 1. tétel valamivel általánosabban is kimondható, és valójában Zermelo sem pontosan ilyen formában tette ezt. Mi több, az általa adott bizonyítás nem volt hibátlan, azt később Kőnig Dénes, Kalmár László és Neumann János is javította, illetve erősítette, lásd [5].

2.3. A Nim

A Nimet 1902-ben alkotta meg Charles Bouton, bár korábban is létezett hasonló kínai játék.

Táblaként néhány kupac kavics szolgálhat. A lépésen levő játékosnak választania kell egy kupacot, és elvenni belőle tetszőleges számú, de legalább egy kavicsot. Az a játékos győz, aki az utolsó kavicsot elveszi. A kavicsok számának végessége miatt a játék nem lehet döntetlen, így ha az egyik játékos képes elkerülni a vesztést, akkor nyerni fog. Tegyük fel, hogy lehet definiálni a Nim játék egy pillanatnyi állásának egy T tulajdonságát a következő módon:

(i) Ha minden kupac üres, akkor teljesül T.

(ii) Ha nem teljesül T, akkor lehet olyan lépést tenni, hogy a létrejövő állásban teljesül T.

(iii) Ha egy állásban teljesül T, akkor bármely lépést téve a keletkező állásban már nem fog teljesülni.

Ha a játék kezdetén nem teljesül T, akkor I, (ii) alapján olyan lépést választ, hogy teljesüljön T. Így, (iii) miatt, II bármely válasza után (ha II tudott még lépni egyáltalán) olyan állást kap I, melyre T ismét nem teljesül. Következésképp I-nek lesz szabályos lépése, amely után újra áll a T tulajdonság. Előbb-utóbb persze elfogynak a kövek, a T tulajdonság teljesül és a lépésen levő játékos veszít. Ez viszont csak II lehet az eddigiek alapján. Ha a játék kezdetén teljesül T, akkor, hasonló érveléssel beláthatóan, II nyer. Már csak az maradt hátra, hogy találjunk az i, ii és iii pontoknak eleget tevő T tulajdonságot.

Írjuk fel minden kupacra a benne lévő kavicsok számát kettes számrendszerben, s nézzük meg ezekben a számokban az egy adott helyiértéken előforduló egyesek számát. Ha ezek a számok minden helyiértékre párosak, akkor teljesül T, ha nem, akkor nem.

(i) Ha üresek a kupacok, akkor minden szám 0, következésképp minden helyiértéken is összesen 0 db 1-es áll.

(ii) Ha nem áll T, vegyük a legnagyobb helyiértéket, amelyre páratlan egyes fordul elő. Válasszunk egy K kupacot, ahol a hozzátartozó számban egyes áll ezen a helyiértéken. Vegyük el a K kupacnak annyi elemét, hogy a kupacot jellemző új számban pontosan azok a helyiértékek változzanak (nulláról egyre vagy egyről nullára), amely helyiértékekre az egyesek száma páratlan volt. Így egy T tulajdonságú álláshoz jutunk.

(iii) Egy lépés az érintett K kupachoz tartozó számot megváltoztatja legalább egy jegyben. Ezért ha T teljesült, a lépés után már nem fog.

Megjegyzések. Bouton eredeti megfogalmazásában nyolc kupac van, $1,\dots,8$ kaviccsal. Bouton utalt rá, hogy a Nim *misère* változatának[3], azaz, amelyben az utolsó lépést tevő játékos veszít, ugyanez a nyerési feltétele. Kövessük a normál Nim nyerő stratégiáját egészen addig, míg egy kivételével minden kupac egy méretű. Ekkor az egyetlen nem egy méretű kupacból vegyünk el; ha a kupacok száma páros, akkor az összes elemét, ha páratlan, akkor hagyjunk meg egyet.

[3] Majd minden játéknál vizsgálható ez az „az veszít, aki nyer" változat. Általában ez még nehezebb, mint az eredeti játék. Conway [4] a használta a misère jelzőt, magyarul a fordított, [10] vagy betli [5] a kézenfekő elnevezés.

Klasszikus matematikai játékok

3. fejezet

Meghatározatlan játékok

Zermelo tétele szerint egy véges lépésből álló játékban eldönthető a kimenetel. A végtelen játékokban nem ez a helyzet, erre az első példát 1928-ban adta Stefan Banach és Stanisław Mazur. Legyen $A \subset [0,1]$ tetszőleges, és $B := [0,1] \setminus A$. Az A-val illetve B-vel jelölt játékosok felváltva választanak valódi, zárt intervallumokat úgy, hogy $[0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, $i \in \mathbb{N}$. A nyer, ha $\cap_{i=1}^{\infty} I_i \cap A \neq \emptyset$, B nyer különben. Ez a Banach-Mazur, vagy (A,B)-játék. Legyen továbbá $\overline{S} := \mathbb{R} \setminus S$

Megmutatható, hogy

(1) A B játékosnak van nyerő stratégiája az (A,B)-játékban akkor és csak akkor, ha az A halmaz Baire első kategóriájú[1].

(2) Az A játékosnak van nyerő stratégiája az (A,B)-játékban akkor és csak akkor, ha az $B \cap I_1$ halmaz Baire első kategóriájú.

(3) Létezik olyan S halmaz, hogy $S \cap C$ és $\overline{S} \cap C$ sem üres, ha C tetszőleges nem megszámlálható halmaz.[2]

A fentiek szerint, ha $A := [0,1] \cap S$, akkor egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája. Később egyszerűbb példákat is adtak, ilyen például a Gale-Stewart játék (1953) illetve az Ultrafilter játék, melyet McKenzie és Paris írt le 1972-ben.

3.1. A Gale-Stewart játék

A Gale-Stewart játék lényegében egy olyan $\Gamma = (T,F)$ játék, amelyben T egy végtelen bináris fa. Másképpen I és II felváltva adják meg egy végtelen $\{0,1\}$ sorozat elemeit, és ha az eredmény egy adott $A \subset \{0,1\}^{\omega}$-beli sorozat, akkor I nyer, különben pedig II nyer. Az egyszerűség kedvéért I-et A, II-t B játékosnak nevezzük, illetve a $\{0,1\}^{\omega} \setminus A$ halmazt B halmaznak.

2. Tétel. *Van olyan $A \subset \{0,1\}^{\omega}$ halmaz, hogy a hozzátartozó Gale-Stewart játékban egyik játékosnak sincs nyerő stratégiája.*

[1] Egy halmaz Baire első kategóriájú, ha előáll megszámlálható sok seholsem sűrű halmaz uniójaként.

[2] Az ilyen tulajdonságú halmaz az ún. *Bernstein halmaz.*

Bizonyítás: Először definiáljuk az A és B játékosok lehetséges stratégiáit. Az A játékos egy F stratégiája megmondja, hogy az eddigi választásokra mi legyen A következő lépése, azaz az $(a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}) \in \{0,1\}^{2n+1}$-re ad egy $a_{2n+2} \in \{0,1\}$ értéket. Tehát F azonosítható egy $f_1, f_2, \dots$ függvénysorozattal, ahol $f_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}$. Hasonlóan értjük a B játékos lehetséges stratégiáit, míg ezek halmazait STR_A-val illetve STR_B-vel jelöljük. Ha adott $F \in \mathrm{STR}_A$ és $G \in \mathrm{STR}_B$, akkor $\langle F, G\rangle$ az az egyértelmű végtelen sorozat, amely az F és G stratégiák összecsapásával létrejön. Legyen továbbá $\mathcal{P}_F := \{\langle F, G\rangle : G \in \mathrm{STR}_B\}$, és $\mathcal{P}_G := \{\langle F, G\rangle : F \in \mathrm{STR}_A\}$. Belátjuk az alábbiakat:

(i) STR_A és STR_B számossága egyaránt $2^{\aleph_0}$.

(ii) Minden $F \in \mathrm{STR}_A$ és $G \in \mathrm{STR}_B$ esetén $\mathcal{P}_F$ és $\mathcal{P}_G$ számossága egyaránt $2^{\aleph_0}$.

Valóban, az $f_i : \{0,1\}^i \to \{0,1\}$ függvények halmaza minden $i \in \mathbb{N}$-re véges és legalább kételemű, ezért $|\mathrm{STR}_A| = 2^{\aleph_0}$, $|\mathrm{STR}_B| = 2^{\aleph_0}$ analóg módon.

Ha $F \in \mathrm{STR}_A$ és $b = (b_1, b_2, \dots) \in \{0,1\}^\omega$, akkor van olyan $G_b \in \mathrm{STR}_B$, melyre a $\langle F, G\rangle$ játszma $2i$-edik eleme éppen b_i. Így $|\mathcal{P}_F| \geq 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{P}_F| \leq 2^{\aleph_0}$, hisz $\mathcal{P}_F \times \mathcal{P}_G \subset \mathrm{STR_A} \times \mathrm{STR_B}$.

Az A és B halmazok konstrukciójához traszfinit indukcióval olyan sorozatokat, *tanúkat*, keresünk, melyek vesztővé tesznek egy-egy stratégiát. Megmutatjuk az alábbiakat.

(1) Minden $F \in \mathrm{STR_A}$ esetén létezik $t_F \in \mathcal{P}_F \cap B$.

(2) Minden $G \in \mathrm{STR_B}$ esetén létezik $s_G \in \mathcal{P}_G \cap A$.

(3) A különböző stratégiákhoz különböző tanúk tartoznak.

Ehhez szükségünk lesz a rendszámok jólrendezésére, ami a ZF axióma rendszeren belül a kiválasztási axiómával ekvivalens. Amennyiben ezt elfogadjuk, a játékosaink stratégiái indexelhetők azon α rendszámokkal, melyekre $\alpha < 2^{\aleph_0}$, azaz $\mathrm{STR}_A = \{F_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ és $\mathrm{STR}_B = \{G_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$.

Legyen $t_0 \in \mathcal{P}_{F_0}$ és $s_0 \in \mathcal{P}_{G_0}$ tetszőlegesen, de $t_0 \neq s_0$. Ha $0 < \alpha < 2^{\aleph_0}$ és t_β, s_β definiált minden $\beta < \alpha$ rendszámra, akkor

$$\left|\mathcal{P}_{F_\alpha} \setminus (\{s_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\})\right| = 2^{\aleph_0}$$

és

$$\left|\mathcal{P}_{G_\alpha} \setminus (\{s_\beta : \beta < \alpha\} \cup \{t_\beta : \beta < \alpha\})\right| = 2^{\aleph_0},$$

hisz $2^{\aleph_0}$ számosságú halmazokból náluk kisebb számosságú halmazokat vontunk ki. Így választhatunk belőlük egy t_α illetve s_α elemet úgy, hogy $t_\alpha \neq s_\alpha$.

Legyen végül $S = \{s_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ és $T = \{t_\alpha : \alpha < 2^{\aleph_0}\}$, A egy tetszőleges kiterjesztése S halmaznak úgy, hogy $A \cap T = \emptyset$ míg $B := \{0,1\}^\omega \setminus A$.

Ekkor egyik félnek sincs nyerő stratégiája, hisz az A játékos F_α stratégiája veszít valamely G_β ellen, hisz $t_\alpha \in \mathcal{P}_{F_\alpha} \cap B$, míg a B játékos G_α stratégiája is veszít A valamely stratégiája ellen, hisz $s_\alpha \in \mathcal{P}_{G_\alpha} \cap A$. □

4. fejezet

Conway-elmélet

Conway összeolvasztotta Dedekind, Cantor és Neumann konstrukcióit, melyekből általános játék és számfogalmat hozott létre. A felépítés rekurzív, ha L és R játékok halmazai, akkor az $\{L|R\}$ is egy játék. Az x^R (x^L) az R (L) halmaz általános elemét jelenti, Jobb és Bal a két játékos. Egy lépés abból áll, hogy Jobb (Bal) egy x^R (x^L) egy elemet választ, ezen folyik a játék tovább és aki nem tud lépni, veszít.

Definiálhatunk egy parciális rendezést a játékokon, $x \geq y$, ha $x^R \leq y$ és $x \leq y^L$ egyike sem teljesül bármely x^R, x^L esetén. Egy $x = \{L|R\}$ *szám*, ha minden x^R, x^L is szám és nem teljesül egyikre sem a $x^R \leq x^L$.

Az első játék és egyben szám a $\{|\}$, azaz $L = R = \emptyset$. Az x és y *azonos*, $x \equiv y$, ha a halmazaik megegyeznek, *egyenlő*, $x = y$, ha $x \leq y$ és $y \leq x$. Játékok összegét, szorzatát úgy definiáljuk, hogy a számokra megfeleljen a Dedekind szeletnél használt intuíciónak: ha $x = \{L|R\}$, akkor $x \not\leq x^L$ és $x^R \not\leq x$. A x és y játékok $x+y$ összegére szemléletesen úgy is tekinthetünk, hogy a lépésen levő fél eldöntheti, melyikből választ. Azaz $x+y := \{x^L+y, x+y^L|x^R+y, x+y^R\}$, $-x := \{-x^R|-x^L\}$ és $xy := \{x^Ly+xy^L-x^Ly^L, x^Ry+xy^R-x^Ry^R|x^Ly+xy^R-x^Ly^R, x^Ry+xy^L-x^Ry^L\}$.

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy a játékok testet, a számok rendezett testet alkotnak, ahol $0 := \{|\}$. Az $1 := \{0|\}$ és $-1 := \{|0\}$ szintén szám, míg a $\{0|0\}$ nem az és nem is hasonlítható össze velük. Az azonosság és az egyenlőség emiatt különbözik és amíg egy $x = \{L|R\}$ számot egyértelműen meghatároz L legnagyobb és R legkisebb eleme, előfordul, hogy $x = y$ de $xz \neq yz$, ha x, y, z nem számok.

Néhány példa számokra: $2 := \{1|\} = \{-1,1|\} = \{0,1|\} = \{-1,0,1|\}$, $-2 := \{|-1\} = \{|-1,0\} = \{|-1,1\} = \{|-1,0,1\}$, $1/2 := \{0|1\} = \{-1,0|1\}$, $-1/2 := \{-1|0\} = \{-1|0,1\}$.

Folytatva ω lépésen át (és tovább) megkapjuk a játékokat és a számokat; utóbbiakba beágyazható a valós számtest. De megtalálhatjuk itt Leibniz infinitezimálisait, például $1/\omega = \{0|1, 1/2, /1/4, \dots\}$ vagy a rákövetkező rendszámokat $\omega+1 = \{0,1,2,\dots,\omega|\}$ és, ami eddig nem volt, *megelőzőt* is $\omega-1 = \{0,1,2,\dots|\omega\}$. Indukcióval kaphatók olyan egzotikus számok, mint az $\omega-n = \{0,1,2,\dots|\omega, \omega-1, \dots, \omega-(n-1)\}$, $\omega/3$ vagy $\sqrt{\omega} = \{0,1,2,\dots|\omega, \omega/2, \omega/4, \dots\}$.

Egy-egy bonyolultabb szám vagy játék meghatározásánál nagyon hasznos az ún. *egyszerűségi* tétel:

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $x = \{L|R\}$ játékra van olyan z szám, hogy $x^L \ngeq z \ngeq x^R$ minden x^L, x^R-re, de z részei, már nem teljesítik ezt.*[1] *Ekkor $x = z$.*

Bizonyítás: Az $x \geq z$, kivéve, ha $x^R \leq z$ vagy $x \leq z^L$. A tétel feltétele egyből kizárja az $x^R \leq z$ lehetőséget, míg az $x \leq z^L \Rightarrow x^L \ngeq x \leq z^L < z \ngeq x^L$ minden x^R, x^L-re, amiből $x^L \ngeq z^L \ngeq x^R$, ami a minimalitásnak mond ellent. Azaz $x \geq z$ és hasonlóan belátható $z \geq x$, amiből $x = z$. □

A 3. tétel segítségével megmutatható, hogy a $\{|\}$-ból indulva véges lépésben pontosan a *diadikus racionális* számokat, azaz a $m/2^n$, $m, n \in Z$ kaphatjuk meg. Legyen egy x *valós*, ha $x = \{x - (1/n)|x + (1/n)\}_{n>0}$. A valósok zárt testet képeznek a számaink között és azonosíthatók a szokásos valós számokkal.

[1] Azaz vagy $z^R \leq x^L$, vagy $z^L \geq x^R$ valamely választásra.

5. fejezet

Pozíciós játékok

A *pozíciós játék* pontos definíciója nem adható meg, mindenféle játékot beleérthetünk, ahol a nyerés feltétele valamely alakzat eléréséhez/elkerüléséhez kapcsolódik. Első közelítésben *pozíciós játék*, vagy *hipergráf játék* alatt a következőt értjük. Adott egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf, azaz $\mathcal{H} \subset 2^V$. A V halmaz elemei alkotják a *táblát*, míg az $\mathcal{H}$ elemei az ún. *nyerő* halmazok. Két játékos, a kezdő és a második, vagy I és II, felváltva választja a tábla elemeit. Amelyikük elsőként megszerezi egy nyerő halmaz összes elemét az megnyeri a játékot.

Ha a tábla véges, akkor a 1. tétel miatt a játék kimenetele eldönthető.

Példa 1. Tic-Tac-Toe. I és II felváltva tesz egy jelet a 9 négyzetből álló, 3×3-as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer.

Példa 2. Tic-Toc-Tac-Toe. Ez a Tic-Tac-Toe 3-dimenziós változata, aminek a táblája $4 \times 4 \times 4$-es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, lap és test főátlók, összesen 76 darab.

Példa 3. Amőba (5-in-a-row). Itt a tábla a végtelen négyzetrács (a gyakorlatban lehet a 19×19-es go tábla vagy füzetlap). A játékosok felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

Példa 4. k-amőba (k-in-a-row). A fentihez hasonló, csak ebben k egymást követő jel kell a nyeréshez.

A gyakorlatból tudjuk, a kezdőjátékos (itt I) előnyös helyzetben van a fentiekben. Ezt matematikai eszközökkel is belátható, sőt sokkal általánosabban igaz:

4. Tétel (Hales-Jewett)**.** *Bármely $(V, \mathcal{H})$ hipergráf játékban a kezdő nyer, vagy döntetlen az eredmény.*[1]

Bizonyítás: Ez az ún. *stratégia lopás* módszerrel[2] kapható meg. Általános pozíciós játékokra Alfred Hales és Robert Jewett mondta ki. Ha II nyerne, azaz lenne *nyerő stratégiája*, akkor I is használhatná ezt, hiszen a saját, korábbi lépései sohasem ártanak. Vagyis I megfeledkezhet az első lépéséről, és ha a stratégia ezt kérné, akkor úgy tehet, mintha éppen most lépné meg ezt, és az esedékes lépését tetszőlegesen helyezheti el. □

Az 1. és 4. tételek sokszor megmondják, *mi* lesz az eredmény, de arról keveset árulnak el, *hogyan* játszunk. Ez már a példáinkban sem egyszerű, általában még kevésbé várható. A tic-

[1] Ha egyik fél sem nyer véges lépésben, akkor döntetlennek tekintjük a játékot.

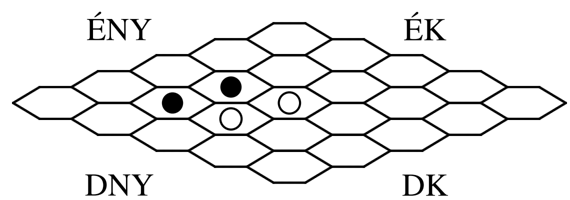
[2] A módszert először John Nash alkalmazta a hex játék vizsgálatára, lásd [2].

tac-toe könnyen láthatóan döntetlen, míg a tic-toc-tac-toe-t I nyeri. Az utóbbi igazolásához viszont 1500 óra gépidőt használt fel Oren Patashnik a hetvenes évek végén, és megjegyezhető nyerő stratégiát eddig nem találtak rá, lásd [2]. Az amőbát (legalábbis a go táblán) a kezdő nyeri, a k-amőba pedig döntetlen, ha $k \geq 8$. A $k = 6,7$ esetén viszont nem tudjuk, mi az a játék végeredménye, lásd [2].

Általában sincs ez másképpen, sok kérdésre van jó válaszunk, még többre viszont nincs. A pozíciós játékoknak számtalan meglepő kapcsolata van a matematika egymástól távoleső területeivel; ezért is olyan nehezek és egyben vonzók a problémái. Ezekre láthatunk újabb példákat a továbbiakban.

5.1. Topológikus játékok

Kezdjük a hex játékkal; ezt Piet Hein 1942-ben, és John Nash 1948-ban találta ki egymásról nem tudva. Egy hatszögekből álló, rombusz alakú $n \times n$-es táblára felváltva helyezhet I fehér és II fekete korongokat. I célja egy összefüggő fehér út létrehozása az északnyugati és délkeleti, II-é pedig egy fekete úté az északkeleti és délnyugati oldalak között. A hex - ellentétben jónéhány csak matematikai szempontból érdekes játékkal - izgalmas, addiktív játék. Feladványokat közölnek, versenyeket rendeznek belőle; ilyenkor az $n = 10$ vagy $n = 11$ a tábla méret. (A legjobb eredményt Kohei Noshita érte el, $n \leq 8$-ra ismert a nyerő stratégia.)



Az 5×5-ös hex tábla.

Az első definíciónk értelmében a hex *nem* hipergráf játék, hiszen a nyerő halmazok *nem egyformák* a két játékosra. Kézenfekvő a $(V, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ *asszimetrikus* hipergráf játékot bevezetni, ahol értelemszerűen az I illetve II akkor nyer, ha a $\mathcal{H}_1$ illetve a $\mathcal{H}_2$ egy elemét hamarabb elfoglalja, ahol $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \subset 2^V$.

Nyilvánvalónak tűnik, hogy csak az egyik játékos nyerhet a hexben. Ez így is van, de ekvivalens a szintén egyszerűnek tűnő *Jordan-féle görbetétellel* [3]. Szintén előkelő rokonsága van a topológiában az alábbi, ún. *hex tételnek*:

5. Tétel (Nash-Gale)**.** *Ha a hex tábla összes mezőjét kiszínezzük fehérrel vagy feketével, akkor vagy lesz fehér északnyugati-délkeleti, vagy fekete északkelet-délnyugati út.*

Azaz döntetlen még akkor sem lehetséges, ha a két játékos erre törekedne. Kombinálva ezt az eredményt a 4. tétel ötletével (és felhasználva, hogy a $\mathcal{H}_1$ képe egy megfelelő tengelyes tükrözésnél éppen a $\mathcal{H}_2$) kapjuk, hogy:

[3] Egy egyszerű, zárt görbe a síkot két - egy külső és egy belső - összefüggő részre osztja.

6. Tétel (John Nash, 1949)**.** *A kezdő játékos nyer a hexben.*[4]

Adott egy f függvény a C halmazon, azaz $f: C \to C$, akkor az $z \in C$ pont *fixpont*, ha $f(z) = z$.

7. Tétel. *(Brouwer-fixponttétel) Legyen $C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt és konvex halmaz, továbbá $f: C \to C$ folytonos függvény. Ekkor f-nek van fixpontja.*

1979-ben igazolta David Gale, hogy a hex tétel és a *Brouwer-fixponttétel* ekvivalensek. Vele egyidőben, tőle függetlenül Lovász László az ún. *Sperner-lemmából* vezette le a hex tételt klasszikus könyvében, [7]. Ehhez hasonló módon bizonyították Hochberg és társai, hogy a Sperner lemmából következik az ún. *konnektor tétel*. Később Chris Hartman foglalta össze egy nagyon gazdaságos ciklikus bizonyításban a következő eredményeket. Az egyszerűség kedvéért a 2-dimenziós eseteket mondjuk ki, az n-dimenziós eset nagyon hasonló.

Legyen T az ABC háromszög egy háromszögezése, melynek a pontjai *jól színezettek*, ha (i) Az A, B és C pontok színei rendre 1, 2 és 3. (ii) Az ABC háromszög oldalain fekvő pontok az oldal egyik végpontjának a színét kapják.

Sperner-lemma: T-ben van olyan háromszög, amelynek csúcsai három különböző színt kaptak.

Legyen G egy, a külső oldalát kivéve, háromszög lapokból álló síkgráf. Rögzítsük a külső oldalon az x, y, z pontokat ebben a körüljárási irányban. Az $[x, y]$ *intervallum* az x-et, y-t és a köztük lévő pontokat jelenti. (Az $[y, z]$ és $[z, x]$ analóg módon.) G pontjainak egy C részhalmaza *konnektor*, ha a C által feszített részgráf összefüggő, és tartalmaz pontot az $[x, y]$, $[y, z]$ és $[z, x]$ intervallumok mindegyikéből.

Konnektor tétel: Ha két színnel színezzünk a fenti módon definiált G pontjait, akkor abban lesz egy C egyszínű konnektor.[5]

Legyen $e_1 = (1, 0)$ és $e_2 = (0, 1)$ a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok, és az $a, b \in \mathbb{Z}^2$, melyre $a_i \leq b_i$ $i = 1, 2$-re. A $D(a, b)$ *doboz* a rácspontok halmaza: $D(a, b) := \{(x_1, x_2) : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ és } x_i \text{ egész } i = 1, 2\}$. D két pontja *szomszédos*, ha mindkét koordinátájuk legfeljebb egy egységgel tér el.

Pouzet-lemma: Ha egy $f: D(a, b) \to \{\pm e_1, \pm e_2\}$ függvényre minden $x \in D(a, b)$-re teljesül az $x + f(x) \in D$, akkor vannak olyan szomszédos x és y pontok, hogy $f(x) = -f(y)$.

A teljesség kedvéért jegyezzük meg, hogy a hex tábla felfogható, mint az előbbi D. Ebben $x, y \in D$ akkor szomszédosak, ha $x - y$ vagy $y - x$ eleme $\{0, 1\}^2$-nak, és az egyik játékosnak a D doboz alsó és felső, a másiknak a jobb és bal oldalát kell összekötni. Hasonlóan történhet d-dimenziós hex tábla megadása is.

[4] A tétel a pozíciós játékok talán legismertebb eredménye. Ugyanakkor egy tisztán egzisztencia bizonyítás, amelyben a létezésén kívül semmit sem tudunk meg a nyerő stratégiáról. Nagyon nehéz, ún. PSPACE-teljes probléma megmondani, hogy *melyik* fél nyer, ha adott az $n \times n$-es hex tábla egy részleges kitöltése.

[5] Craige Schensted és Charles Titus, illetve Claude Shannon már 1952-ben bevezette az ún. *y-játékot*. Ennek a táblája a szabályos háromszögrács szintén szabályos háromszög alakú darabja és a cél egy konnektor megszerzése, ahol a háromszög csúcsai a rögzített pontok. A konnektor tétel miatt az y-játék nem lehet döntetlen, így azt a 4. tétel miatt a kezdő nyeri.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

Cris Hartman az alábbi utat adja meg: Sperner lemma $\Rightarrow$ Konnektor tétel $\Rightarrow$ hex tétel $\Rightarrow$ Pouzet lemma $\Rightarrow$ Brouwer-fixponttétel [6] $\Rightarrow$ Sperner lemma.

Bizonyítás: Sperner lemma: Egy erősebb állítást mutatunk meg, azt, hogy páratlan sok háromszínű háromszög van. Legyen G a háromszögezés duális egy részgráfja: két pont közt lévő duál él akkor kerül $E(G)$-be, ha a köztuk lévő háromszögezésbeli él címkéi 1 és 2. A végtelen tartományhoz rendelt pont páratlan fokú G-ben, így van még G-ben páratlan sok páratlan fokszámú pont. Az ezekhez tartozó háromszögek csúcsai háromszínűek.

Sperner lemma $\Rightarrow$ konnektor tétel. Tegyük fel, hogy van konnektormentes színezés az 1, 2 számokkal. Készítünk egy új színezést: egy x pont kapja annak a legkisebb indexű oldalnak a címkéjét, amelyből *nem* érhető el (az eredeti színezés szerinti) egyszínű úton. Ezzel a pontokat jól színeztük, a Sperner lemma szerint van háromszínű T-beli háromszög. T két szomszédos csúcsa viszont azonos színű volt eredetileg, így azonosnak kellene lenni az új színezésben is.

konnektor tétel $\Rightarrow$ hex tétel. Adjunk hozzá a hextáblához egy fehér és egy fekete pontot. A fehéret kössük össze a fehér játékos egyik céloldalával, a fekete pontot a fekete játékos egyik céloldallal és a két új pontot egymással. Ez felfogható mint egy háromszög háromszögezése és tartalmaz konnektort. A konnektor megad egy utat a hextábla valamelyik két szembefekvő oldala közt is.

hex tétel $\Rightarrow$ Pouzet lemma. Vegyünk egy, a Pouzet lemma feltételének eleget tevő f függvényt a $D(a,b)$ dobozon, és legyen két pont szomszédos a hex beli szomszédság szerint. Színezzük az x pontot az $f(x)$ dimenziójával, azaz 1-el, ha $f(x) \in \{-e_1, e_1\}$, 2-vel különben. Legyen az e_i-re merőleges céloldalak színe i, $i = 1,2$. A hex tétel miatt lesz egyszínű P út például a két függőleges oldal közt; ez csupa 1-es címkéjű. Ekkor ha x a P út bal szélő eleme, akkor $f(x) = e_1$, ha y a jobb szélső, akkor $f(y) = -e_1$. A P-n csak az e_1 és a $-e_1$ váltakozhat, lesz tehát két szomszédos u és v, melyre $f(u) = e_1$, $f(v) = -e_1$.

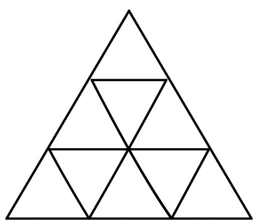
Pouzet lemma $\Rightarrow$ Brouwer-fixponttétel. Tegyük fel, hogy $f : D \to D$ folytonos a D téglalapon és nincs fixpontja. Ezzel jól definiált lesz az g függvény amely az $f(x) - x$ szögét veszi fel x-ben. Mivel g abszolúlt folytonos is, vehető olyan sűrű rács D-ben, hogy g változása a szomszédos pontok közt kisebb, mint $\pi/2$. Legyen h az a rácspontokon értelmezett függvény, amely a $\{\pm e_1, \pm e_2\}$ halmazból az az értéket veszi fel x-ben, ami a legkisebb szöget zárja be $f(x) - x$-szel. A Pouzet lemma szerint lesznek olyan x, y szomszédos pontok, melyekre $h(x) = -h(y)$, ami ellentmondás, hiszen a g szerint $f(x) - x$ és $f(y) - y$ kisebb, mint $\pi/2$ radián szöget zár be.

Brouwer-fixponttétel $\Rightarrow$ Sperner lemma. Legyen f egy jó cimkézése a T háromszögnek, amelynek mégsincs háromszínű háromszöge. Írjuk fel az x pontot mint az őt tartalmazó kis háromszög v_0, v_1, v_2 csúcsvektorainak konvex kombinációja $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Legyen g az a függvény, ami az $x = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ ponthoz a $\alpha_0 V_1 + \alpha_1 V_2 + \alpha_2 V_0$ pontot rendeli, ahol V_0, V_1, V_2 a T háromszög csúcs pontjaihoz tartozó vektorok. Mivel nincs háromszínű kis háromszög T-ben, g minden pontot T valamelyik oldalára képez. Az oldalakat is felcseréli, azaz nincs fixpontja, ami ellentmond a Brouwer-fixponttételnek. $\square$

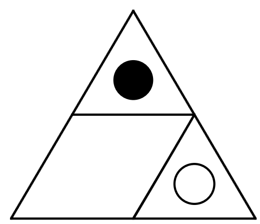
[6] Természetesen a véges módszerek csak ε-approximációt adhatnak. Azaz adott $\varepsilon > 0$-ra olyan x létezését, amelyre $\|f(x) - x\|_2 < \varepsilon$. A fixponthoz még a szokásos kompaktsági érvelés szükséges.

Természetesen az egyes állítások közti kapcsolat megmutatása másképp is lehetséges. Bár a konnektor tételt (és az y-játékot) a hex tétel (hex játék) általános formájának tartják, mint láttuk, ekvivalensek. Az egymásból levezethetőség igazából mindkét irányban *könnyű*, amely az alábbi ábrán látható.

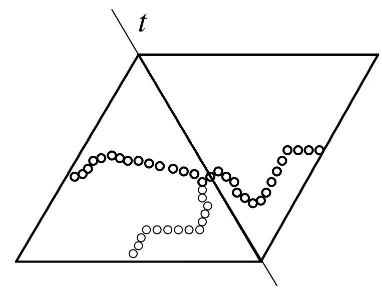
A baloldal a 4-es y-játék; vegyük észre, hogy a szomszédság a gráfon olyan, mint a hexben a mezők között. A középső ábrán egy kitöltött hex táblát kiegészítettünk egy csupa fehér ill. fekete pontot tartalmazó háromszöggel, amely egy lejátszott y-játékra vezet.



A 4×4-es y-játék tábla.



A kiegészített hex tábla.



A t-re tükrözött y-játék.

A konnektor tétel miatt van egy egyszínű konnektor, de ez egy egyszínű nyerő halmazt jelent az eredeti hex táblán. Végül a jobboldali ábrán egy lejátszott y-játék tábláját tükrözzük a t-tengelyre, a szélső sort félbevágva. Ezzel egy (szimmetrikusan) kitöltött hex táblát kapunk. A hex tétel miatt létező nyerő halmaznak az eredeti táblából kilógó részeit „visszatükrözve" egy egyszínű konnektort kapunk.

6. fejezet

Párosítások és matroidok

Párosításokat régóta használnak a játékelméletben. Egy klasszikus feladatban I és II egyforma érméket helyez egy köralakú asztalra. Az átfedés nem megengedett, és az veszít, aki nem tud lépni. A kezdő könnyen nyer a középpontba téve, majd az ellenfél lépéseit erre tükrözve. (Persze ha az asztal nem középpontosan szimmetrikus, alig tudunk valamit.) Hasonló stratgiát, egy tengelyes tükrözést használhat az $n \times (n+1)$-es hexben is a közelebbi oldalakat összekötni kívánó fél, [2].

A hipergráf játékok párosítási stratégiáival Alfred Hales és Robert Jewett foglalkozottt először. Szintén ők vezették be a $HJ(n,d)$-vel jelölt játékokat, ahol n és d természetes számok. A $HJ(n,d)$ táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából van összerakva úgy, hogy a nagy kocka minden éle mentén n kis kocka fekszik. Formálisan a hipergráf alaphalmaza a d hosszú sorozatok, ahol minden koordináta egy 1 és n között lévő egész szám, azaz $V(HJ(n,d)) = \{1,...,n\}^d$. A hipergráf élei azon n elemű részhalmazok, melyeknek elemei sorba rendezhetőek oly módon, hogy egy rögzített koordinátában az $1,2,...,n$, az $n,n-1,...,1$ vagy konstans értéket vesznek fel a sorozatok. Persze a $HJ(3,2)$ nem más, mint a tic-tac-toe, a $HJ(4,3)$ pedig a tic-toc-tac-toe.

Definíció: Egy $\chi : V \to \{1,\ldots,k\}$ az $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ hipergráf *jó színezése*, ha minden $A \in \mathcal{H}$ halmaz képe legalább kételemű. A minimális k, amelyre van jó színezés, $\mathcal{F}$ *kromatikus száma*, jele $\chi(\mathcal{F})$.

Ha egy $\mathcal{F}$ hipergráfra a $\chi(\mathcal{F}) > 2$, akkor a rajta értelmezett játék nem végződhet döntetlenül. Az y-játék mellett például a $HJ(3,3)$ is ilyen. Másrészt a $HJ(4,3)$ példa arra, hogy I-nek lehet nyerő stratégiája egy $\mathcal{F} = (V,\mathcal{H})$ játékban akkor is, ha $\chi(\mathcal{F}) = 2$.

8. Tétel (Hales-Jewett)**.** *Bármely n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, hogy a $HJ(n,d)$ játék hipergráfjának kromatikus száma nagyobb, mint kettő.*

Így az a kérdés, milyen n és d mellett érhet el döntetlent II ? Ennek kimondásához szükség van az ún. Frobenius-Kőnig-Hall tételre, lásd [7].

Adott véges halmazoknak egy $\{A_i\}_{i=1}^m$ véges rendszere. Egy $S = \{s_i\}_{i=1}^m \subseteq \cup_{i=1}^m A_i$ *diszjunkt reprezentáns rendszer*, ha $s_i \neq s_j$, $i \neq j$-re és $s_i \in A_i$ az $i = 1,...,m$ esetén.

9. Tétel (Frobenius-Kőnig D.-Ph. Hall)**.** *A véges halmazokból álló $\{A_i\}_{i=1}^m$ halmazrendszernek pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $I \subseteq \{1,...,m\}$ esetén*

$|\cup_{i\in I} A_i| \geq |I|$.[1]

10. Tétel (Hales-Jewett). *Ha egy véges $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf játékban minden $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ esetén $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$, akkor a játék döntetlen.*

Bizonyítás: Ha $\mathcal{H} = \{A_1, \dots, A_m\}$, legyen $\mathcal{H}^* = \{A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, \dots, A_m, A_m^*\}$, ahol $A_i = A_i^*$ minden $i = 1, \dots, m$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$ feltételből következik, hogy minden $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{H}^*$ választásra $|\cup_{A\in\mathcal{G}^*} A| \geq |\mathcal{G}^*|$, azaz a $\mathcal{H}^*$ rendszerre alkalmazható az 9. tétel. Legyen a diszjunkt reprezentáns rendszer $S = \{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \dots, a_m, a_m^*\}$. *II* kövesse az alábbi stratégiát: Valahányszor *I* választ egy elemet S-ből (a_i-t vagy a_i^*-ot), akkor *II* válassza a megegyező indexűt (a_i^*-ot vagy a_i-t), különben tetszőlegesen léphet. *I* nem szerezheti meg A_i összes elemét egyetlen $i = 1, \dots, m$-re sem, mert az $a_i, a_i^* \in A_i$ közül legalább az egyiket *II* szerzi meg. □

Vegyük észre, hogy a $HJ(n,d)$ hipergráfban minden pont legfeljebb $\frac{1}{2}(3^d - 1)$ nyerő halmaznak eleme, ha n páratlan. Páros n-re ez a szám $2^d - 1$. Így a 10. tételt alkalmazva egyből kapjuk:

11. Tétel (Hales-Jewett). *A $HJ(n,d)$ döntetlen, ha $n \geq 3^d - 1$ és n páratlan, vagy ha $n \geq 2^{d+1} - 2$ és n páros.*

Párosítási stratégiával ennél sokkal jobb korlát nem adható, más módszerrel viszont, ahogy azt látni fogjuk, igen. A fordított játék a paritástól (is) függ, *I* (*II*) nem veszít a fordított $HJ(n,d)$-ben, ha d páratlan (páros).[2]

A 10. tételt (Marshall Hall Jr. javításával) alkalmazhatjuk a végtelen táblán játszott k-amőbára. Ez $k \geq 15$ esetén döntetlent ad. Ha d-dimenziós táblán játszunk, akkor ez a korlát $k \geq 2(3^d - 1) - 1$. Hales és Jewett megadott egy párosítást, amely $k \geq 9$-re döntetlent ad, de ez nem a 10. tételen alapul, [2].

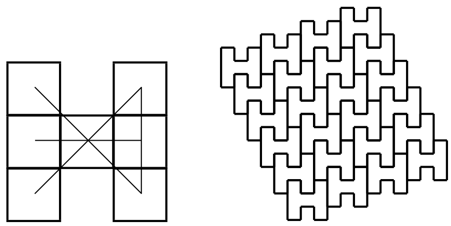
Segédjátékok. Egy párosítás lényegében a tábla szétvágása kisebb, könnyebben áttekinthető részekre. A résztáblákon a játékos egymástól független új, segédjátékokat játszik, amelyek együttesen a céljához segítik.

Ennek egyik első példája Shannon és Pollak ötlete, amellyel a 9-amőbára adtak döntetlen stratégiát. Ezt megjavította egy, a T. G. L. Zetters álnéven[3] színre lépő holland matematikus csoport, belátván, hogy már a 8-amőba is döntetlen, [2].

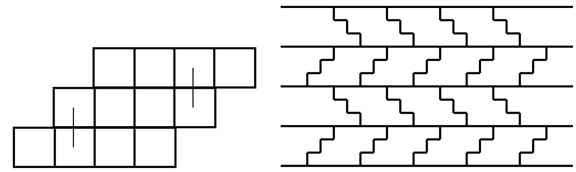
[1] Kőnig Dénes a tételt páros gráfokra vonatkozó alakban mondta ki. *Marshall Hall Jr.* 1949-ben belátta olyan végtelen halmazrendszerekre, amelyekben minden pont fokszáma véges.

[2] A $\{1, \dots, n\}^d$ kocka középpontjára szimmetrikus lépésekkel ez elérhető. Ha n páratlan, *I* elfoglalhatja a centrumot, különben *II* játszhat középpontos tükrözéssel.

[3] Az álnév régi fogás a matematikában, amikor úgy véli egy szerző, hogy támadásoknak lehet céltáblája a munkája miatt, pl. *Student, Blanche Descartes, Bourbaki, Alon Nilli* stb. (A T.G.L. Zetters álnév Andries Brouwer holland matematikust fedi.)



A Shannon-Pollak parkettázás.



A T. G. L. Zetters parkettázás.

II, ha lehetséges, azon a résztáblán/parkettán lép, mint *I*. A Shannon-Pollak-parketta nyerő halmazait a vékony vonal jelöli; ez négy darab, három elemű halmaz. A T. G. L. Zetters parketta nyerőhalmazai a parketta három sora, négy 45 fokos átlója és a két, vékony vonallal jelölt pár. Egy kis munkával ellenőrizhető, hogy (i) a segédjátékokban nem veszít *II*, (ii) ha *I* nem nyer legalább egy segédjátékban, akkor nem nyerheti meg a 9- illetve 8-amőbát sem.

Valójában a fentiekben erősebb állításokat igazoltunk, mint amiket kimondtunk. A kezdő játékos akkor sem tud nyerő halmazt megszerezni, ha a másodiknak nincs lehetősége ellentámadni. Azaz hiába szerez meg *II* egy nyerő halmazt, a játék folyik tovább. Ez a pozíciós játékok ún. *építő-romboló* (Maker-Breaker) változata, ahol az építő akkor nyer, ha megszerez egy nyerő halmazt, míg a romboló akkor, ha ezt megakadályozza.[4] Ha *II* rombolóként nyer ebben az építő-romboló változatban, akkor döntetlene van az eredetiben is. Fordítva ez nem igaz, a tic-tac-toe-t a kezdő építőként megnyeri.

A párosítások és a tábla egyéb felosztása hatékony módszer önmagában, vagy más eszközökkel kombinálva. További példák találhatóak erre a [1].

Shannon-féle kapcsoló játék. Ez a játék a hex, az y-játék és a David Gale által kigondolt *Brigit* mintájára készült, [2]. Ezekben az összekötős játékokban pontosan az egyik fél nyer, kézenfekvő hát, hogy építő-romboló formában beszéljünk róluk. Ha adott egy G gráf, akkor egy-egy élt[5] választva fordulónként az építő G egy *feszítőfáját* akarja megszerezni, míg a romboló célja az, hogy az építő éleiből álló részgráf ne legyen összefüggő.

12. Tétel (Lehman, 1964)**.** *Kezdje a romboló a Shannon-féle kapcsoló játékot. Egy G gráfra az építő pontosan akkor nyer, ha G-ben van két diszjunkt feszítőfa, F_1 és F_2.*

Bizonyítás: $\Leftarrow$: A játék i-edik menetében F_1^i és F_2^i fákról beszélünk majd a G_i gráfban. ($G_1 = G$, $F_1^1 = F_1$ és $F_2^1 = F_2$.) Ha a romboló az i-edik lépésben nem az $E(F_1^i) \cup E(F_2^i)$-ből választ, akkor az építő bármit léphet. Ha mondjuk F_1^i-ből vesz egy e_i élt romboló, akkor az $E(F_1^i) \setminus \{e_i\}$ élek által feszített részgráf pontosan két, C_1^i és C_2^i, komponensből áll. Az építő ekkor egy olyan $f_i \in F_2^i$ élt választ, mely a C_1^i-t összeköti C_2^i-vel. (A fák alapvető tulajdonságai a [7]-ből felidézhetők.) Mivel az f_i él két végpontja, x_i és y_i többé nem szakad

[4] A nyerés eldöntése mind a normál, mind az építő-romboló változatban PSPACE-teljes feladat.

[5] A hex és az y-játék szintén alapozható egy-egy gráfra, de ott nem az éleket, hanem a pontokat szerzik meg a játékosok. Ez a látszólag kis eltérés egy teljesen más világba visz; itt képesek vagyunk a nyerő stratégiák leírására.

el egymástól, *húzzuk össze* az f_i élt.[6] Könnyen látható, ha F_1^i és F_2^i diszjunkt feszítőfái a G_i-nek, akkor az $F_1^{i+1} = F_1^i/f_i$ és $F_2^{i+1} = F_2^i/f_i$ szintén diszjunkt feszítőfák G_{i+1}-ben. Továbbá $|V(G_i)| - 1 = |V(G_{i+1})|$, ezért $|V(G_{n-1})| = 1$, és az $\{f_1, \dots f_{n-1}\}$ élek G egy feszítőfáját alkotják.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy az építő nyer és lopja el ezt a stratégiát a romboló. A játék végére a romboló megszerzi az F_r, az építő pedig az F_m feszítőfa éleit, amelyek G-ben vannak és diszjunktak. □

Megjegyzés. A fenti érvelést eredetileg nem gráfokra, hanem *matroidokra* adták. A matroidoknak sok egyenértékű jellemzése van, nekünk most a *bázis* fogalma a legkényelmesebb. A véges V halmaz feletti $\mathcal{B}$ halmazrendszert egy *matroid bázisainak* nevezzük, ha
1. $\mathcal{B}$ nem-üres,
2. $\forall\, A, B \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in A \setminus B$ esetén $\exists\, y \in B \setminus A$, hogy $\{A \setminus \{x\}\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.

Ezzel a 12. tétel általánosabb formában így szól: Ha az építő-romboló $(V, \mathcal{B})$ pozíciós játékban a romboló kezd, akkor az építő pontosan akkor nyer, ha léteznek $A, B \in \mathcal{B}$ halmazok úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$. Az élek törlése és kontrakciója természetes matroid műveletek, a 2. axióma mintha a fenti bizonyításra lenne szabva.[7] A 12. tétel olyan helyzetekben is működik, amikor párosítási stratégia biztosan nem létezik. Vegyük a teljes gráfot az $\{x, y, v, w\}$ pontokon, és a q, z pontokat úgy, hogy q szomszédos x-szel és y-nal, z pedig v-vel és w-vel.

[6] Az új gráfban, G_{i+1}-ben x_i és y_i helyett egy új, z_i pontot veszünk fel, melyet x_i és y_i összes szomszédjával kötünk össze, jelben $G_{i+1} = G_i/f_i$.

[7] A látszat csal, hiszen a matroidokat már Hassler Whitney vizsgálta az 1930-as években. Lehman tétele jelentősen növelte a matroidok elfogadottságát. Ezt megelőzően pl. William Tutte néhány matroidokra vonatkozó klasszikus eredményét inkább gráfokra mondta ki. Azóta viszont a matroidok a kombinatorika, a kombinatorikus optimalizálás és a véges geometria fontos részévé váltak.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

7. fejezet

A véletlen módszer és a súlyfüggvények

A véletlen módszerek a matematika legtöbb ágában jelentős szerepet játszanak, a kombinatorikában és a játékelméletben pedig alapvetőt. Inkább az meglepő, hogy viszonylag későn jelentek meg a pozíciós játékokban. Az áttörést Erdős Pál és John Selfridge 1973-as eredménye hozta.[1]

13. Tétel (Erdős-Selfridge)**.** *Kezdjen az építő az $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráf játék építő-romboló változatában, és legyen $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$. Ekkor a romboló nyer.*

Bizonyítás: Legyen az építő i-edik lépése x_i, a rombolóé y_i, $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $Y_i = \{y_1, \ldots, y_i\}$ és $A_i(I) = |A \cap X_i|$, illetve $A_i(II) = |A \cap Y_{i-1}|$.

Egy $A \in \mathcal{H}$ halmaz *súlya* az i-edik lépésben:

$$w_i(A) = \begin{cases} 2^{-|A|+A_i(I)}, & \text{ha } A_i(II) = 0 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Egy $x \in V$ *elem súlya* $w_i(x) = \sum_{x\in A} w_i(A)$, a *potenciál* pedig $w_i = \sum_{A\in\mathcal{H}} w_i(A)$.

A romboló az ún. *mohó algoritmust* követi, azt a $z \in V \setminus (X_i \cup Y_{i-1})$ elemet veszi az i-edik lépésben, amelyre a $w_i(z)$ érték maximális. Ez a $w_i \geq w_{i+1}$ egyenlőtlenséget adja minden i-re. Valóban, $w_{i+1} \leq w_i - w_i(y_i) + w_i(x_{i+1})$, hisz a romboló i-edik lépése $w_i(y_i)$-vel csökkenti, míg az építő az $i+1$-edik lépése legfeljebb $w_i(x_{i+1})$-el növelheti a potenciált, hisz pontosan azoknak az x_{i+1}-et tartalmazó halmazok súlyát duplázza meg, amelyeknek nem eleme y_i. A mohó algoritmus miatt $w_i(y_i) \geq w_i(x_{i+1})$, így adódik a potenciál monotonitása. Másrészt $w_1 \leq 2w_0$ mivel x_1 azon halmazok súlyát duplázza, amelyeknek eleme.

Ezért a 13. tétel feltétele miatt $w_1 \leq 2w_0 = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|+1} < 1$. Tegyük fel, hogy az építő megnyeri a játékot, mondjuk a k-adik lépésben. Ez azt jelenti, hogy van olyan $A^* \in \mathcal{H}$, amelyre $|A^*| = A_k^*(I)$, így

$$1 > w_1 \geq w_k = \sum_{A\in E(\mathcal{H})} w_k(A) \geq w_k(A^*) = 2^{-|A^*|+A_k^*(I)} = 2^0 = 1.$$

Azaz a feltevésünk, hogy az építő nyer, ellentmondásra vezet. □

[1] John H. Conway híres békás problémája is *lehetett volna* volna a kezdet, [2]. Az ott használt súlyfüggvénynek viszont nincs közvetlen valószínűségi jelentése, talán emiatt maradt visszhangtalan.

Vegyük észre, hogy amíg a 10. tétel csak a *ritka*, de tetszőleges méretű, addig a 13. tétel a *sűrű*, de legfeljebb exponenciális méretű hipergráfokra adhat eredményt. A módszerek részben összevegyíthetőek, lásd [1].

A 13. tétel vezet a *hatékony derandomizációkhoz* és a játékok mélyebb megértéséhez. Ez konkrétan éppen Erdős egy régi tételének bizonyításából tünteti el a véletlent, mely szerint ha egy $\mathcal{F} = (V, \mathcal{H})$ hipergráfra a $\sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1} < 1$, akkor $\chi(\mathcal{F}) \leq 2$. Vegyük észre, ha V pontjait egymástól függetlenül, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel színezzük kékre vagy pirosra[2], akkor az egyszínű halmazok várható száma $\mathbb{E} = \sum_{A\in\mathcal{H}} 2^{-|A|+1}$. Mivel $\mathbb{E} < 1$, lennie kell egy jó színezésnek. Ezért az összes $2^{|V|}$ darab kettő színezésből legalább egy jó.

Az $\mathcal{F}$ paramétereiben polinom időben is adhatunk egy jó színezést: játszon mindkét játékos úgy, mintha romboló lenne. A $w_i(A)$ súly annak a feltételes valószínűsége, hogy A például kék lesz, ha az i-edik lépéstől pénzfeldobással színezünk.

A játékok vizsgálatához is kapunk egy vezérfonalat, amely sokszor segít.

A véletlen heurisztika. Cseréljük ki a két tökéletesen játszó játékost két teljesen véletlenül játszóra. Nagyjából ugyanaz lesz a végeredmény.[3]

7.1. Zsaru-Rabló

A játékot Quilliot illetve tőle függetlenül Nowakowski és Winkler találta ki illetve írta le. A két játékos egy G gráf egy-egy csúcsát foglalja el, majd felváltva szomszédos pontra lépnek, vagy helyben maradnak. Ha a zsaru és a rabló egyidőben azonos pontban vannak, akkor a zsaru nyer; ha a rabló ezt teszőlegesen sokáig el tudja kerülni, akkor ő nyer. Ha G véges, akkor a 1. tétel miatt valamelyik félnek van nyerő stratégiája.

Esetünkben $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, amelynek minden pontjában van egy hurokél.[4]

Jelölések: $N(v)$ a $v \in V(G)$ szomszédai, $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Ha adott a pontok egy $v_1, \ldots, v_n$ sorrendje, akkor a $N_i(v) = N(v) \cap \{v_j : i \leq j \leq n\}$.

Ha nincs hurokél, a zsaru kétféleképpen nyerhet. Vagy a saját lépésével fogja el a rablót, vagy a rabló szalad a karjaiba. Ha minden pontban van hurokél és a rabló kerüli a vesztést, akkor csak az elő eset következhet be, azaz a zsaru lépésével valósul meg a nyerés.

A stratégiák egyszerű függvények, $s : V(G) \times V(G) \to V(G)$ formában, ahol az (u, v) pár a zsaru és a rabló pillanatnyi helyzete, az $s(u, v) \in N(u)$ pedig a zsaru következő lépése. A gráf zsaru nyerő, ha van olyan s, amely a rabló bármely stratégiája mellett nyer. Feltesszük, hogy G összefüggő, és a rabló amennyire csak képes, késleltetni igyekszik a vereségét.

14. Tétel. *Legyen G véges, irányítatlan gráf, amelynek minden pontjában van hurokél. G zsaru nyerő akkor és csak akkor, ha a pontjainak van olyan $v_1, \ldots, v_n$ rendezése, melyre minden i-re, $1 \leq i \leq n$ van olyan j, $i < j \leq n$, hogy $N_i[v_i] \subseteq N_j[v_j]$.*

Bizonyítás: Először egy algebrai és egy topológia fogalmat célszerű definiálni. A $h : G \to H$ leképzés *homomorfizmus* a G gráfból a H gráfba, ha minden $(u, v) \in E(G)$ esetén $(h(u), h(v)) \in$

[2] Ez egy érme ismételt feldobásával elérhető. A példa mutatja, mekkora ereje van a véletlennek.

[3] Természetesen a véletlen heurisztika csak elv, sokszor érvényes, néha nem. De bármely játék esetén célszerű megnézni, hogy mit *jósol*. Véletlenül játszani viszont csak ritkán érdemes.

[4] Irányított gráfokra a probléma nagyon nehéz, ún. EXPTIME-teljes.

$E(H)$ teljesül. Egy ρ homomorfizmust, amely G-t egy H részgráfjára képzi úgy, hogy a $\rho(v) = v$ minden $v \in H$ esetén pedig *összehúzás* (retrakció) H-ra. Vegyük észre, hogy az összehúzás azért nem triviális, mert vannak hurokélek.

15. Lemma. *Ha G zsaru nyerő és H a G egy összehúzása, akkor H is zsaru nyerő.*

Bizonyítás: Legyen s a zsaru egy nyerő stratégiája a G gráfon és ρ egy összehúzás. Ezzel megadhatunk egy $s' : V(H) \times V(H) \to V(H)$ nyerő stratégiát a H gráfon: legyen $s'(u,v) = \rho(s(u,v))$. Ha az s sohasem küldi ki a zsarut H-ból, akkor s' nyerő, hisz egyszerű megszorítása s-nek H-ra, és s a rabló minden stratégiájára nyer; speciálisan arra is, ha az nem hajlandó H-t elhagyni. Ha $s(u,v) \in V(G) \setminus V(H)$ valamely $u, v \in V(H)$-ra, akkor $N[s(u,v)] \subseteq N[\rho(s(u,v))]$, hisz ρ homomorfizmus. Ez viszont azt jelenti, hogy a $\rho(s(u,v))$ legalább olyan hatékony, mint a $s(u,v)$, hisz ha az utóbbi elöl nem tud elmenekülni a rabló, akkor az előbbi is elfogja.[5] □

Tegyük fel, hogy a zsaru nyer; ez kétféleképpen lehetséges. Ha van olyan $v \in V(G)$, amely minden másik ponttal össze van kötve, akkor a zsaru ezt megjátszva nyer és a tétel feltétele is teljesül $v_n = v$-t választva tetszőleges sorrend mellett. Ha nincs ilyen v, akkor legyen a rabló vesztés előtti utolsó lépése v. Ekkor a zsaru egy olyan u pontban áll, amelyre $N[v] \subseteq N[u]$, hisz különben nem érne véget a zsaru következő lépésével a játék. A $G - v$ összehúzása a G-nek ($\rho(v) = u$), így a lemma miatt zsaru nyerő, azaz használhatunk egy indukciót rajta. A $G - v$ pontjai tehát a megfelelő sorrendbe állíthatók, ennek az elejére téve v megkapjuk a kívánt sorrendet.

A másik irány szintén indukcióval kapható meg. Ha adott egy, a tétel feltételeit teljesítő $v_1, \ldots, v_n$ sorrend, akkor húzzuk be v_1-et. Azaz vegyük az ρ összehúzást, amelyre $\rho(v_i) = v_i$, ha $i > 1$ és $\rho(v_1) = v_j$, ahol $N[v_1] \subseteq N[v_j]$. A $G - v_1$ $v_2, \ldots, v_n$ sorrendje és az indukciós feltétel miatt zsaru nyerő, így van egy s nyerő stratégiája. Ezt kiterjeszthetjük egy s', a G-n értelmezett nyerő stratégiára, $s'(u,v) = s(u,v)$, ha $v \neq v_1$ és $s'(u,v_1) = s(u,\rho(v_1))$, kivéve, ha van közvetlen nyerő lépése a zsarunak. □

7.2. Földrajzi játék

A normál földrajzi játékban[6] olyan földrajzi fogalmakat mondanak felváltva a játékosok, amelyek az előző szó utolsó betűjével kezdődnek. Kétszer nem használható egy szó, és aki nem tudja folytatni, az veszít. Ennek egy kézenfekvő absztrakt változatában egy G irányított gráf pontjain lépegetünk felváltva, adott v_0 pontból indulva, az élek mentén. Egy pont csak egyszer látogatható, és aki nem tud lépni, az veszít. Az általános eset nagyon nehéz, ennek belátásához definiáljunk egy másik problémát, amely játékként fogalmazható meg. Adott egy ϕ konjunktív normál alakú Boole formula az $x_1, \ldots, x_n$ változókkal. Két játékos, A és B, felváltva ad értékeket a változóknak, az i-edik lépésben x_i-nek. Ha ϕ igaz értéket vesz fel, akkor A nyer, különben B. Feltehető, hogy A teszi meg az utolsó lépést; ha nem így

[5] A lemma megfordítása nem igaz, például a kettő hosszú út, P_2 összehúzása a négy hosszú körnek, de az utóbbi nem zsaru nyerő.

[6] Nálunk inkább az „ország, város, fiú, lány" néven ismert.

lenne, vegyük fel az x_{n+1} változót, ami nem is szerepel ϕ-ben. Formálisan, igazságértékét szeretnénk tudni ennek a kifejezésnek:

$$\Phi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \dots \exists x_\ell \forall x_{\ell+1} \dots \forall x_{n-1} \exists x_n \phi.$$

Legyen QSAT azon Φ kifejezések nyelve, amelyek igazak. Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt, további részletek Papadimitriou könyvében [9] találhatóak.

16. Tétel. *A QSAT nyelv eldöntési problémája PSPACE-teljes.*

A 16. tétel felhasználásával könnyű belátni, hogy a földrajzi játék hasonlóan nehéz. Legyen GEOGRAPHY azon gráfok nyelve, amelyekben az első játékos megnyeri a földrajzi játékot.

17. Tétel. *A GEOGRAPHY nyelv eldöntési problémája PSPACE-teljes.*

Bizonyítás: A szokásos visszavezetéses technikát használjuk, egy Φ kifejezéshez hozzárendelünk egy $G(\Phi)$ gráfot úgy, hogy Φ pontosan akkor igaz, ha az első játékos nyeri a földrajzi játékot a $G(\Phi)$ gráfon. Először minden x_i változóhoz, $1 \leq i \leq n$, egy G_i gráfot rendelünk, ahol $V(G_i) = \{a_i, b_i, c_i, x_i, \bar{x}_i\}$, $E(G_i) = \{(a_i, b_i), (b_i, x_i)(b_i, \bar{x}_i), (x_i, c_i), (\bar{x}_i, c_i)\}$. Azonosítjuk az a_i és c_{i-1} pontokat, $2 \leq i \leq n$. Ha $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge, \dots, \wedge \phi_\ell$, akkor felveszünk további v_j pontokat és a (c_n, v_j) éleket, ahol $1 \leq j \leq \ell$. Végül ha a ϕ_j tartalmazza az y literált ($y = x_i$ vagy $y = \bar{x}_i$), akkor (v_i, y) élt is behúzzuk.

A játék az a_1 pontban kezdődik, a játékosok végigmennek a G_i gráfokon és a második játékos léphet c_n-ből valamelyik v_j-be. Ha G_i-ben az x_i pontot választotta a soron lévő játékos, akkor a Φ kiértékelésben $x_i = 0$, míg ha az $\bar{x}_i$ pontot, akkor $x_i = 1$. A második játékos a v_j pont választásával tesztelheti a fenti kiértékelést, rámutatva arra a ϕ_j részformulára, amelyik nem teljesül. Végül ha ϕ_j értéke pontosan akkor 1, ha ϕ_j-ben egy y literál 1 értéket kapott; ekkor viszont az első játékosnak van még egy lépése a $(v_j, \bar{y})$ élen. Másrészt GEOGRAPHY $\in$ PSPACE, hisz a lehetséges játszmák száma kevesebb, mint n^n, így a leírásához elég $O(n \log^2 n)$ tár. □

A földrajzi játék egy változata an ún. *általánosított Slither*. Itt az első játékos kezdőlépése a G egy v_0 pontjának a kiválasztása, majd a második folytatja a játékot v_0-ból. Ennek a játéknak a speciális esetei is érdekesek, lásd Lovász könyvében [7] a 8. fejezet 8. és 9. probléma.

18. Tétel. *(i) Tegyük fel, hogy G körmentes. Ekkor az első játékos nyer, és meghatározható az összes olyan pont, amelyekkel kezdve nyerhet. (ii) Tegyük fel, hogy van olyan $v_0 \in V(G)$, melyre $d_-(v_0) = 0$, azaz v_0-ba nem fut él. Ekkor az első játékosnak van nyerő stratégiája. (iii) Egy tetszőleges G irányított gráfra a második játékos nyer akkor és csak akkor, ha G minden erősen összefüggő komponensében játszva is nyerne. (iv) Egy szimmetrikus G gráf*[7] *esetén az első játékos pontosan akkor nyer, ha a G gráfban nincs teljes párosítás.*

Bizonyítás: (i) Mivel G irányított körmentes, vannak benne nulla kifokú pontok. Ezek pontok X halmaza vesztő, majd visszafele cimkézéssel azok a pontok, amelyekből X-be vezet él nyerők és így tovább, lásd a 1. tétel bizonyítását.

[7] G szimmetrikus, ha az $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (y, x) \in E(G)$.

(ii) Stratégia lopást használhatunk. Tegyük fel, hogy a második játékos nyer. Mivel v_0 minden y szomszédjában kezdve veszítene az első játékos, kezdjen x_0-ban, és megjátszhatja amit a második játékos nyerő stratégiája javasol, hiszen v_0-at egyik y pontból induló játék sem érintheti. Mivel a második játékos nyerése ellentmondáshoz vezet és döntetlen nem lehet, az első játékos nyer.

(iii) Használjuk a tényt, hogy G ponthalmaza felbomlik erősen összefüggő komponensek uniójára és a C_i, C_j $(i \neq j)$ komponensek között az élek egyirányban húzódnak.[8] Egy komponensben vesztés vagy az egész játszma vesztését jelenti, vagy kényszert egy másik komponensbe elsőként történő belépésre. A 18. tétel (i) pontjának igazoláshoz hasonlóan, ha van olyan komponens, ahonnan játszva az első játékos nyer, akkor vegyen a $C(G)$-ben egy levélhez legközelebb eső ilyen C_i komponenst. Játsza ezen a C_i-hez tartozó nyerő stratégiát. A második játékos vagy veszít a C_i-ben, vagy átlép egy olyan C_j komponensbe, ahol már az második játékosnak van nyerő stratégiája; ezt viszont az első játékos ellopja tőle. Ha bármely C_i komponensben nyer a második játékos, akkor persze nyer G-ben, mindig az aktuális C_i-beli nyerő stratégiát követve..

(iv) Ha van egy M teljes párosítás, akkor az elő játékos x lépésére a második játékos mindig y-al felel, ahol $(x,y) \in M$. Ha nincs teljes párosítás, jelöljön M^* egy maximális párosítást, és az elő játékos első lépése legyen egy olyan x_0, melyet elkerül a párosítás. Ezek után ha a második játékos egy x_i pontra lép, az első játékos átlép x_{i+1}-re, ami x_i M^* párja. Tegyük fel, hogy az első játékos nem tud lépni az x_{2k+1} pontból. Ekkor az (x_0,x_1), (x_2,x_3), $\ldots$, (x_{2k-1},x_{2k}) élek mind elemei $E(G) \setminus M^*$ halmaznak, míg $(x_1,x_2),\ldots,(x_{2k},x_{2k+1}) \in M^*$, azaz a $P = \{x_0,\ldots,x_{2k+1}\}$ *alternáló út*. Ez ellentmond M^* maximalitásának, hisz az M^* és P élhalmazának szimmetrikus differenciája $|M^*|+1$ elemű párosítás. □

[8] Az erősen összefüggő komponenseket egy pontra és a köztük húzódó éleket egy élre összehúzva keletkezik a *kondenzált gráf*, $C(G)$. Ez körmentes.

Neumann, Nash és követőik

8. fejezet

Mátrixjátékok

Az anyagiasabb XX. században a közgazdaságtudomány igénye szintén életre hívott néhány modellt. Elsőként az ún. *teljes információs, véges, kétszemélyes, zérusössszegű* játékokat vizsgáljuk részletesen. Ebben az esetben a játékosok *stratégiái* végesen felsorolhatók és egy $(i,\ j)$ párhoz hozzárendelhető az a_{ij} szám, amit a sorjátékos nyer, az oszlopjátékos pedig veszít, ha rendre az i-edik, illetve a j-edik stratégiájukat játszák. Így a tömörség kedvéért hívhatjuk ezeket a játékokat *mátrixjátéknak*.

A mátrixjátékok leírásának első lépéseit Emile Borel tette meg 1921 és 1927 között. Jelentős haladást ért el Neumann János: 1928-ban bebizonyította az azóta híressé vált *minimax* tételét és ezzel megmutatta *hol* kell keresni a megoldásokat. Körülbelül 20 évvel később ő adott választ a *hogyan* kérdésre is, rámutatva a mátrixjátékok és a lineáris programozás kapcsolatára. Később Dantzig, Gale, Kuhn és Tucker munkája nyomán a mátrixjátékok elmélete teljesen beleépült a lineáris programozás elméletébe. Ezt a felépítést ismertetjük.

Definíció: Minden A valós mátrix definiál egy játékot, ahol a *sorjátékos* az egyik sort, az *oszlopjátékos* az egyik oszlopot választja, és a *sorjátékos nyereménye* a választott sor és oszlop találkozásában levő a_{ij} elem, míg az oszlopjátékosé $-a_{ij}$. Az A mátrixot *kifizetési mátrixnak*, sorait/oszlopait pedig a sor/oszlop játékos *tiszta stratégiáinak* nevezzük.

Példa: Legyen az A mátrix az alábbi.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A sorjátékos, bár a lehető legtöbbet szeretne nyerni, itt biztonsági játékban gondolkodhat. Az első sort játszva legalább -1-et nyer (legfeljebb 1-et veszít), ha a második vagy harmadik sort, akkor pedig rendre 1 illetve 0 lesz a minimális nyereménye. Az oszlopjátékos hasonlóan korlátozhatja a sor nyereményét és ezzel a saját veszteségét; ez nem több, mint 3, 2, 1 és 3, ha az oszlop az első, második, harmadik vagy negyedik oszlopot játsza. Ezeket a garantált alsó (felső) korlátokat a sorok (oszlopok) elé (fölé) írtuk.

	3	2	1	3
-1	0	-1	0	3
1	3	2	1	2
0	1	3	0	1

Ha a sorjátékos a második sort választja, az oszlopjátékos pedig a harmadik oszlopot, akkor garantált, hogy a sor legalább 1-et nyer, de az is, hogy többet nem. Azaz ezek megjátszását optimális illetve egyensúlyi stratégiáknak tekinthetjük.

8.1. A nyeregpont

A példa gondolatmenete elég nyilvánvalóan általánosítható.

Definíció: Jelentse m_i az i-edik sor minimumát, M_j pedig a j-edik oszlop maximumát, azaz $m_i = \min_j a_{ij}$, $M_j = \max_i a_{ij}$. Legyen továbbá $m = \max_i \min_j a_{ij}$ és $M = \min_j \max_i a_{ij}$.

Könnyen beláthatók az alábbiak:

(i) $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$, azaz $m \leq M$

(ii) Ha $m = M$, akkor van olyan r és s, hogy $a_{rs} = m = M$.

Definíció: Ha $m = M$, akkor az $a_{rs} = m$ elem az A mátrix *nyeregpontja*.

19. Tétel. *Ha az A mátrixnak van egy a_{rs} nyeregpontja, akkor az r-edik sor választása a sorjátékos számára, illetve az s-edik oszlop választása az oszlopjátékos számára egy optimális stratégia párt alkot.*

Bizonyítás: A sorjátékos nyereménye az i-edik sort választva legalább m_i, az oszlopjátékos vesztesége a j-edik oszlopot választva legalább M_j. Az r-edik sort, illetve az s-edik oszlopot választva a sorjátékos $m = a_{rs}$ nyereményt garantálhat magának, míg az oszlopjátékos legfeljebb $M = a_{rs}$ egységnyit veszít. □

8.2. Moriarty paradoxon

A szituációt Sir Arthur Conan Doyle írta le a *The Final Problem* című könyvében. Később Oskar Morgenstern és, vélhetően az ő hatására, Neumann János is foglalkozott a problémával.

A regény szerint Sherlock Holmes Moriarty professzor elől menekülve Londonban felszáll a Doverbe tartó vonatra, hogy onnan továbbhajózva majd a kontinensen leljen menedéket. A felszállásnál viszont észrevette, hogy Moriaty is felszállt, és jó oka van azt hinni, Moriarty is láthatta őt. Ha együtt szállnak le a vonatról, az végzetes Holmesra, így azon töri a fejét, mit tegyen? Kiszállhat az egyetlen közbeeső állomáson, Canterburyben, és ha Moriarty továbbmegy, akkor elkerülik egymást, ha viszont szintén kiszáll, akkor Holmes bajba kerül.

Holmes tehát egy szó szerint életbevágóan fontos problémára keresi a *legjobb* megoldást. Kivételes képességei vannak, viszont pontosan emiatt tudja, Moriarty hasonló intelligenciával rendelkezik és várhatóan képes ugyanazt a gondolatmenetet megtalálni, amellyel ő választja ki a megfelelő állomást. Ekkor viszont nem is volt olyan jó az a legjobb megoldás. Hiábavalónak tűnik áttérni a másik megoldásra is, hisz Moriarty is eljuthat erre a következtetésre és szintén válthat.

Ezt a következőképpen önthetjük mátrixjáték formába. Holmes a sorjátékos, a döntése Dover (D-vel jelölt) sor, vagy Canterbury (C-vel jelölt sor). Moriarty oszlopjátékos, ugyanezen stratégiákkal. Nem nyilvánvaló viszont, mik legyenek a kifizetési mátrix elemei. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Holmesnak életben maradni éppen annyit ér, mint Moriartynak holtan látni őt. (Később láthatjuk majd, hogy jóval általánosabb értékek esetén is nagyjából hasonló a helyzet.)

		Moriarty	
		D	C
Holmes	D	-1	1
	C	1	-1

A megoldás a véletlen lehet, már amennyiben elhisszük, hogy még Moriarty sem képes hatékonyan megjósolni, melyik oldalára esik egy feldobott érme. Ha Holmes Dovert és Canterburyt egyaránt $1/2-1/2$ eséllyel választja, akkor Moriarty bármely, ettől független választása esetén nulla lesz a várható kifizetése. Másrészt Moriarty is dobhat érmét, és ezzel elérheti, hogy Holmes kifizetése legfeljebb nulla. Mivel ezek egybeesnek, a $1/2-1/2$ valószínűségű véletlen választásnál jobb stratégia nem is adható. Vegyük észre, hogy ez hasonló gondolatmenet, mint amit a nyeregpontnál alkalmaztunk, csak a stratégiák mások, megengedjük a tiszta stratégiák *keverését*.

8.3. Kevert stratégiák, minimax tétel

Általában tegyük fel, hogy a sorjátékos egy $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vektor segítségével, míg az oszlopjátékos egy $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vektorral választja meg a játékát, azaz a sorjátékos x_i valószínűséggel választja meg az i-edik sort, míg az oszlopjátékos y_j-vel a j-edik oszlopot. Ekkor a sorjátékos várható nyereménye:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = xAy.$$

Természetesen $x_i \geq 0$ és $y_j \geq 0$, ha $i = 1, \ldots, m$ és $j = 1, \ldots, n$, valamint $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ és $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Definíció: Egy vektort *sztochasztikusnak* nevezzünk, ha a komponensei nem negatívak és összegük egy. Egy sztochasztikus vektor által definiált stratégiát (azaz fordulóról fordulóra független választást a komponensek, mint valószínűségek szerint) hívunk *kevert stratégiának*.

Speciálisan a tiszta stratégiák olyan kevert stratégiák, ahol a vektor egyik komponense egy, az összes többi pedig nulla.

Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy egy x kevert stratégiát választva a sorjátékos várható nyereménye legalább $\min_y xAy$, ahol y sztochasztikus vektor. A sorjátékos természetesen egy olyan x^* sztochasztikus vektort igyekszik találni, melyre az előző érték a lehető legnagyobb. Hasonlóan egy y kevert stratégia mellett az oszlopjátékos garantáltan nem veszít többet átlagosan, mint $\max_x xAy$, ahol x sztochasztikus vektor, célja pedig ezen érték minimalizálása. A két érték jelentéséből nyilvánvaló, hogy

$$\min_y xAy \leq \max_x xAy$$

Sokkal meglepőbb, hogy az egyenlőség általában is elérhető, azaz vannak olyan x^*, y^* sztochasztikus vektorok, melyekre

$$\min_y x^*Ay = \max_x xAy^*.$$

Ez az egyenlőség az ún. *minimax tétel.*[1] x^* és y^* rendre a sor és az oszlopjátékos optimális stratégiája, hisz az általuk garantáltnál jobb eredmény nem érhető el. Az állítás formája emlékeztethet bennünket a dualitásra, és valóban, igazából ekvivalensek, bár ez távolról sem nyilvánvaló.

20. Tétel. *(minimax) Minden $m \times n$-es A mátrixra van olyan x^* m-dimenziós sztochasztikus sorvektor és olyan y^* n-dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, melyekre*

$$\min_y x^*Ay = \max_x xAy^*,$$

ahol a minimumot az összes n-dimenziós sztochasztikus oszlopvektoron, míg a maximumot az összes m-dimenziós sztochasztikus sorvektoron vesszük.

Bizonyítás: Az első észrevétel, hogy $\min_y xAy = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$.[2] Ez azt jelenti, hogy a sorjátékos egy x kevert stratégiájára van az oszlopjátékosnak olyan *tiszta* stratégiája, amely optimális számára. Ezt a következőképp láthatjuk be: Legyen $t = \min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$. Ha y tetszőleges m-dimenziós sztochasztikus oszlopvektor, akkor

$$xAy = \sum_{j=1}^n y\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i\right) \geq \sum_{j=1}^n y_j t = t\sum_{j=1}^n y_j = t,$$

így persze a $\min_y xAy \geq t$ is igaz. Másrészt mivel azok az y vektorok, amelyeknek egy komponense egy, a többi nulla, sztochasztikus vektorok is egyben, így

$$\min_y xAy \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

minden $j = 1, 2, \dots, n$ esetén és ez adja az állítás másik irányát. (Hasonlóképp belátható, hogy $\max_x xAy = \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j$.)

A fenti észrevétel nagyban egyszerűsíti a dolgunkat, mert a sorjátékos optimális stratégiájának meghatározásánál csak az oszlopjátékos tiszta stratégiáit kell figyelembe vennünk.

[1] Másképpen $\max_x \min_y xAy = \min_y \max_x xAy$, ahol x, y sztochasztikus vektorok.

[2] Az elő tisztán algebrai bizonyítást a minimax tételre Loomis adta. Az itt közölt bizonyítás Gale, Kuhn és Tucker eredménye, melyben Loomis elgondolásait és az *erős dualitás tételt* ötvözik.

Azaz

$$\begin{array}{rcll} \max\min\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i & & & (j=1,2,\dots,n) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i & = & 1 & (*) \\ x_i & \geq & 0 & (i=1,2,\dots,m) \end{array}$$

A következő fontos lépés annak felismerése, hogy bár ez a probléma nem lineáris programozási feladat, röviden LP, de ekvivalens egy ilyen feladattal.

$$\max \quad z$$

$$\begin{array}{rrcll} z & -\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i & \leq & 0 & (j=1,2,\dots,n) \\ & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i & = & 1 & (**) \\ & x_i & \geq & 0 & (i=1,2,\dots,m) \end{array}$$

Valóban, a $(**)$ probléma bármely $z^*, x_1^*, \dots, x_m^*$ optimális megoldása legalább egy $z - \sum a_{ij}x_i \leq 0$ egyenlőtlenségnek egyenlőséggel tesz eleget, így az LP optimuma $z^* = \min \sum a_{ij}x_j$.

Analóg módon, az oszlopjátékos optimális stratégiáját leíró

$$\begin{array}{rcll} \min\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j & & & (i=1,2,\dots,m) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j & = & 1 & \\ y_j & \geq & 0 & (j=1,2,\dots,n) \end{array}$$

ekvivalens a

$$\min \quad w$$

$$\begin{array}{rrcll} w & -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j & \geq & 0 & (i=1,2,\dots,m) \\ & \sum\limits_{i=1}^{m} y_j & = & 1 & (***) \\ & y_j & \geq & 0 & (j=1,2,\dots,n) \end{array}$$

LP feladattal. Vegyük észre, hogy a $(**)$ és $(***)$ egymás duálisai, és mindkettőnek van lehetséges megoldása. Így az erős dualitási tétel szerint a $(**)$-nak van egy z^*, $x_1^*, \dots, x_m^*$ optimális megoldása, a $(***)$-nak van egy w^*, $y_1^*, \dots, y_n^*$ optimális megoldása úgy, hogy $z^* = w^*$. Mivel $z^* = \min_y x^*Ay$, $w^* = \max_x xAy^*$, a tételt beláttuk. □

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a minimax tétel bizonyítása egyben algoritmust is ad az optimális stratégiák kiszámolására. (Neumann eredeti bizonyítása a Brouwer-fixponttételt használta, így az nem konstruktív.) Borel 3×3-as és 5×5-ös mátrixokra belátta a minimax tételt, de nem tudta túltenni magát azon a paradox jelenségen, hogy a játékosnak *nem* származik előnye abból, ha a kevert stratégiáját titokban tartja. (És persze hátránya sem abból, ha ezt közli.) Valószínűleg ez a tényleg meglepő eredmény gátolta meg abban, hogy bizonyítsa a tételt általánosan is.

A közös $v = z^* = w^*$ érték az A mátrixjáték *értéke*.[3] Az A mátrixjáték *igazságos*, ha $v = 0$, és *szimmetrikus*, ha $a_{ij} = -a_{ij}$.

Vegyük észre, hogy a szimmetrikus játék esetén maga az A mátrix *ferdén szimmetrikus*, azaz $A^T = -A$. Továbbá $a_{i,i} = 0$ minden i-re.

21. Következmény. *Egy ferdén szimmetrikus mátrixjáték igazságos. Ha az x optimális stratégiája a sorjátékosnak, akkor az x^T egy optimális stratégiája az oszlopjátékosnak.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy a játék szimmetrikus. A 20. tétel szerint létezik x^* vektor, amely optimális stratégiája a sorjátékosnak. Válassza az oszlopjátékos az x^* vektor transzponáltját. Ezzel a sorjátékos várható kifizetése

$$x^*Ax^{*T} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_i^*x_j^* = \sum_{i<j} a_{i,j}x_i^*x_j^* + \sum_{i<j} a_{j,i}x_i^*x_j^* = 0,$$

azaz a sorjátékos maximális kifizetése nem lehet nullánál nagyobb. Ha az oszlopjátékos egy optimális y^* stratégiáját vesszük, teljesen hasonlóan adódik, hogy a sorjátékos az y^* transzponáltját használva elérheti, hogy ne fizessen rá a játékra. A 20. tételből tudjuk, hogy a játéknak van valamilyen v értéke. Mivel egyik félnek sem lehet pozitív várható nyereménye, a v csak nulla lehet. □

8.4. A Morra-játék

János és Emil a következők szerint játszik: egy fordulóban elrejtenek egy vagy két forintot, majd tippelnek, mennyit dugott az ellenfél. Ha pontosan egy játékos tippel jól, akkor annyit nyer, amennyit *közösen* elrejtettek. Az összes többi esetben döntetlen lesz, pénzüknél maradnak. Nyilvánvaló, hogy egy-egy játékban mindketten a következő négy stratégia közül választhatnak:

Rejts k-t és tippelj ℓ-et (röviden $[k, \ell]$), ahol $k = 1, 2$ és $\ell = 1, 2$. Ezek János és Emil *tiszta stratégiái*, a hozzájuk tartozó A mátrix pedig:

Emil tiszta stratégiái

		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
	[1,1]	0	2	-3	0
János tiszta	[1,2]	-2	0	0	3
stratégiái	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0

[3] Ha az a_{rs} nyeregpont, akkor a játék értéke $v = a_{rs}$.

Mivel az A mátrixnak nincs nyeregpontja, a 20. tétel bizonyításában használt LP feladatot kell megoldanunk az optimális stratégiák megkereséséhez. Nyilván ez egy szimmetrikus játék, így a 21. következmény alapján joggal várhatjuk, hogy a Morrában János (és persze Emil is) elkerülheti a vereséget. Valóban, a Morrához tartozó LP

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\max & z & & & & & & & & & \\
\\
 & z & & & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \leq 0 \\
 & z & - & 2x_1 & & & & & + & 3x_4 & \leq 0 \\
 & z & + & 3x_1 & & & & & - & 4x_4 & \leq 0 \\
 & z & & & - & 3x_2 & + & 4x_3 & + & & \leq 0 \\
 & & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 1 \\
 & & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

János egy optimális stratégiája az $x^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$, Emilé pedig az x^* vektor transzponáltja, míg a játék v értéke természetesen nulla.

8.5. A módosított Morra

A játékok elmélete (és a matematika) tele van meglepetéssel, és látszólagos ellentmondásokkal. Tegyük fel, hogy János és Emil változtattak egy kicsit a Morra szabályain, mert például nem tudják *egyszerre* deklarálni a tippjeiket, előre leírni pedig nincs kedvük. A józan ész azt súgja, erre nincs is szükség, hisz Emil azzal, hogy a saját tippjét bejelenti, semmit sem mond el arról, ami a kezében van. Természetes hát azt gondolni, hogy a módosított Morra is igazságos.

Alkalmazzuk rá az elméletünket. János az eddigieken kívül négy új tiszta stratégiával rendelkezik: $[k, S]$ és $[k, D]$ k=1, 2, ahol az első koordináta azt mondja meg, hányat rejtsen, a második, hogy ugyanazt (S) vagy ellenkező (D) tippet mondja be, mint Emil. Az új mátrix a következő:

Emil tiszta stratégiái

		[1,1]	[1,2]	[2,1]	[2,2]
János tiszta stratégiái	[1,1]	0	2	-3	0
	[1,2]	-2	0	0	3
	[2,1]	3	0	0	-4
	[2,2]	0	-3	4	0
	[1,S]	0	0	-3	3
	[1,D]	-2	2	0	0
	[2,S]	3	-3	0	0
	[2,D]	0	0	4	-4

Megoldva a hozzátartozó LP-t egy optimális stratégia János számára például az x^*=(0, 56/99,

© Pluhár András, SZTE © www.tankonyvtar.hu

40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99). Emil optimális stratégiája y^*=(28/99, 30/99, 21/99, 20/99)[4]. A játék értéke pedig $z^* = w^* = 4/99$. Azaz a játék határozottan előnyösebb János számára, ami első pillantásra nehezen érthető. Feloldódik a paradoxon, ha arra gondolunk, hogy bár Emil nem ad információt a kezében lévő pénzről, de ad információt az éppen megjátszott stratégiájáról. Így az már nem teljesen ismeretlen János számára, következésképp ő ki is használhatja ezt.

[4] A gyenge dualitás tétel miatt az Olvasó az LP megoldása nélkül is ellenőrizheti az (x^*, y^*) megoldás pár optimalitását.

9. fejezet

Egyszerűsítési lehetőségek

9.1. Dominancia

Egy mátrixjáték vizsgálatát célszerű azzal kezdeni, van-e nyeregpontja a mátrixnak. Ha nincs, akkor is van esély a számítási igény mérsékelésére. A szükségtelen stratégiák elhagyásával csökkenthetjük a játékosok tiszta stratégiáinak számát, míg a játék „lényege” nem változik.

Az A kifizetési mátrix egy r sora *dominálja* az s sort, ha $a_{rj} \geq a_{sj}$ minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Hasonlóan egy r oszlop *dominálja* az s oszlopot, ha $a_{ir} \geq a_{is}$ minden $i = 1, 2, \ldots, m$-re.

22. Tétel. *Egy mátrixjátékra az alábbiak igazak:*

(i) Ha egy r sort dominál egy másik sor, akkor a sorjátékosnak van olyan x^* optimális stratégiája, ahol $x_r^* = 0$. Speciálisan, ha az r sort töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

(ii) Ha egy s oszlop dominál egy másik oszlopot, akkor az oszlopjátékosnak van olyan y^* optimális stratégiája, amelyben $y_s^* = 0$. Speciálisan, ha az s oszlopot töröljük a mátrixból, akkor nem változik a játék értéke.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az r sort dominálja az s sor. (Hasonlóan járhatunk el akkor, ha az s oszlop dominálja az r oszlopot.) A minimax tétel miatt létezik egy x^*, y^* optimális stratégia pár a játékra. Módosítsuk az x^* stratégiát ($\bar{x}$) úgy, hogy $\bar{x_i} := x_i^*$, ha $i \neq$r, s, $\bar{x_r} := 0$ és $\bar{x_s} := x_s^* + x_r^*$. (Mikor a stratégia az r-edik sort játszaná, akkor játszuk helyette az s-ediket.) A dominancia miatt nyilvánvaló, hogy a sorjátékos várható nyereménye nem csökken. □

Példa:

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 7 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_1-ben a 3. oszlop dominálja a 4. oszlopot.

$$A = A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_2-ben a 3. sor dominálja a 2. sort:

$$A = A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -6 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_3-ban az 1. oszlop dominálja a 3. oszlopot:

$$A = A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A_4-ben a 2. sor dominálja a 3. sort:

$$A = A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

A_5-ben a 3. oszlop dominálja a 2. oszlopot:

$$A = A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

További egyszerűsítés már nem lehetséges, marad tehát az eredeti A mátrix 1. és 3. sora, illetve 2. és 4. oszlopa, mint tiszta stratégia. A probléma innen könnyen megoldható, ezt tesszük a következő pontban.

9.2. $2 \times n$-es és $m \times 2$-es mátrixok

Ha a játek mátrixa $2 \times n$-es vagy $m \times 2$-es, akkor a hozzátartozó LP feladat közvetlenül megoldható. Ugyanis például a $2 \times n$-es esetben a sorjátékos kevert stratégiái egyváltozós optimalizálásra vezetnek, egy x kevert stratégiára $x = (\alpha, 1-\alpha)$.

A 20. tétel bizonyításának első pontja szerint elég a

$$\max_{0 \le \alpha \le 1} \min\{a_{1,1}\alpha + a_{2,1}(1-\alpha), a_{1,2}\alpha + a_{2,2}(1-\alpha), \ldots, a_{1,n}\alpha + a_{2,n}(1-\alpha)\}$$

feladatot megoldani. Azaz a célfüggvény csak α-tól függ és a $[0,1]$ intervallumon kell maximalizálni. A célfüggvény itt n darab lineáris függvény *alsó burkolója*. Az optimum lesz a játék v értéke, az α^* optimális helyből pedig az x^* optimális stratégia adódik $x^* = (\alpha^*, 1-\alpha^*)$.

Analóg módon járhatunk el az $m \times 2$ esetben; itt az oszlopjátékos stratégiája $y = (\beta, 1-\beta)$ alakú, a feladat pedig:

$$\min_{0 \le \beta \le 1} \max\{a_{1,1}\beta + a_{1,2}(1-\beta), a_{2,1}\beta + a_{2,2}(1-\beta)\}, \ldots, a_{m,1}\beta + a_{m,2}(1-\beta)\}.$$

A játék érték újfent az optimum, az oszlopjátékos y^* optimális stratégiája a *felső burkoló* β^* minimum helyéből jön, $y^* = (\beta^*, 1-\beta^*)$.

Szerencsés esetben vagy 2×2 mátrixra mindkét játékos optimális stratégiája megkapható, ilyen az előző példa befejezése:

$$\max_{0\le\alpha\le 1}\min\{3\alpha-2(1-\alpha), -6\alpha+4(1-\alpha)\} = \max_{0\le\alpha\le 1}\min\{5\alpha-2, -10\alpha+4\},$$

amiből az optimum hely a két egyenes metszete $\alpha^* = 2/5$, $v = 0$. Az eredeti 4×5 játékra $x^* = (2/5, 0, 3/5, 0)$. Az y^*-hoz optimalizáljunk az felső burkolón

$$\min_{0\le\beta\le 1}\max\{3\beta-6(1-\beta), -2\beta+4(1-\beta)\}\} = \min_{0\le\beta\le 1}\max\{9\beta-6, -6\beta+4\},$$

és így $\beta^* = 2/3$, összeségében pedig $y^* = (0, 2/3, 0, 1/3, 0)^T$.

Megjegyzés. A nyeregpont és a dominancia által adódó egyszerűsítések függetlenek egymástól, elképzelhető, hogy az egyik működik, a másik nem.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Az a_{33}=2 nyilvánvalóan nyeregpont, de nincs a mátrixban sor vagy oszlop dominancia. Ez a lehető legkisebb példa, a 2×2-es esetben a dominancia és a nyeregpont egyszerre jelenik meg.

10. fejezet

Blöff és alullicitálás

Kártyajátékokban gyakran előfordul, hogy a játékosok blöffölnek, holott a lap bemutatása esetén veszítenének. (Hozzátehetjük, nemcsak kártyajátékban van ez így.) Másrészt nem mindig kezdeményeznek licitet (azaz konfrontációt), habár azt biztosan megnyernék. Ezt a viselkedést az emberi intuicióra hivatkozással szokták kezelni, mely úgymond felülemelkedik a hétköznapi logikán. A Kuhn által 1950-ben vizsgált egyszerű játékkal illusztráljuk, hogy ez nem így van, s a pókerjátékos viselkedése tökéletesen racionális.

A játékot 3 lappal (1, 2, 3) játsszák, mindkét játékos egységnyi pénzt tesz be és kap egy lapot. Ezután felváltva licitálnak/fogadnak, emelnek egységnyivel vagy passzolnak. A játék akkor fejeződik be, ha egy emelésre emelés, passzra passz, vagy emelésre passz hangzik el. Az első két esetben megnézik a lapokat, és a nagyobb lapot tartó viszi az összes tétet, amit az ellenfél fogadott. A harmadik esetben a passzoló játékos elveszti a játék elején betett alapját.

Az alábbi öt kimenetel lehetséges ezek alapján (A és B a játékosok, a fogad, illetve passzol a játszámban tett akciók, a végén pedig a nyeremény).

A passzol,	B passzol		1 a magasabb lapot birtoklónak.
A passzol,	B fogad,	A passzol	1 B-nek.
A passzol,	B fogad,	A fogad	2 a magasabb lapot birtoklónak.
A fogad,	B passzol		1 A-nak.
A fogad,	B fogad		2 a magasabb lapot birtoklónak.

A lapok leosztása után A-nak három *lehetősége* van. (Ezek még nem A tiszta stratégiái, azokba be kell foglalni azt is, hogy A ismeri saját lapját.)

1. Passz, és ha B fogad, újra passz

2. Passz, és ha B fogad, fogad

3. Fogad

Egy teljes utasítás készletet, amely A számára egyértelműen megmondja mit tegyen egy $x_1x_2x_3$ hármassal írhatunk le úgy, hogy az x_j lehetőséget játsza, ha a j lapot kapta. Például a 312 szerint A fogad, ha 1 van a kezében, mindig passzol, ha a 2-öt kapta, míg passzol az első fordulóban a 3-ra, a másodikban pedig fogad rá. Ezek a hármasok tehát A tiszta stratégiái. Hasonlóan B-nek négy lehetősége van.

1. Passz, bármit csinál A
2. Ha A passzol, passz; ha A fogad, fogad
3. Ha A passzol, fogad; ha A fogad, passz
4. Fogad, bármit csinál A.

B tiszta stratégiái az $y_1y_2y_3$ hármasokkal írhatók le úgy, hogy az y_j a j lap birtoklásakor játszandó lehetőség. A tiszta stratégia párok kimenetelét annak figyelembe vételével számítjuk ki, hogy a lehetséges hat leosztás egyforma valószínűségű. Például ha *A* a 312, *B* pedig az 124 tiszta stratégiát használja, akkor a hat lehetséges játszma és kimenetel az alábbi:

A kezében	B kezében	játék menete	A nyereménye
1	2	A fogad, B fogad	-2
1	3	A fogad, B fogad	-2
2	1	A passzol, B passzol	+1
2	3	A passzol, B fogad, A passzol	-1
3	1	A passzol, B passzol	+1
3	2	A passzol, B passzol	+1

Így *A* várható nyereménye = 1/6 (-2-2+1-2+1+1) = -1/3. Hasonló módon számítható ki a többi lehetőséget. *A* $3 \times 3 \times 3 = 27$, *B* $4 \times 4 \times 4 = 64$ tiszta stratégiával rendelkezik, ami egy 27×64-es mátrix vizsgálatát írja elő. Ennek közvetlen vizsgálata, bár lehetséges, meglehetősen komplikált lenne. Megpróbálkozunk hát redukcióval, amely jelentősen csökkenti a probléma mértékét, de szolgáltat egy-egy optimális kevert stratégiát, illetve ezeken keresztül a játék értékét is.

Kezdjük azzal, hogy az 1 lapot birtokolva bármely játékos fölöslegesen veszítene egy egységet, ha egy fogadásra fogadással válaszolna, nem pedig passzal. Ugyanígy, ha a 3-as lap van a kezében, értelmetlen lenne egy fogadásra passzal válaszolni, továbbá egy paszt követően nyugodtan fogadhat. Kijelenthetjük tehát, hogy *A*-nak van legalább egy optimális kevert stratégiája, amelyben:

(i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. lehetőséget.

(ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1. lehetőséget.

Ugyanígy *B*-nek van olyan optimális kevert stratégiája, amelyben:

(i) Ha 1 van a kezében, nem játsza a 2. és 4. lehetőséget.

(ii) Ha 3 van a kezében, nem játsza az 1., 2. és 3. lehetőségét.

Úgy képzeljük ezt, hogy a $2x_2x_3$ és az x_1x_21 tiszta stratégiák egyszerűen elérhetetlenek *A* számára, csak úgy, mint *B* számára a $2y_2y_3$, $4y_2y_3$, y_1y_21, y_1y_22 és az y_1y_23 tiszta stratégiák. Elképzelhető, hogy ezzel elveszítjük az optimális stratégiák *egy részét*, de bizonnyal marad legalább egy optimális kevert stratégiája mind A-nak, mind B-nek. Ebből következően a redukált játék értéke megegyezik az eredetivel.

A fenti tiszta stratégiák kiküszöbölése után A-nak 12, B-nek 8 tiszta stratégiája marad. Mi több, további egyszerűsítésre adódik alkalom. Ha A-nak 2 van a kezében, akár passzolhat is az első fordulóban, hisz B tartózkodik a 2. lehetőségtől, ha 1-et birtokol, illetve az 1. és 3. lehetőségtől, ha 3. tart a kezében. Így viszont A második lehetősége pont olyan jó, mint a 3. Eldobhatjuk hát A tiszta stratégiái közül az $x_1 3 x_3$-at. Hasonlóan, ha B a 2 lapot kapta, akkor az 1. lehetősége ugyan olyan jó, mint a 3., és 2. se rosszabb, mint a 4. Ezek alapján B tiszta stratégiái közül elhagyható az $y_1 3 y_3$ és az $y_1 4 y_3$.

Ezek után A-nak már csak 8, B-nek pedig 4 tiszta stratégiája marad, a redukált játék mátrix pedig áttekinthetőbb (s céljainknak megfelel).

	114	124	314	324
112	0	0	$-1/6$	$-1/6$
113	0	$1/6$	$-1/3$	$-1/6$
122	$-1/6$	$-1/6$	$1/6$	$1/6$
123	$-1/6$	0	0	$1/6$
312	$1/6$	$-1/3$	0	$-1/2$
313	$1/6$	$-1/6$	$-1/6$	$-1/2$
322	0	$-1/2$	$1/3$	$-1/6$
323	0	$-1/3$	$1/6$	$-1/6$

Az ebből keletkező LP feladatokat megoldva A számára egy optimális kevert stratégia az (1/3, 0, 0, 1/2, 1/6, 0, 0, 0), B számára a (2/3, 0, 0, 1/3), a játék értéke pedig -1/18. A játék, ahogy sejtettük, nem igazságos. A optimális stratégiáját célszerű egyszerűbb utasításokká alakítani:

(i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 5 : 1 arányban.

(ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 1 : 1 arányban.

(iii) Ha 3 van a kezében, akkor keverje a 2. és 3. lehetőséget 1 : 1 arányban.

Vegyük észre, hogy az instrukció blöffre buzdít (azaz fogadásra az első menetben, mikor a legkisebb lapot - 1-et - kapta A) hat esetből egyszer, és tartózkodásra a tét emelésétől (azaz passzra az első menetben a legnagyobb lap birtoklásakor) az esetek felében. Hasonlóképp fogalmazható B optimális stratégiája:

(i) Ha 1 van a kezében, akkor keverje az 1. és 3. lehetőséget 2 : 1 arányban.

(ii) Ha 2 van a kezében, akkor keverje az 1. és 2. lehetőséget 2 : 1 arányban.

(iii) Ha 3 van a kezében, akkor válassza mindig a 4. lehetőséget.

Ezzel B kis lapot (1, 2) tartva az esetek egyharmadában blöfföl, a licittől viszont nem tartózkodik sohasem.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

11. fejezet

A Yao-elv és alkalmazása

A bonyolultság elmélet legnehezebb problémái az alsó korlátokkal kapcsolatosak, azaz meg kell mondani, hogy egy adott erőforrásból legalább mennyire van szükség egy feladat megoldásánál. Ezt kérdezhetjük a legrosszabb esetben vagy az átlagos esetben, míg a választ többnyire az input méretének[1] függvényében keressük.

További nehézséget jelent, ha *véletlen algoritmusokról* van szó, itt természetesen az átlagos eset vizsgálatnak van értelme. A *Yao-elv* éppen ekkor hasznos, összeköt két, látszólag távoli dolgot: a véletlent használó algoritmusokat és a véletlen inputokat. Sokoldalúan használható technika, ezért is kapta az elv nevet; mi itt két formáját és alkalmazását tekintjük át.

11.1. Az eredeti forma és egy példa alkalmazása

Tekintsünk egy F feladat osztályt fix input mérettel, és egy véges sok véletlen bitet felhasználó algoritmust erre a feladatra. Ha rögzítjük ezeket a véletlen biteket, akkor egy determinisztikus algoritmust kapunk, amit cimkézhetünk ezzel a bitsorozattal. Így a véletlen algoritmus fölfogható egy véletlen eloszlásnak a determinisztikus algoritmusok egy halmazán.

Néhány jelölés: $\mathcal{D}$ determinisztikus algoritmusok egy halmaza F osztályra, $\mathcal{R}$ a véletlen algoritmusok $\mathcal{D}$-ből a fenti módon képzett halmaza. $\mathcal{S}$ az összes lehetséges inputok halmaza, $\mathcal{P}$ az összes eloszlások halmaza $\mathcal{S}$-en, és $f : \mathcal{D} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. Az $f(D,\sigma)$ azt jelenti, mennyi erőforrást igényel a $D \in \mathcal{D}$ determinisztikus algoritmus, ha az $\sigma \in \mathcal{S}$ inputon számol.

Az erőforrásfelhasználás felfogható játékként; a sorjátékos egy σ inputot választ, az oszlopjátékos egy D algoritmust, míg az A mátrix $a_{(\sigma,D)}$ eleme $f(D,\sigma)$.[2] A Yao-elv nagyjából az, ha megadott az inputoknak egy d eloszlása, amelyre minden determinisztikus algoritmus várhatóan legalább K költségű, akkor véletlen algoritmusok várható költsége sem lehet K-nál kisebb a legrosszabb esetben.

[1] A méret alatt az input leírásához szükséges bitek számát értjük.

[2] Ez a mátrix végtelen is lehet, így az alábbi lemma nem egyszerű következménye a minimax tételnek. Továbbá, míg a minimax tételnél az egyenlőség fontos, itt igazából a triviális egyenlőtlenség a lényeg.

23. Lemma (Yao-elv)**.**

$$\sup_{d\in\mathcal{P}}\inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_d[f(R,\sigma_d)]\le\inf_{R\in\mathcal{R}}\sup_{\sigma\in\mathcal{S}}\mathbb{E}_R[f(R,\sigma)]$$

Bizonyítás: Legyen $\sup_{d\in\mathcal{P}}\inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_d[f(R,\sigma_d)]=C$ és tegyük fel, hogy van olyan $R\in\mathcal{R}$, hogy $\sup_{\sigma\in\mathcal{S}}\mathbb{E}_R[f(R,\sigma)]<C$. Ekkor viszont minden $d\in\mathcal{P}$-re áll a $\mathbb{E}_d\left[\mathbb{E}_R[f(R,\sigma)]\right]<C$. Mivel C véges, használhatjuk a Fubini tételt, azaz

$$\mathbb{E}_d\left[\mathbb{E}_R[f(R,\sigma)]\right]=\mathbb{E}_R\left[\mathbb{E}_d[f(R,\sigma)]\right]<C.$$

Ebből adódik, hogy létezik olyan $D\in\mathcal{D}$, melyre $\mathbb{E}_d[f(D,\sigma)]<C$. □

Keressük a pénzt

Adott n számozott doboz és az egyik tartalmaz egy bankjegyet. Ahhoz, hogy lássuk egy doboz tartalmát, ki kell nyitni, és a minimális számú nyitással szeretnénk megtalálni a pénzt. Nem túl meglepő, bár a Yao-elv nélkül nehezen bizonyítható az alábbi állítás:

24. Lemma. *A legjobb véletlen algoritmus várható nyitásszáma* $(n+1)/2$*.*

Bizonyítás: Először egy véletlen algoritmust javaslunk: Dobjunk egy szabályos érmét, és ha fej, akkor nézzük meg a dobozokat $\{1,2,\ldots,n\}$, ha pedig írás, akkor az $\{n,n-1,\ldots,1\}$ sorrendben. A várható nyitásszám $(n+1)/2$, hisz ha a pénz az i-edik dobozban van, akkor egyaránt $1/2$ valószínűséggel i illetve $n-i+1$ lépest teszünk, azaz a kinyitandó dobozok száma átlagosan $(n+1)/2$.

A Yao-elvet használjuk az alsó korláthoz. Helyezzük a bankjegyet véletlen egyenletes eloszlással az n doboz valamelyikébe. Egy determinisztikus algoritmusok közül elég azokat nézni, amelyek nem nyitnak ki kétszer egy dobozt. A szimmetria miatt feltehető, hogy a legjobb algoritmus az $\{1,2,\ldots,n\}$ sorrendben nyitja ki a dobozokat. A várható lépésszám, és egyben a legjobb véletlen algoritmus várható nyitásszámára adódik

$$\inf_{R\in\mathcal{R}}\sup_{\sigma\in\mathcal{S}}\mathbb{E}_R[f(R,\sigma)]\ge\sup_{d\in\mathcal{P}}\inf_{R\in\mathcal{D}}\mathbb{E}_d[f(R,\sigma_d)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\frac{n+1}{2}.$$

□

12. fejezet

Nem zérusösszegű játékok

Az életben előforduló játékoknak csak kis része zérus összegű, a legtöbb esetben nem ez a helyzet. Ezekkel a játékokkal hihetetlenül sokféle problémát modellezhetünk. Sajnos ennek ára van. A zérusösszegű játékok elméletében oly hasznosnak bizonyult kevert stratégiák általában nem adnak jó választ, mi több, már azt sem könnyű megfogalmazni mit értsünk optimális megoldás alatt. Nem áll módunkban az összes koncepció ismertetése, még kevésbé részletes elemzése. Ehelyett vázolunk néhány lényeges ötletet, elsősorban olyanokat, melyek beleillenek az eddigi tárgyalásmódunkba.

A Nash-egyensúly létezése véges játékokban

A bizonyításokban a Brouwer-fixponttételt vagy az általánosabb Kakutani-fixponttételt használják. Mi az egyszerűbb Brouwer-tételt választjuk, annál is inkább mert ez sok szállal kapcsolódik a kombinatorikus játékokhoz.

Definíciók. Egy $G=(N,X,u)$ véges n-személyes (nem-kooperatív) játék az alábbi:

$N=\{1,2,\dots,n\}$, a játékosok halmaza,

$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$, ahol minden k-ra $X_k=\{1,\dots,m_k\}$, azaz egy m_k elemű véges halmaz, az k-adik jétékos tiszta stratégiáinak halmaza,

$u: X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\to R^n$, *kifizető függvény*, amelynek k-adik komponense a k-adik játékos nyereménye egy adott $(i_1,\dots,i_n)\in X$ stratégia n-es mellett.

A mátrixjátékokhoz hasonlóan értelmezhetjük a kevert stratégiákat, az k-adik játékosra ez X_k^*,

$$X_k^*=\{p_k=(p_{k,1},\dots,p_{k,m_k}) : p_{k,i}\geq 0, \text{ minden } i\text{-re, és } \sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i}=1\}.$$

A játékosok egy adott kevert stratégiájára, azaz $p=(p_1,\dots,p_n)$ esetén a k-adik játékos várható kifizetése $g_k(p_1,\dots,p_n)$,

$$g_k(p_1,\dots,p_n)=\sum_{i_1=1}^{m_1}\dots\sum_{i_n=1}^{m_n} p_{1,i_1}\dots p_{n,i_n}u_k(i_1,\dots,i_n).$$

Jelölje továbbá $g_k(p_1,\dots,p_n|i)$ a k-adik játékos várható kifizetését, ha a k-adik játékos a p_k kevert stratégiáról az $i\in X_k$ tiszta stratégiára vált át,

$$g_k(p_1,\dots,p_n|i)=g_k(p_1,\dots,p_{k-1},\delta_i,p_{k+1}\dots,p_n|i),$$

ahol a δ_i az az eloszlás, amely az i-t egy valószínűséggel veszi fel. Vegyük észre, hogy a $g_k(p_1,\ldots,p_n)$ visszanyerhető a $g_k(p_1,\ldots,p_n|i)$-k ismeretében, ugyanis

$$g_k(p_1,\ldots,p_n)=\sum_{i=1}^{m_k} p_{k,i}g_k(p_1,\ldots,p_n|i).$$

Definíció: Egy $(p_1,\ldots,p_n)\in X^*$ kevert stratégia profil *Nash-egyensúly*, ha minden $k=1,\ldots,n$-re és minden $i\in X_k$-ra

$$g_k(p_1,\ldots,p_n|i)\leq g_k(p_1,\ldots,p_n).$$

25. Tétel. *Minden véges n-személyes játéknak van Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás: Minden k-ra X_k^* kompakt és konvex részhalmaza az R^n-nek, ezért a $C=X_1^*\times\cdots\times X_n^*$ is kompakt és konvex része az R^m-nek, ahol $m=\sum_i^n m_i$. Definiáljuk az f függvényt úgy, hogy a $z=(p_1,\ldots,p_n)\in C$-re $f(z)=z'=(p_1',\ldots,p_n')$, ahol

$$p_{k,i}'=\frac{p_{k,i}+\max(0,g_k(p_1,\ldots,p_n|i)-g_k(p_1,\ldots,p_n))}{1+\sum_{j=1}^{m_k}\max(0,g_k(p_1,\ldots,p_n|i)-g_k(p_1,\ldots,p_n))}.$$

Minden $p_{k,i}\geq 0$ és a nevezőt úgy választottuk, hogy $\sum_{j=1}^{m_k}p_{k,i}'=1$, ezért $z'\in C$. Továbbá az f függvény folytonos, hiszen minden $g_k(p_1,\ldots,p_n)$ függvény folytonos. Így használhatjuk a Brouwer-fixponttételt, vagyis van olyan $z'=(q_1,\ldots,q_n)\in C$, amelyre $f(z')=z'$. Ekkor viszont

$$q_{k,i}=\frac{q_{k,i}+\max(0,g_k(z'|i)-g_k(z'))}{1+\sum_{j=1}^{m_k}\max(0,g_k(z'|i)-g_k(z'))}$$

minden $k=1,\ldots,n$ és $i=1,\ldots m_n$-re. Másrészt a $g_k(z')$ az átlaga a $g_k(z'|i)$ számoknak, így $g_k(z'|i)\leq g_k(z')$ legalább egy olyan i-re, amelyre $q_{k,i}>0$. Mivel a z' fixpont, erre az i-re igaz, hogy $\max(0,g_k(z'|i)-g_k(z'))=0$, azaz

$$q_{k,i}=\frac{q_{k,i}}{1+\sum_{j=1}^{m_k}\max(0,g_k(z'|i)-g_k(z'))}.$$

Ez csak úgy lehet, ha $\sum_{j=1}^{m_k}\max(0,g_k(z'|i)-g_k(z'))=0$, azaz $g_k(z'|i)\leq g_k(z')$ minden k-ra és i-re. Ez viszont azt jelenti, hogy $(q_1,\ldots,q_n)$ Nash-egyensúly. $\square$

Megjegyzés: A bizonyításból látható, hogy az egyensúlyi helyzetek megkeresése az f fixpontjainak a megkeresését jelenti. Ez a mátrixjátékok esetén lineáris programozási feladatra vezetett, általában sajnos sokkal nehezebb dolgunk van.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

13. fejezet

Bimátrix-játékok

Ha két játékos van, akkor két $m \times n$-es A és B mátrixszal leírhatók a sor és az oszlopjátékos kifizető függvényei; speciálisan ezt *bimátrix-játéknak* vagy (A,B) játéknak hívjuk. Ezekben jóval többet lehet tudni a Nash-egyensúlyokról, bár algoritmikus szempontból jóval nehezebbek, mint a mátrixjátékok. Az első észrevétel analóg a minimax tétel bizonyításának első lépésével. Az egyszerűség kedvéért legyen $M = \{1,\ldots,m\}$, $N = \{m+1,\ldots,m+n\}$, $b_j x = \sum_{i=1}^m b_{i,j} x_i$ és $a_i y = \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$, azaz a_i (b_j) az A (B) mátrix i-edik (j-edik) sor (oszlop) vektora.

26. Tétel (Nash)**.** *Az (x,y) kevert stratégia pár Nash-egyensúlya az (A,B) játéknak akkor és csak akkor, ha minden $i \in M$ és $j \in N$ esetén*

$$x_i > 0 \Rightarrow a_i y = \max_{k \in M} a_k y \text{ és } y_j > 0 \Rightarrow b_j x = \max_{k \in N} b_k x.$$

Bizonyítás: Ha $x_i > 0$ és van olyan k, amelyre $\sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j > \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j$, akkor rögzített y mellett az x_i csökkentése növeli a sorjátékos kifizetését. A másik állítás hasonlóan látható be. $\square$

A 26. tétel feltétele sajnos nem vezet lineáris programozási feladatra[1], ezért jóval nehezebb egyetlen egyensúlyt is megtalálni, nemhogy az összeset. Ha megelégszünk egy megoldással, akkor használhatjuk az 1964-ben publikált Lemke-Howson-algoritmust. A fő ok persze a megelégedésre a Lemke-Howson-algoritmus központi szerepe; hasonló ötleten alapul Herbert Scarf híres tételének vagy David Gale hex tételének a bizonyítása.

13.1. A Lemke-Howson-algoritmus

Először átfogalmazzuk a 26. tétel feltételét egy cimkézésbe. Jelentse X illetve Y a sor és oszlopjátékosok kevert stratégiáinak halmazait, és minden $i \in M$ és $j \in N$ esetén vegyük az alábbi halmazokat:

$$X(i) = \{x \in X \,|\, x_i = 0\} \text{ és } X(j) = \{x \in X \,|\, b_j x \geq b_k x \; \forall k \in N\},$$

[1] Kvadratikus optimalizálási vagy lineáris komplementaritási feladatként felírható, lásd [12].

$$Y(i) = \{y \in Y \,|\, a_i y \geq a_k y \; \forall k \in M\} \text{ és } Y(j) = \{y \in Y \,|\, y_j = 0\}.$$

Az x vektornak legyen k egy címkéje, ha $x \in X(k)$, és hasonlóan y egy címkéje k, ha $y \in Y(k)$ valamely $k \in M \cup N$.

27. Tétel. *Egy (x,y) kevert stratégia pár Nash-egyensúly az (A,B)-játékban akkor és csak akkor, ha minden $k \in M \cup N$ esetén vagy $x \in X(k)$ vagy $y \in Y(k)$ (vagy mindkettő) teljesül.*

Bizonyítás: Ha az (x,y) Nash-egyensúly, akkor a 26. tétel miatt minden $k \in M \cup N$ vagy x-nek vagy y-nak címkéje, hisz ha például $k \in M$ és $x \notin X(k)$, akkor $x_k > 0$, azaz az $y \in Y(k)$ kell álljon. (A $k \in N$ eset teljesen hasonló.) Másrészt, ha az (x,y) pár *teljesen cimkézett*, akkor az $x_i > 0$ esetén az x nem rendelkezik az i címkével, azaz az y-nak kell. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy $a_i y \geq a_k y$ minden $k \in M$, azaz $a_i y = \max_{k \in M} a_k y$. Az $y_j > 0$ eset ismét hasonlóan bizonyítható. □

Definíció: Egy x vektor *tartója*, $\mathrm{supp}(x) := \{i \mid x_i > 0\}$. Egy bimátrixjáték nem degenerált, ha bármely kevert stratégiára az ellenfél legjobb tiszta stratégiáinak a száma nem haladja meg az adott kevert stratégia tartójának méretét.

Megjegyzés. Belátható, hogy a nem degeneráltság azt jelenti, hogy a teljesen cimkézett pontpárok, azaz a Nash-egyensúlyok, geometriai értelemben vett pontok. Pontosabban ha egy (x,y) ilyen, akkor vannak olyan $K, L \subset M \cup N$, hogy $|K| = m$ és $|L| = n$, az x és az y pedig a címkékből adódó egyenlőtlenségek *egyértelmű* megoldásai. Így ezeknek a poliédereknek a csúcsai között kell lenni a Nash-egyensúlynak, ha az van egyáltalán.[2]

Az algoritmus leírásához a G_1 és G_2 gráfokat használjuk. G_1 pontjai az X halmaz m címkével rendelkező elemei és a $0 \in R^M$, melyet M elemeivel cimkézünk. Két pont közt akkor van él, ha $m-1$ közös címkéjük van. A G_2 gráfot hasonlón definiáljuk; itt a pontok az Y halmaz n címkéjű elemei, a $0 \in R^N$, amely az N elemeivel cimkézett, és él $n-1$ közös címke esetén van két pont között.

Definíció: A G_1 és G_2 gráfok *szorzata* $G_1 \times G_2$ az a gráf, amelynek ponthalmaza $\{(x,y) \mid x \in V(G_1),\ y \in V(G_2)\}$, az $((x,y),(x',y')) \in E(G_1 \times G_2)$ ha $x = x'$ és $(y,y') \in E(G_2)$ vagy $y = y'$ és $(x,x') \in E(G_1)$.

Egy $k \in M \cup N$-re az $(x,y) \in V(G_1 \times G_2)$ *k-majdnem teljesen cimkézett*, ha minden $\ell \in M \cup N \setminus \{k\}$ előfordul vagy x vagy y címkéjeként. A $G_1 \times G_2$ egy éle pedig akkor k-majdnem teljesen cimkézett, ha mindkét végpontjának címkéi csak a k-t nem tartalmazzák.

Minden $(x,y) \in V(G_1 \times G_2)$ egyensúlypont pontosan egy (x',y') k-majdnem teljesen cimkézett ponttal szomszédos. (Ha például k az x címkéje, akkor egy szakasz pontjai elégítik ki a maradék címkék által meghatározott egyenlőtlenségeket. Ennek a szakasznak az egyik végpontja x, a másik az x' lesz, míg $y' = y$. Hasonló a helyzet, ha k az y címkéje.)

Ha egy (x,y) k-majdnem teljesen cimkézett, akkor pontosan két szomszédja van $G_1 \times G_2$-ben, hiszen ha elhagyjuk az x és y közös címkéjét, akkor G_1-ben vagy G_2-ben vehetünk egy-egy szomszédot: a keletkező szakaszok másik végpontjának megfelelő gráfpontot. Azaz, ha a G^k a $G_1 \times G_2$ k-majdnem teljesen cimkézett *élei* által feszített részgráfot jelöli, akkor egy pont G^k-beli fokszáma vagy egy vagy kettő. (A nulla fokú pontok nem részei a feszített részgráfnak.) Ebből közvetlenül jön Lemke és Howson tétele:

[2] A 25. tételtől független bizonyítást adunk a Nash-egyensúly létezésére.

28. Tétel. *Legyen (A,B) egy nem degenerált bimátrix-játék és $k \in M \cup N$. A G^k gráf diszjunkt utakból és körökből áll. Az utak végpontjai az egyensúlyi helyzetek és a $(0,0)$ mesterséges egyensúly. Speciálisan a Nash-egyensúlyok száma páratlan.*

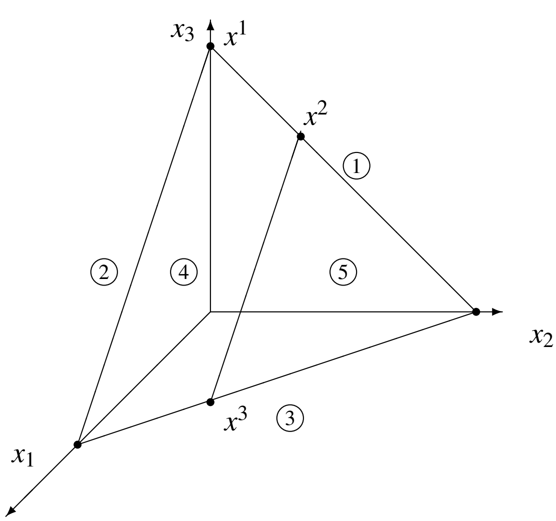
A Lemke-Howson algoritmus a $(0,0)$ pontból indul, kiválasztunk egy $k \in M \cup N$-et és a k-majdnem teljesen cimkézett éleken lépkedünk és az út másik végpontjába érve egyensúlyi ponthoz érkezünk. Megjegyezzük, hogy nem minden egyensúly kapható meg a $(0,0)$-ból, azaz lehet olyan egyensúly, amely minden k-ra másik komponensben van, mint a $(0,0)$. Megmutatható az is, hogy minden $n \in N$-re és páratlan $\ell \in \{1,\dots,2^n-1\}$-re van olyan $n \times n$-es (A,B) játék, amelynek pontosan ℓ számú Nash-egyensúlya van.

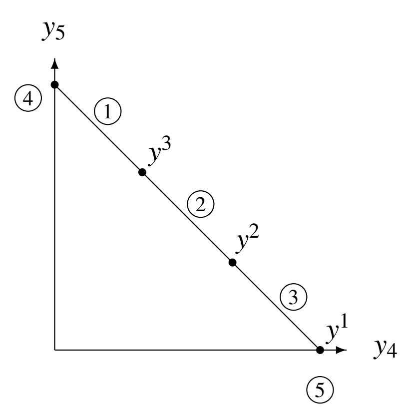
Példa: Az (A,B) bimátrixjátékban

$$(A,B) = \begin{pmatrix} (0,1) & (6,0) \\ (2,0) & (5,2) \\ (3,4) & (3,3) \end{pmatrix}.$$

A metszéspontok koordinátái: $x_1 = (1,0,0)$, $x^1 = (0,0,1)$, $x_2 = (0,1,0)$, $x^2 = (0,1/3,2/3)$, $x^3 = (2/3,1/3,0)$, $y^1 = (1,0)$, $y^2 = (2/3,1/3)$, $y^3 = (1/3,2/3)$, $y_5 = (0,1)$, míg $0_1 = (0,0,0)$ ill. $0_2 = (0,0)$. $V(G_1) = \{0_1, x_1, x^1, x_2, x^2, x^3\}$, $V(G_2) = \{0_2, y^1, y^2, y^3, y_5\}$ és az alábbi k-majdnem teljesen cimkézett utakat kapjuk:[3]

$k=1$: $P_1^1 = (0_1,0_2),(x_1,0_2),(x_1,y^1),(x^1,y^1)$ és $P_1^2 = (x^2,y^2),(x^3,y^2,),(x^3,y^3)$
$k=2$: $P_2^1 = (0_1,0_2),(x_2,0_2),(x_2,y_5),(x^3,y_5),(x^3,y^3)$ és $P_2^2 = (x^1,y^1),(x^2,y^1),(x^2,y^2)$
$k=3$: $P_3^1 = (0_1,0_2),(x^1,0_2),(x^1,y^1)$ és $P_3^2 = (x^2,y^2),(x^2,y^3),(x^3,y^3)$
$k=4$: $P_4^1 = (0_1,0_2),(0_1,y^1),(x^1,y^1)$ és $P_4^2 = (x^2,y^2,(x_2,y^2),(x_2,y^3),(x^3,y^3)$
$k=5$: $P_5^1 = (0_1,0_2),(0_1,y_5),(x_1,y_5),(x_1,y^3),(x^3,y^3)$ és $P_5^2 = (x^1,y^1),(x^1,y^2),(x^2,y^2)$





[3]Az utak jobboldali végpontjai a Nash-egyensúlyok.

13.2. 2×2-es játékok

Ahogyan a zérusösszegű esetben, itt is lehet egyszerűbb megoldást találni. Ez azért hasznos, mert 2×2-es játékokkal tanulságos helyzetek modellezhetőek és további általánosításokat vagy éppen specializációkat támaszthatnak alá.

Az első eszköz a dominanciák tisztázása, amivel tiszta Nash-egyensúlyokat kereshetünk. Az $(x^*, y^*) = ((x, 1-x), (y, 1-y))$ kevert stratégiákhoz felírjuk az f és g kifizetésfüggvényeket, ahol

$$f(x,y) = (x, 1-x)A(y, 1-y)^T \text{ illetve } g(x,y) = (x, 1-x)B(y, 1-y)^T.$$

Az egyensúlyt a $\partial f(x,y)/\partial x = 0$, $\partial g(x,y)/\partial x = 0$ egyenletrendszer megoldása adja. Észrevehető, hogy a Nash-egyensúlyok szerkezete (száma, elhelyezkedése stb.) csak az A és B mátrixok elemeinek nagyságszerinti sorrendjétől függnek, a konkrét értékektől nem. Ennek alapján Rapoport és Guyer megmutatta, hogy 78 lényegesen különböző 2×2 játék létezik. Nem minden játék egyformán érdekes, ha például ha $a_{1,1} > a_{1,2} \geq a_{2,1} > a_{2,2}$ és $b_{1,1} > b_{2,1} \geq b_{1,2} > b_{2,2}$, akkor az egyedüli Nash-egyensúly az $x^* = y^* = (1,0)$, és a játékban sem várható más próbálkozás. Négy játék viszont problémásnak bizonyult, ezek a fogolydilemma, a gyáva nyúl, vezérürü és a nemek harca.[4]

Az alábbakban ezeket mutatjuk be, lehetőleg életszerű helyzetekben ahol a megoldás szavakban értelmezhető és tanulságos.

Fogolydilemma. Ezt a széles körben ismert példát először Tucker írta le. Ez a vádalku lassan nálunk is meghonosodó intézménye által keletkező „játék” egy klasszikus bimátrix-játék. A két elkülönített gyanúsított bevallhat egy bűncselekményt vagy tagadhatja azt. Ha mindketten vallanak, akkor 5 évet kapnak, míg ha csak az egyik, akkor ő elmehet és a társa kap tíz évet. Ha egyik sem vall, akkor csak egy évet érő cselekményt tudnak rájuk bizonyítani.

	vall	tagad
vall	-5, -5	0, -10
tagad	-10, 0	-1, -1

Ebben a „közös optimum” (Pareto-optimum) a tagad-tagad, ami nyilván nem Nash-egyensúlyi helyzet, hisz a vall-vall az egyedüli ilyen.

Megjegyzés. A fogolydilemma többdimenziós általánosításának tekinthető az ún. *közlegelők tragédiája* játék. Ebben n játékos használhatja a közösen tulajdont együttműködő vagy önző módon. Ha k önző játékos van, akkor az együttműködők $(2n-k-2)/n$, az önzők $(2n-k+2)/n$ kifizetést kapnak. A Pareto-optimum az együttműködés $2-2/n$ nyereséggel, viszont bármely esetben az együttműködő játékos növelheti az esedékes kifizetését önzéssel. Így az egyetlen Nash-egyensúly a teljes önzés, $k = n$, ami $1-2/n$-es kifizetést hoz; a játékosok nyereményének az összege minimalizálódik.

Gyáva nyúl. A versengés másik alaptípusa jelenik meg ebben a játékban. Itt két egymással szemben hajtó autós közül az veszít, aki kitér. Viszont ha egyikük sem tér ki, akkor összeütköznek és a veszteség még nagyobb:

[4]Eredetileg *Prisoner's dilemma, Chicken game, Leader game* és *Battle of sexes*.

	kitér	nem tér ki
kitér	0, 0	-1, 2
nem tér ki	2, -1	-10, -10

Itt két tiszta Nash-egyensúly van, $x^* = (0,1)$, $y^* = (1,0)$ és az $x^* = (1,0)$, $y^* = (0,1)$. Az fenti módon definiált függvények

$$f(x,y) = 9x + 12y - 11xy - 10 \text{ és } g(x,y) = 9y + 12x - 11xy - 10.$$

Az $\partial f(x,y)/\partial x = 9 - 11y = 0$, $\partial g(x,y)/\partial y = 9 - 11x = 0$ egyenletrendszer megoldása $x = y = 9/11$, azaz a kevert egyensúly ebben $x^* = (9/11, 2/11)$, $y^* = (9/11, 2/11)$.

Nem világos persze, mit értsünk a kevert stratégián az ilyen esetekben, hogyan valósulhat meg az. Lényegében azonos szerkezetű a következő példa, csak az interpretáció más.

Vezérürü. Egy ajtóban összefut két ember, és szeretnének udvariasnak látszani, azaz előre-engedni a másikat. Ha egyszerre indulnak, az kétségkívül kellemetlen, de a legrosszabb, ha csak várnak egymásra. Számokkal kifejezve például:

	indul	vár
indul	1, 1	2, 3
vár	3, 2	0, 0

Itt két tiszta Nash-egyensúly, és az $x^* = y^* = (1/2, 1/2)$ kevert egyensúly van.

Nemek harca. Ebben a játékban egy házaspár esti programjának a szervezését modellezzük. A férfi jobban szeretne moziba menni, a feleség színházba. Mindkettőjüknek fontos az is, hogy együtt legyenek. Egy lehetséges mátrixpár erre:

feleség

		mozi	színház
férj	mozi	5, 3	2, 2
	színház	0, 0	3, 5

Az $x^* = y^* = (1,0)$ és az $x^* = y^* = (0,1)$ tiszta Nash-egyensúlyok, illetve létezik egy kevert egyensúly is, $x^* = (5/6, 1/6)$, $y^* = (1/6, 5/6)$. A probléma egyrészt a kooperációban rejlik; míg a fogolydilemmában az önzés okozza a Pareto-optimumtól való eltérést, itt éppen az önzetlen viselkedés okozhatja a a legnagyobb bajt. A kevert startégia ezen egy kicsit segít, $13/6$-os várható kifizetéssel.

13.3. Evolúciósan stabil stratégia

Először a gyáva nyúl és a nemek harca játék új alkalmazásait adjuk meg, melyek jóval realisztikusabbak.

Galamb-héja. A modell illetve a játékelmélet evolúciós biológiában való felhasználása John Maynard Smith gondolata. Egy galambfajon belül - találkozás esetén - két egyed között kétféle viselkedés lehetséges: kitérnek egymás elől vagy harcba kezdenek. A kitéréssel esetleg elvesztenek egy erőforrást (pár, élelem, fészkelőhely stb), míg a konfliktus sérüléssel, energia vagy idő pocséklással jár. Ha mindkét galamb kitérne, akkor az egyikük megszerzi az erőforrást, legyen ez egyenlő esélyű. Egy „galamb” azaz békés egyed találkozik egy „héjával” azaz egy harcias egyeddel, akkor a „galamb” kitér, elkerüli a sérülést, de elveszti az erőforrást, ami így a „héja” zsákmánya lesz. Két „héja” találkozása mindkettőre nézve jelentős hátránnyal jár.

Az egyedek vagy egyik, vagy a másik viselkedést követik; kérdés, melyik a jobb? Könnyen látható, akár egyik, akár másik viselkedés válik kizárólagossá, egy olyan egyed, amely ettől a normától eltér jelentős előnybe kerül.

Tehát a cél egy olyan stabil helyzet megtalálása, melyben az egyed számára nincs ok változtatni a viselkedésén. Oldjuk meg ezt egy fiktív kifizetési mátrix esetén.

	galamb	héja
galamb	2, 2	-1, 5
héja	5, -1	-9, -9

Az „galamb-héja” eloszlás x és $1-x$, azaz x valószínűséggel békés egy egyed, $1-x$-szel agresszív. Feltéve, hogy a populáció elég nagy, egy „galamb” várhatóan $2x-1(1-x)=3x-1$, egy „héja” pedig $5x-9(1-x)=14x-9$ nyereséget könyvelhet el. Egyensúly, akkor van, ha $3x_0-1=15x_0-9$, vagyis $x_0=2/3$. Tehát a populáció előre meghatározható arányban mutat békés vagy harcias viselkedést.[5] Nem meglepő, ha csökkentjük az erőforrás értékét illetve az időét, akkor a békés, míg ha a sérülés kockázatát, akkor a harcias viselkedés terjed a populációban. Ezt az aprócska modellt nehéz túlértékelni: meglepően széles a jelenségek köre, melyre képes magyarázatot adni.

Szerkezetében azonos a nemek harcával a *melyik oldalán haladjunk az útnak* játék. Két autó halad egymással szemben és a találkozásnál dönteniük kell, hogy az út jobb vagy bal szélére húzódjanak. A kissé fiktív 1 értéket rendelve a biztonságos továbbhaladáshoz, illetve a -10 értéket az összeütközéshez, az alábbi mátrixot kapjuk:

	Bal	Jobb
Bal	1, 1	-10, -10
Jobb	-10, -10	1, 1

Mind a (Bal, Bal), mind a (Jobb, Jobb) Nash-egyensúlyi helyzet, de ez nem sokat segít rajtunk, ha belekényszerülünk egy ilyen játékba. A társadalmi konvenciókkal szokás koordinálni az efféle szituációkat, és mint tudjuk a konkrét esetre mindkét megoldásra van példa. Így aztán nem is baj, hogy a modellünk megoldása nem egyértelmű. Ha az lenne, akkor már nem az életet írná le, hanem az előítéleteinket. Mi több, létezik egy kevert egyensúly $x^*=(1/2,1/2)$ és $y^*=(1/2,1/2)$. Ez történik a gyalogos forgalomban, vagy egyes állítások szerint az indiai Bangalore-ban.[6]

Felmerül a kérdés, mi egyáltalán a különbség a galamb-héja és a nemek harca játék között? Mindkettőben két-két tiszta és egy kevert Nash-egyensúly van. Az egyensúlyok azonban nagyon nem egyformák. A galamb-héja játékban a kevert egyensúly kis változtatás esetén visszaáll, a másikban viszont az egyik tiszta stratégiába zuhan. A Nash-egyensúly ezen tulajdonságát az *evolúciósan stabil stratégia*, röviden ESS fogalmával ragadhatjuk meg.

[5] A játékok alkalmazása elég nehéz, hisz ritkán ismerjük a pontos kifizetéseket és a játékos racionalitása sem garantálható. Figyelemre méltó, hogy a leginkább racionális viselkedést nem a tudatos gondolkodás, hanem az öröklött tulajdonságok okoznak.

[6] Minden nap reggel véletlenül áll be a forgalom egyik vagy másik oldalra.

Definíció. A x^*, y^* eloszláspár evolúciósan stabil stratégia az (A,B) bimátrix játékban, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy bármely x, y eloszlások esetén,

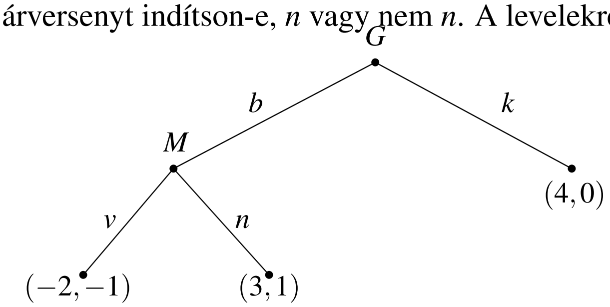
$$xAy^* < x^*Ay^* \text{ és } x^*Ay < x^*Ay^*,$$

ha $||x^* - x|| < \varepsilon$ és $||y^* - y|| < \varepsilon$.

Nyilvánvaló, hogy minden ESS Nash-egyensúly is egyben, így a fogalom az egyensúlyok finomabb osztályozását adja. Az alkalmazásokban pedig azt jelenti, hogy hosszabb távon csak ESS képzelhető el.

13.4. Extenzív faforma, részjáték tökéletes egyensúly

A nem zérusösszegű játékokat kezelhetjük a kombinatorikus játékokhoz hasonlóan, egy fával leíva az időben egymás után következő döntéseket; ez az *extenzív formája* egy játéknak. Tipikus példa a Seltentől származó *áruházlánc játék*. Ebben a piacon lévő multi (M) mellé léphet be egy garázsbolt (G). Időben először G dönt, belép-e, b vagy kimarad, k, majd M, hogy árversenyt indítson-e, n vagy nem n. A levelekre M és G kifizetését írjuk.



Egy extenzív formához mindig van normál forma, jelen esetben az alábbi:

		G	
		belép	kimarad
M	versenyez	-2, -1	4, 0
	nem versenyez	3, 1	4, 0

Két tiszta Nash-egyensúly van $x^* = (0,1)$, $y^* = (1,0)$, $x^* = (1,0)$, $y^* = (0,1)$ míg a keverteknek egy végtelen[7] halmaza $x^* = (1/2, 1/2), y^* = (y, 1-y), 0 \leq y \leq 1$. Ezek az egyensúlyok különbözően interpretálhatóak, és nem egyformán reálisak. M $x^* = (1/2, 1/2)$ stratégiája felfogható, mint egy (nem túl hihető) *fenyegetés*, amellyel megpróbálja G-t elrettenteni a belépéstől. Az $x^* = (1,0)$, $y^* = (0,1)$ csak vágyálom, hisz G kezdi a játékot, és ha egyszer már belépett, akkor egyedül az $x^* = (0,1)$, $y^* = (1,0)$ Nash-egyensúly jöhet létre.

Mivel minden részfához rendelhető normál forma, mindegyikhez tartoznak Nash-egyensúlyok. Egy Nash-egyensúly *részjáték tökéletes Nash-egyensúly*, ha a játék egy tetszőleges részfájához rendelt játékban is Nash-egyensúly.

[7] A degeneráció miatt lehet egynél több.

29. Tétel. *Minden véges fával extenzív formában leírt játéknak van részjáték tökéletes Nash-egyensúlya.*

Bizonyítás: Teljes indukcióval. A gyökérből elérhető részfákban van tökéletes Nash-egyensúly; az éppen lépésen lévő játékos azt az élt választja, amelyik részfában az ottani Nash-egyensúly szerinti kifizetése a legnagyobb. □

Váltakozó ajánlat játékok. Ezek a játékok egy kétszemélyes osztozkodást modelleznek, ahol az egyik játékos x-et, a másik $1-x$-et kap, $0 \leq x, 1-x \leq 1$. Páratlan fordulókban az első, párosokban a második játékos javasol egy x-et. Ha ezt a másik fél pontosan a t-edik fordulóban fogadja el, akkor rendre a $\delta_1^{t-1}x$, $\delta_2^{t-1}(1-x)$ hasznosságuk lesz, ahol a $\delta_1, \delta_1 \in (0,1)$ konstansok. (Az idő múlásával exponenciálisan csökken a hasznosság; ez ösztönöz megegyezésre.) A játék befejeződhet előre rögzített N lépés után: ha egyik fél sem fogadott el ajánlatot, akkor semmit sem kapnak. A másik lehetőség, hogy tetszőlegesen soká játszanak, ekkor viszont a hasznosság nullához tart.

Ha $N=1$, akkor az első játékos ajánlhat $x=1$-et, a másik semmiképpen sem tudja növelni a nyereményét. $N=2$-re a részjáték tökéletes egyensúly $x=\delta_2$, hisz a második játékosnak ezt már nem érdeke elutasítani. Általában ha i tenné meg az utolsó, azaz N-edik, ajánlatot, akkor legalább $\delta_i^{N/2}$-t kellett kapnia, hogy elfogadja az $N-1$-ediket.

Ebből rekurzióval megadható $x_1(N)$, az első játékos kifizetése:

$$x_1(N+2) = 1-(1-x_1(N)\delta_1)\delta_2 = 1-\delta_2+x_1(N)\delta_1\delta_2.$$

Ha $N=2k$, akkor

$$x_1(N) = (1-\delta_2)\sum_{\ell=1}^{N/2-1}(\delta_1\delta_2)^\ell = \frac{(1-\delta_2)(1-(\delta_1\delta_2)^{N/2})}{1-\delta_1\delta_2}.$$

Ha $N \to \infty$, akkor $x_1(\infty) = (1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)$.

Hasonlóan kezelhető a végtelen eset, ha u_1, u_2 monoton növő hasznossági függvényeket is beleveszünk: $\delta_1^{t-1}u_1(x)$, $\delta_2^{t-1}u_2(1-x)$.

A részjáték tökéletes Nash-egyensúly (x^*, y^*)

$$\delta_1 u_1(x^*) = u_1(y^*) \text{ és } \delta_2 u_2(1-y^*) = u_2(1-x^*),$$

attól függően, hogy az első vagy a második játékos teszi az első ajánlatot.[8] Azaz az első játékos x^*-t ajánl, és elfogadja a legalább y^* ajánlatokat. Hasonlóan a második játékos y^*-ot ajánl, és elfogad minden ajánlatot, amely legalább x^*. Ha $\delta_1 = \delta_2$, akkor a játék *szimmetrikus*.

13.5. Korrelált egyensúly

A Nash-egyensúlyt 1974-ben általánosította R. Aumann. Az alapgondolat, hogy az X-en, azaz a lehetséges stratégiák összes kombinációján adunk meg egy z eloszlást. Ezen eloszlás

[8] Belátható, hogy a részjáték tökéletes Nash-egyensúlynál már az első ajánlatnak olyannak kell lennie, ami elfogadható.

szerint választ egy pártatlan megfigyelő egy $x \in X$-et, majd minden játékossal közli, neki melyik stratégiát kell megjátszania, hogy x legyen az eredmény. (Nem mondja meg x-et, az i-edik játékos csak x_i-t tudja meg.) A z eloszlás korrelált egyensúly, röviden KE, ha egyik játékosnak sem éri meg eltérni a megfigyelő javaslatától, feltéve, hogy a többi játékos sem tér el. Az egyszerűség kedvéért bimátrix játékokra formalizáljuk ezt.

Legyen (A,B) egy bimátrixjáték $m \times n$-es mátrixokkal és z egy eloszlás rajtuk, azaz $z_{ij} \geq 0$, ha $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ és $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1$. A sorjátékosnak a megfigyelő az i-edik sort javasolja; ezt játszva $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij}$ lenne a várható kifizetése. Ha ehelyett az ℓ-edik sort választja, akkor a kifizetése $\sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}z_{ij}$. Tehát akkor nem éri meg eltérnie a javaslattól, ha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}z_{ij}$$

minden $1 \leq \ell \leq m$-re.

Hasonlóan, a oszlopjátékos kifizetését nézve

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}z_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m} a_{i\ell}z_{ij}$$

minden $1 \leq \ell \leq n$-re.
Ha (x,y) egy Nash-egyensúly, akkor a $z = x^T y^T$ $m \times n$-es mátrix egy korrelált egyensúly. Továbbá a fenti feltételek szerint a korrelált egyensúlyok halmaza egy konvex poliéder. Így egyrészt korrelált egyensúlyok konvex kombinációja KE, másrészt lineáris programozással könnyen adható megoldás, sőt, egy másodlagos célfüggvény is optimalizálható ezek halmazán.

Példa. A galamb-héja játékban az $x^* = y^* = (9/10, 1/10)$ Nash-egyensúly várható kifizetése $81/100 + 2(9/100) - 9(1/100) = 9/10$. Ezzel szemben $z_{11} = z_{22} = 0$, $z_{12} = z_{21} = 1/2$ korrelált egyensúly 1 várható kifizetést ad, azaz előnyösebb.

13.6. Cournot-egyensúly

Szintén kétszemélyes, de nem véges játékkal íta le Cournot a piaci duopólium esetét 1838-ban. Az általa bevezetett fogalom lényegében a Nash-egyensúly, ezért *Cournot-Nash-egyensúlynak* is nevezik.

Cournot-duopólium. Adott két vállalat, amely azonos minőségben ugyanazt a terméket állítja elő. Az első q_1, a második q_2 mennyiséget dob piacra, ahol az ár a $p(q) = 50 - 3(q_1 + q_2)$ *inverz keresleti függvény* szerint alakul. A vállatok darabonkénti önköltsége rendre 2 illetve 3, azaz a maximalizálni kívánt hasznuk

$$f(q_1,q_2) = (p(q_1,q_2) - 2)q_1 \text{ és } g(q) = (p(q_1,q_2) - 3)q_2.$$

A 2×2-es játékokhoz hasonlóan a (q_1^*, q_2^*) egyensúly, ha megoldása a

$$\frac{\partial f(q_1,q_2)}{\partial q_1} = 0 \text{ és } \frac{\partial g(q_1,q_2)}{\partial q_2} = 0$$

egyenletrendszernek. Jelen esetben ez a $q_1 = 49/9$, $q_2 = 46/9$, ami a $p = 55/3$ árat eredményezi, a hasznok pedig rendre $(49)^2/27$ és $(46)^2/27$. Figyelemre méltó, hogy a monopólium vagy kartell, ha az első vállalat technológiáját használja, akkor $q = q_1 = 8$ termelést és $p = 26$ piaci árat hoz, a haszon pedig 192. Azaz kevesebb vásárló jut hozzá a termékhez, és ők is jóval drágábban.

13.7. Aukciók

Az aukció felfogható, mint egy mechanizmus, amely megmutatja egy áru értékét. A legismertebb az *angol aukció*; ebben egy kezdőárról indulva felfelé lehet licitálni. A végén a legtöbbet ajánló vásárló az ajánlatot kifizetve megkapja az árut. Kevésbé ismert a holland aukció, itt egy nagyobb (irreális) kezdőárral kezdenek, de a licit visszafelé folyik, és az elsőként ajánlatot tevő vásárlóé az áru az ajánlatot megfizetve. (Virágot és halat árulnak így, egy visszafelé mozgó mutatójú óra számlapján jelenítve meg az aktuális árat, amelyért elvihető az áru.) A harmadik ismert az Vickrey-aukció; ezt először bélyeg adásvételre használták, majd koncessziók beárazására, illetve a Yahoo! és a Google a hirdetések helyét versenyezteti így. Ebben a potenciális vevők zárt borítékban adják le az ajánlatukat, a legnagyobb ajánlat tevője kapja meg az árut, de a második legnagyobb ajánlat összegét kell megfizetnie. Szokásos egy negyedik forma, itt szintén zárt borítékos megoldás van, de most a győztes a saját ajánlatát fizeti meg.

Ezzel a Vickrey-aukció az angol, míg a negyedik típus a holland aukcióval ekvivalens. Bár nem a leggyakoribb, játékelméleti szempontból a Vickrey-aukció igen elegáns, hisz az őszinteség a legjobb stratégia.

Tegyük fel, hogy n résztvevője van az aukciónak, és legyen v_i az áru értéke az i-edik játékos számára míg b_i az érte adott ajánlata, $1 \leq i \leq n$. Az i-edik játékos kifizetése

$$f_i(b_i) = \begin{cases} v_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{ha } b_i > \max_{j \neq i} b_j \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

30. Tétel. *A Vickrey-aukcióban a v_i ajánlat, $i = 1, \ldots, n$-re Nash-egyensúly.*

Bizonyítás: Tegyük fel először, hogy $b_i > v_i$. Ha $\max_{j \neq i} b_j < v_i$, akkor az i-edik játékos a v_i ajánlattal sem járt volna rosszabbul. Ha $\max_{j \neq i} b_j > b_i$, akkor az i-edik játékos elveszti a licitet és a kifizetése nulla lesz, csakúgy, mintha v_i lett volna az ajánlata. Ha $v_i < \max_{j \neq i} b_i < b_i$, akkor az i-edik játékos kifizetése maximum nulla lehet, amit a v_i ajánlattal el is érhet.

A másik lehetséges eset, hogy $b_i < v_i$. Ha $\max_{j \neq i} b_i > v_i$, akkor az i-edik játékos a b_i és v_i ajánlattal egyaránt elveszti a licitet és a kifizetése nulla lesz. Ha $\max_{j \neq i} b_i < b_i$, akkor a az i-edik játékos megnyeri az árut, de ugyanakkora kifizetést érhet el a v_i ajánlattal is. Végül, ha $b_i < \max_{j \neq i} b_i < v_i$, akkor a v_i ajánlat $v_i - \max_{j \neq i} b_i > 0$ kifizetést ad, míg a b_i nullát. □

14. fejezet

Kooperatív játékok

Az n-személyes játékok vizsgálatát Neumann János és Oskar Morgenstern kezdte el. Nem valamiféle „három személyes sakk”, vagy a futball leírása a cél, hanem a racionális osztozkodás törvényeinek tanulmányozása abban az esetben, mikor a játékosok egy tetszőleges csoportjának „ereje” ismert.

Definíció: Egy n-személyes átruházható hasznosságú kooperatív játék alatt a következő rendszert értjük:

Adott az $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, a *játékosok halmaza*. Egy $S \subseteq N$ halmazt *koalíciónak* nevezzük, és adott egy $v : 2^N \to \mathbb{R}$ (a koalíciókhoz egy valós számot rendelő) ún. *karakterisztikus függvény* úgy, hogy $v(\emptyset) = 0$. Röviden a jele: (N, v).

Régebben megkövetelték a v függvény *szuperadditívitását*, azaz a $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, ha $S, T \subseteq N$ és $S \cap T = \emptyset$ egyenlőtlenséget. A $v(S)$ jelenti szemléletesen azt a hasznot (kifizetést, hatalmat stb.), amit az S-ben lévő játékosok egymással összefogva együttesen elérhetnek (akár a többiek ellenére is). A $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ az $S \cap T = \emptyset$ esetén azt fejezi ki, hogy a két csoport összefogva legalább annyit elér, mint a külön szerzett haszon összege.[1]

Példa 1. *Ingatlan fejlesztés (két vásárlós piac)*

Egy földműves által birtokolt föld mezőgazdasági értéke 100 ezer dollár. Két vevő pályázik rá, az egyik lakásépítéssel 200 ezer, a másik bevásárló központ létrehozásával 300 ezer dollár hasznot érhet el a föld felhasználásával. Vegyük észre, hogy míg a földműves egymagában is képes hasznát venni a földjének, addig az építők nem. Ez a következő 3-személyes játéknak felel meg:

$N = \{1, 2, 3\}$, ahol 1: földműves, 2, 3 pedig a két vevőjelölt rendre 200000 és 300000 fejlesztési haszonnal.

v(∅) = 0	v({1,2}) = 200000
v({1}) = 100000	v({1,3}) = 300000
v({2}) = 0	v({2,3}) = 0
v({3}) = 0	v({1,2,3}) = 300000

[1] Az összefogással ezt el is tudják érni, hisz megtehetnék, hogy külön-külön játszanak $v(S)$ illetve $v(T)$ nyereményt szerezve, majd utánna egyesítenék a nyereményüket.

Általában az érték a különböző tulajdonosok felhasználásában a, b és c, ahol $a < b < c$.

Példa 2. *A többségi (szavazási) játékok*
Ez a klasszikus 50%+1 szavazattal megvalósuló döntéseket modellezi. Egy S koalíció nyerő, ha megvan az ereje (támogatottsága) egy döntés keresztülviteléhez.

$N = \{1, \ldots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{esetén „S nyer”} \\ 0 & \text{esetén „S veszít”} \end{cases}$$

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| > n/2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Példa 3. *A súlyozott többségi (szavazási) játékok*
Az i-edik játékosnak w_i szavazata van és q szavazat kell a győzelemhez. $N = \{1, \ldots, n\}$

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \sum\limits_{i \in S} w_i \geq q \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

Jelöljük ezt a játékot a rövidebb $(q; w_1, w_2, \ldots, w_n)$ formával. Vegyük észre, hogy például a (3; 2, 2, 2, 2) játékban a v függvény *nem* szuperadditív.

Definíció: Egy n-személyes játék *egyszerű*, ha a v karakterisztikus függvény csak 0 és 1 értéket vesz fel.

Példa 4. *Az ENSZ Biztonsági Tanács működése.*
A BT-nek 5 állandó és 10 ideiglenes tagja van. Egy határozat életbe lép, ha mind az öt állandó és legalább négy ideiglenes tag megszavazza. Ez felírható, mint (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1, 1,1,1,1,1) súlyozott többségi játék.

Imputációk (elosztások)

Az n-személyes játékokban a játékosoknak jutó *ésszerű* kifizetéseket akarjuk meghatározni. Egy kifizetést egy $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-dimenziós valós vektorral írhatunk le, ahol x_i az i-edik játékos része. Aesophus meséjével ellentétben feltesszük, hogy az osztozkodást csak a v karakterisztikus függvény befolyásolja, valamint a játékosok tisztában vannak az érdekeikkel és megvédik azokat.[2] Szóba jön az alábbi két szempont:

1. $x_i \geq v(\{i\})$, $i = 1, \ldots, n$, szóban „egyéni racionalitás”
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, avagy „Pareto-hatékonyság.”

Az 1. pont azt fejezi ki, hogy az egyik játékos sem fogad el olyan kifizetést, amelynél jobbat (koalíciók nélkül) egymaga is képes elérni. A $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq v(N)$ annyit tesz: nem osztható több, mint amennyi van. Az egyenlőség viszont megköveteli, hogy a játékosok által megszerezhető maximális összeget (vagy éppen költséget) osszuk szét.

[2] Valójában ez elég erős és az életben ritkán teljesülő feltétel.

Definíció: Az olyan $x \in \mathbb{R}^n$ vektorokat, amelyekre teljesülnek az 1. és 2. feltételek, **imputációknak (elosztásoknak)** hívjuk, az összes imputáció halmazát pedig $A(v)$-vel jelöljük.

Példa 4. N = {1, 2, 3}, $v(S) = 0$, ha $|S| < 2$, míg $v(S) = |S|/3$ különben.
Ekkor az imputációk halmaza

$$A(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}.$$

Az imputációk $A(v)$ halmaza „túl nagy”, így általában nem tekinthető megoldásnak. Különböző, többé-kevésbé ésszerű feltételekkel szokás szűkíteni az $A(v)$-t, és a kapott részhalmazt deklarálni a létrejöhető megoldások halmazának. A sokféle megközelítés számos vitára adott alkalmat és a mai napig sem lehet egyértelmű győztest hirdetni. Mi három koncepciót fogunk vázolni, a *mag (core)*, a *stabil halmaz* és a *Shapley-érték* fogalmát.[3] Ezek mindegyike nagyon tanulságos.

Definíció: Ha $x, y \in A(v)$, akkor egy $\emptyset \neq S \subseteq N$ *hatékonyan preferálja* x-et y-nal szemben, ha $x_i > y_i$ minden $i \in S$ esetén és $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Jelben $x \succ_S y$. Továbbá *y dominálja* x-et, ha van olyan $\emptyset \neq S \subset N$, amelyre $x \succ_S y$.

Az elnevezés és a motiváció nyilvánvaló. Az $x_i > y_i \;\; i \in S$ miatt az S-beli játékosok jobban kedvelik x-et, mint y-t. A $\sum_{i \in S} \leq v(S)$ a hatékonyság (elérhetőség), ugyanis az S koalíció kikényszerítheti az y elvetését és a számára előnyösebb $x_i \;\; (i \in S)$ kifizetést garantálhatja tagjainak.

Példa 5. Vegyük a 4. példában szereplő játékot és az $x = (1/3, 5/12, 1/4)$, $y = (1/2, 1/3, 1/6)$ és $z = (9/24, 1/3, 7/24)$ vektorokat. Látható, hogy $x, y, z \in A(v)$, továbbá $x \succ_{\{2,3\}} y$ ($x_2 = 5/12 > 1/3 = y_2$, $x_3 = 1/4 > 1/6 = y_3$, és $x_2 + x_3 = 5/12 + 1/4 \leq v(\{2,3\}) = 2/3$). Hasonlóan belátható a $z \succ_{\{1,3\}} x$ reláció; ugyanakkor nincs olyan $\emptyset \neq S \subseteq \{1,2,3\}$, amelyre $z \succ_S y$. (Egy *rögzített* S-re a „$\succ_S$” reláció tranzitív. Ezzel szemben ha úgy definiálunk egy „$\succ$” relációt, hogy $x \succ y$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\emptyset \neq S \subseteq N$, melyre $x \succ_S y$, akkor ez a „$\succ$” reláció *nem tranzitív*.)

Definíció: Egy n-személyes játék $C(v)$ *magja* azon x imputációkból áll, amelyeket egyetlen y imputáció sem dominál.

Példa 6. Vegyük a (7; 8, 1, 1) súlyozott többségi játékot. Itt $v(S) = 1$, ha $1 \in S$ és $v(S) = 0$, ha $1 \notin S$. Ezért $A(v) = \{x : x_1 \geq 1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1\} = \{(1,0,0)\}$, azaz $|A(v)| = 1$. Mivel egy imputáció van csak, $A(v) = C(v)$, és így $C(v) = \{(1,0,0)\}$. Mint várható volt, az 1 „viszi az egészet.”

[3]Nem időrendben haladunk, a mag fogalma (Gillies) 1959-ből, a stabil halmazé (Neumann és Morgenstern) 1944-ből, míg a Shapley-érték (Shapley) 1953-ból ered.

15. fejezet

n-személyes játékok, a mag kiszámítása

Egy v karakterisztikus függvényű játék $C(v)$ magjában lévő vektorok joggal tekinthetőek ésszerű megoldásoknak. Ezzel azonban nem értünk a problémák végére.

Példa 1. Számoljuk ki a $(2;1,1,1)$ súlyozott többségű játék magját. Tegyük fel, hogy $y \in A(v)$. Ekkor valamely $1 \leq i < j \leq 3$ esetén $y_i + y_j < 1$, hisz $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. Megmutatjuk, hogy van olyan $z \in A(v)$ és $\emptyset \neq S \subseteq \{1,2,3\}$, amelyre $z \succ_S y$. Az indexek cseréjével feltehetjük, hogy $y_1 + y_2 < 1$, s mintegy a „maradékot” (y_3-at) szétosztjuk az első és második játékos között: $z_1 := y_1 + y_3/2$, $z_2 := y_2 + y_3/2$. Így persze $z \succ_{\{1,2\}} y$. Másszóval *bármely* $y \in A(v)$-re létezik olyan $z \in A(v)$ és nem üres $S \subseteq \{1,2,3\}$ halmaz, hogy $z \succ_S y$. Ez persze azt jelenti, hogy a mag az üres halmaz, vagyis nem tudunk jó megoldást javasolni.

Szükségünk van tehát a mag szerkezetének jobb megértésére a kényelmesebb kiszámítás érdekében, másrészt tennünk kell valamit, ha a mag üres. Az első probléma könnyen megoldható: a mag leírható, mint konvex poliéder.

31. Tétel. *Ha egy (N,v) játék v karakterisztikus függvénye szuperadditív, akkor az x imputáció eleme a magnak akkor és csak akkor, ha minden S koalícióra a $\sum_{i\in S} x_i \geq v(S)$ egyenlőtlenség teljesül.*

Bizonyítás: Legyen olyan x vektor, amelyre teljesül az összes, a feltételben levő egyenlőtlenség. Tegyük fel, hogy van olyan $y \in A(v)$ és nem üres $S \subset N$, hogy $y \succ_S x$. Ekkor $y_i > x_i$ minden $i \in S$ és $\sum_{i\in S} y_i \leq v(S)$ a hatékony preferencia miatt, amiből a

$$\sum_{i\in S} y_i \leq v(S) \leq \sum_{i\in S} x_i < \sum_{i\in S} y_i$$

ellentmondás adódik.

A másik irány bizonyításához tekintsünk egy, a feltétel valamelyik egyenlőtlenségét megsértő $x \in A(v)$ vektort, és legyen $\emptyset \neq S \subset N$, amelyre sérül; azaz $\sum_{i\in S} x_i < v(S)$. Találni akarunk egy olyan $y \in A(v)$ vektort és $\emptyset \neq T \subset N$ halmazt, amelyre $y \succ_T x$. Az előbbiek miatt $v(S) = \sum_{i\in S} x_i + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Az y-t úgy állítjuk elő, hogy az ε-t „felosztjuk” az S koalíció tagjai között, azaz $y_i := x_i + \varepsilon/|S|$, ha $i \in S$. Kérdés, mi legyen y_i, ha $i \notin S$? Az y vektornak benne kell lennie $A(v)$-ben, így az egyéni racionalitás feltételeit nem sértheti, azaz $y_i \geq v(\{i\})$ minden $i \in N$. Ezek automatikusan teljesülnek, ha $i \in S$, hiszen $x \in A(v)$ és $y_i > x_i \geq v(\{i\})$

ha $i \in S$. Teljesülnie kell továbbá a Pareto-optimalitásnak, vagyis $\sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$. Keressük hát az y_i-ket $i \notin S$-re a következő alakban:

$$y_i = v(\{i\}) + \delta_i,$$

ahol $\delta_i \geq 0$. Ezzel

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i,$$

amiből a $\sum_{i \in S} x_i + \varepsilon = v(S)$ és $\sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$ miatt következik a

$$v(N) = v(S) + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i.$$

Átrendezve a δ_i-kre az alábbi feltétel adódik:

$$\sum_{i \notin S} \delta_i = v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}).$$

Nevezzük a fenti egyenlet jobboldalát δ-nak, és definiáljuk majd a δ_i-ket a $\delta_i := \delta/(n - |S|)$ formulával. Ekkor az y imputáció lesz, amennyiben $\delta \geq 0$. (Valóban, hisz $\sum_{i=1}^{n} y_i = v(N)$ és $y_i \geq v(\{i\})$ $i \in N$-re.) Végül δ nem negativitásának megmutatására használjuk a v függvény szuperadditivitását; $\sum_{i \notin S} v(\{i\}) \leq v(N \setminus S)$. Így

$$\delta = v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}) \geq v(N) - v(S) - v(N \setminus S) \geq v(N) - v(N) = 0,$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségben ($v(N) \geq v(S) + v(N \setminus S)$) ismét a szuperadditivitást használtuk, és ezzel kész vagyunk. $\square$

Példa 2. A tétel segítségével kiszámíthatjuk a korábban ismertetett ingatlan fejlesztés játék magját.

$\mathbf{v}$	$\mathbf{A}(\mathbf{v})$	$\mathbf{C}(\mathbf{v})$
$v(\{1\}) = 100000$	$x_1 \geq 100000$	$A(v)$ elemei, melyekre
$v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$	$x_2 \geq 0$	(iii) $x_1 + x_2 \geq 200000$
$v(\{1,2\}) = 200000$	$x_3 \geq 0$	(i) $x_1 + x_3 \geq 300000$
$v(\{1,3\}) = 300000$	(ii) $\sum_{i=1}^{3} x_i = 300000$	$x_2 + x_3 \geq 0$
$v(\{2,3\}) = 0$		
$v(\{1,2,3\}) = 300000$		

(i) és (ii) $\Rightarrow x_2 = 0$, (iii) $\Rightarrow x_1 \geq 200000$, azaz a mag a következő:

$$C(v) = \{x : 200000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 30000 - x_1\}.$$

A várakozásnak megfelelően a 2. játékos kiszorul az üzletből, és a földet a 3. veszi meg egy 200 és 300 ezer dollár közti összegért. Ennél többet nem tudunk mondani, de ez természetes, hiszen az a valóságban sem dönthető el előre, mi lesz az ár. (Az függhet az alkufolyamattól.)

© Pluhár András, SZTE © www.tankonyvtar.hu

A közgazdasági alkalmazásai miatt érdemes megemlíteni az ún. Bondareva-Shapley-tételt. Ennek kimondásához egy új fogalomra van szükség. Ha adott egy (N,v) játék, akkor koalíciók egy $\mathcal{B} \subset 2^N$ halmaza *kiegyensúlyozott*, ha léteznek olyan $\lambda_S \geq 0$ számok $S \in \mathcal{B}$, hogy minden $i \in N$ esetén $\sum_{S\in\mathcal{B},\, i\in S} \lambda_S = 1$ teljesül. Az (N,v) játék kiegyensúlyozott, ha koalíciók minden $\mathcal{B}$ kiegyensúlyozott halmazára $\sum_{S\in\mathcal{B}} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

32. Tétel. *Az (N,v) játék akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, ha $C(v) \neq \emptyset$.*[1]

[1] A bizonyítás az erős dualitás tétel egyszerű alkalmazása a 31. tétel által adott feltételrendszerre.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

16. fejezet

Stabil halmazok

Amennyiben a játék magja üres, nem tudunk ésszerű megoldást javasolni, és ez is hasznos információ. Elképzelhető más, stabilitást figyelembe vevő szempont alapján történő választás $A(v)$-ből. Ez volt Neumann és Morgenstern eredeti gondolata.

Egy G irányított gráfban egy $S \subseteq V$ ponthalmaz *független* ha az elemei közt nem futnak élek, míg *domináló*, ha minden $x \in V \setminus S$-re van olyan $y \in S$, hogy $(y,x) \in E(G)$. *S mag* vagy *stabil halmaz*, ha egyszerre független és domináló. (Sajnos a magyar terminológia könnyen zavart okozhat, mivel ez a mag az angolban *kernel*, míg az előző tétellel karakterizált mag a *core*.) Egy (N,v) játék imputációinak $A(v)$ halmaza felfogható egy G_v gráfként; $V(G_v) = A(v)$, és $(x,y) \in E(G_v) \Leftrightarrow x \succ y$.

Definíció: Egy $B \subseteq A(v)$ halmaz *stabil halmaz* az (N,v) játékban, ha B mag (kernel, stabil halmaz) a G_v gráfban.

Megjegyzés: A „másik" mag (core) is leírható a G_v gráf segítségével: $C(v)$ azon pontok halmaza $A(v)$-ben, amelyekbe nem fut be él, ha mint G_v-beli pontként tekintjük őket.

Az első pillantásra nem nyilvánvaló, mi értelme van a stabil halmazokat megoldásnak tekinteni. Az egyik motiváció lehet a stabil párosítási probléma, amelynek a megoldásai éppen egy gráf stabil halmazai. Továbbá stabil halmaz létezhet akkor is, ha a mag (core) üres.

Példa 3. A $(2;1,1,1)$ súlyozott többségi játékra láttuk, hogy $C(v) = \emptyset$.

Legyen $B = \{(1/2,1/2,0),(1/2,0,1/2),(0,1/2,1/2)\}$, ekkor B *stabil halmaz.*

B független halmaz: Ha pl. $(1/2,1/2,0) \succ_S (1/2,0,1/2) \Rightarrow S = \{2\}$, de $1/2 \leq v(\{2\}) = 0$ nem teljesül; ellentmondás. A többi eset bizonyítása teljesen hasonló módon történhet.
B domináló halmaz: Legyen $x \in A(v)$, $x = (x_1,x_2,x_3)$. Ha $x_1 > 1/2$, akkor $x_2,x_3 < 1/2$, de ekkor $(0,1/2,1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1,x_2,x_3)$. A szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 \geq \max\{x_2,x_3\}$, így az előző megjegyzés miatt $x_2,x_3 \leq 1/2$. Ha x_2 vagy éppen x_3 1/2, akkor $x \in B$. Ha viszont mindkettő kisebb, mint 1/2, akkor $(0,1/2,1/2) \succ_{\{2,3\}} (x_1,x_2,x_3)$. Hasonló megfontolással adódik, hogy kontinuum sok stabil halmaz van: minden $c \in (0,1/2)$ esetén a $B_c := \{(x_1, 1 - c - x_1, c) : 0 \leq x_1 \leq 1 - c\}$ halmaz stabil.

Példa 4. A 2. példában kiszámoltuk az ingatlanfejlesztés játék magját. Bármely n-személyes játékra, ha B egy stabil halmaz, akkor $C(v) \subseteq B$. Itt egy B stabil halmaz feltétlenül bővebb $C(v)$-nél, hiszen az

$$x = (100000, 100000, 100000) \in A(v)$$

imputációra nem létezik olyan $y \in C(v)$ és $S \subseteq \{1,2,3\}$, amelyre $y \succ_S x$. Megmutatjuk, hogy $B := \{(x_1,x_2,x_3) : 100000 \leq x_1 \leq 300000, x_2 = 0, x_3 = 300000 - x_1\}$ egy stabil halmaz.

B független: Legyen $x, y \in B$ és $x \succ_S y$. Mivel $x_2 = y_2 = 0$, az $x_1 > y_1$, akkor és csak akkor, ha $x_3 < y_3$, illetve $x_3 > y_3 \Rightarrow x_1 < y_1$. Tehát $S = \{1\}$ vagy $S = \{3\}$, ami lehetetlen.
B domináló: Tegyük fel, hogy egy $y \in B$-re $y_2 > 0$. Legyen ekkor $x = (x_1,x_2,x_3) := (y_1 + y_2/2, 0, y_3 + y_2/2)$. Nyilvánvalóan $x \in B$ és $x \succ_{\{1,3\}} y$.

Egy stabil halmaz tehát a mag által sugalltól eltérő megoldásokat is megenged. Jó tulajdonsága, hogy „osztozkodást” írhat elő egy játékban, amelynek üres a magja (lásd 3. példa). Sajnos nem pusztán a nehezen kiszámíthatóságban hasonlít a magra; 1969-ben Lucas bebizonyította, van olyan játék, melynek nincs stabil halmaza. Egy másfajta megközelítést jelent a *Shapley-érték*, amely a játékosok „erejét”, alkupozícióját hivatott modellezni.

17. fejezet

A Shapley-érték

Shapley egy Φ függvényt kívánt definiálni, amely minden (N,v) játékhoz hozzárendel egy $\Phi(v) \in \mathbf{R}^N$ vektort úgy, hogy a $\Phi_i(v)$ érték tükrözze az i-edik játékos hatását. Az eredeti ötlet egy átlagolás volt arra az értéknövekedésre, amit az i-edik játékos egy koalícióba belépése előidéz.

Tekintsük ehhez az N alaphalmaz összes permutációját, illetve egy, az i-edik játékost tartalmazó koalícióra az $S \setminus \{i\}$ és a $N \setminus S$ lehetséges sorrendjeit úgy, hogy a halmazok egymás után következnek. Az értéknövekedés $v(S) - v(S \setminus \{i\})$, amit a fenti szerint átlagolva a Shapley-érték definíciója

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \backslash \{i\}),$$

ahol $\gamma(k) = (k-1)!(n-k)!/n!$.

A játékosok értékelésére használhatunk más függvényeket, sőt, axiomatikus megközelítést is.[1]

Tegyük fel, hogy az alábbi axiómák teljesülnek egy ϕ-re, amely egy tetszőleges (N,v) játékhoz egy $\phi(v) \in \mathbf{R}^N$ vektort rendel:

1. Legyen π az $N =$ halmaz egy permutációja, és $w(S) = v(\pi(S))$ minden $S \subseteq N$-re. Ekkor $\phi_i(w) = \phi_{\pi(i)}(v)$, ha $i \in N$.

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \phi_i(v) = v(N)$.

3. Ha $v(S \backslash \{i\}) = v(S)$ minden $i \in S \subseteq N$-re , akkor $\phi_i(v) = 0$.

4. Additivitás. Ha v és v' karakterisztikus függvények az N halmazon és $w = v + v'$, akkor $\phi(w) = \phi(v) + \phi(v')$.

Megjegyzés: Az első axióma azt fejezi ki, hogy a játékosok ereje független az elnevezésüktől (anonimitás). A második a Pareto-optimalitás, a megszerezhető haszon teljes felosztása.

[1] Az előbbire a Banzhaf-index lehet példa. A axiomatikus módszert a később tárgyalandó *Nash-alkumegoldás* ihlette, csakúgy, mint Arrow tételét. Shubik a Shapley-értéket a szavazási játékok speciális esetére vezette be, így azokat tárgyalva Shapley-Shubik-értékként is említik.

A harmadik szerint nulla az „értéke” annak a játékosnak, akinek lényegében nincs befolyása a játék menetére. Végül a negyedik azt követeli meg, ha két játékot játszanak ugyanazon játékosok, akkor a két játékbeli „értékük" a két játék összegeként kapott játékban kapott „értékük" legyen.

Vegyük észre, hogy a Φ függvény, amely eleget tesz ezeknek a szigorú feltételeknek. Kicsit meglepőbb, hogy ezek az axiómák karakterizálják is a Φ függvényt:

33. Tétel. *(Shapley) Az (N, v) játékok halmazán pontosan egy függvény létezik amely eleget tesz az 1-4 axiómáknak.*

Példa 5. Tekintsük az (51; 49, 48, 3) súlyozott többségi (szavazási) játékot.

$$\Phi_i(v) = \sum_{i\in S\subseteq N} \gamma(|S|)(v(S) - v(S\setminus\{i\}) = \sum_{i\in S,|S|=2} \frac{1}{3!}(1-0) = \frac{1}{6}\cdot 2 = \frac{1}{3},$$

azaz $\Phi(v) = (1/3, 1/3, 1/3)$.

Példa 6. Ingatlanfejlesztés

$$\Phi_1(v) = \frac{2!}{3!}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{3!}[(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + (v(\{1,3\}) - v(\{1\}))]+$$

$$+\frac{2}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) = 216666\frac{2}{3}$$

$$\Phi_2(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) = 16666\frac{2}{3}$$

$$\Phi_3(v) = \frac{1}{3!}[(v(\{1,3\}) - v(\{1\})) + \frac{2}{3!}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})) = 66666\frac{2}{3}$$

Az Olvasó méltán csodálkozhat a $\Phi_2(v) > 0$ értékén, hisz korábban azt láttuk, hogy minden $(x_1, x_2, x_3) \in C(v)$ esetén $x_2 = 0$. A 2. játékosnak ezek szerint nemcsak szerepe, de ereje is van!

Példa 7. ENSZ, Biztonsági Tanács: (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)

Egy nem állandó i tagra azon S minimális koalíciók esetén nem nulla a $v(S) - v(S\setminus\{i\})$, amelyek mind az öt állandó tagot és pontosan három ideiglenes tagot tartalmaznak az i-edik tagon kívül. Ezek száma $\binom{9}{3}$, míg $\gamma(9) = 8!6!/15!$, azaz

$$\Phi_i(v) = \binom{9}{3}\frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 13} \approx 0,001865$$

Az első és második axióma miatt ha j egy állandó tagja a BT-nek, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} = \frac{1 - \frac{8}{7\cdot 11\cdot 13}}{5} \approx 0,1963.$$

Az öt állandó tag birtokolja tehát a döntéshozatal befolyás (erő) több, mint 98%-át, míg az ideiglenes tagok befolyása a 2%-ot sem éri el.

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

A Shapley-tétel következményei

Az egyszerű játékokra (azaz, melyekben a $v(S) = 0$ vagy 1 minden S koalícióra) a Shapley-érték kiszámítása egyszerűsödik.

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \gamma(|S|)(v(S) - v(S \setminus \{i\}),$$

és most, $v(S) - v(S\setminus\{i\}) = 1$ pontosan akkor, ha $v(S) = 1$ és $v(S\setminus\{i\}) = 0$ különben. Legyen $\mathcal{S}_i$ ($i \in S \subseteq N$) az i-t tartalmazó nyerő koalíciók halmaza, melyek az i-t elhagyva már nem nyerők. Így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|).$$

Példa 1. ENSZ Biztonsági Tanács

Mint láttuk a döntéshozatal itt egy (39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) súlyozott többségi játék. Ha i egy nem állandó tag és $S \ni i$ minimális nyerő koalíció, akkor S pontosan 5 állandó és 4 ideiglenes tagból áll. Ezen S halmazok száma $\binom{9}{3}$, így

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(|S|) = \sum_{i \in S \in \mathcal{S}_i} \gamma(9) = \binom{9}{3} \gamma(9) = \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13} \approx 0,001865.$$

A szimmetria miatt, ha j egy állandó tag, akkor

$$\Phi_j(v) = \frac{1 - 10\Phi_i(v)}{5} \approx 0,1963,$$

míg az 5 állandó tag egyesített ereje $\approx$ 0,98153. A példa mutatja, hogy egy súlyozott többségi játékban a játékosok valódi ereje és a szavazataik száma között messze nem lineáris a kapcsolat, illetve a gyengébb játékosok érdekérvényesítő képessége tragikusan kicsi. Elképzelhető viszont, hogy 7 ideiglenes tag összefog és *mindig* együtt szavaz. Ekkor együttes erejük 1/6, csak úgy, mint az állandó tagoké ebben az esetben, míg a kimaradó 3 nem állandó tag ereje nulla! A régi tanács, *divide et impera*, matematikailag is alátámasztható.[2]

Egyszerű játékok esetében elegáns valószínűségi interpretációja adható meg a Shapley-értéknek. Egy π permutációjára N-nek egy i elem *pivotális*, ha az i-t π-ben megelőző elemek által vesztes, de i-t hozzávéve győztes koalíciót alkotnak. Ha egy S nyerő, $S\setminus \{i\}$ vesztő koalíció, akkor S-re nézve $(s-1)!(n-s)!$ számú permutációban lesz i pivotális, ahol $s = |S|$.

34. Tétel. *Egy (N, v) egyszerű játékban a $\Phi_i(v)$ egyenlő annak a valószínűségével, hogy az i pivotális, amennyiben az N bármely permutációját azonos valószínűséggel választjuk.*

Példa 2. Az ausztrál parlamenti rendszer működése

Az ország hat szövetségi államból áll, és a törvényeket ezek képviselői, illetve a szövetségi kormányzat hozza. Az elfogadás feltétele, hogy legalább öt állam, vagy két állam és a szövetségi kormányzat támogassa az adott törvényt. Egy permutációban a szövetségi

[2] Ezért is ideiglenesek a vétójoggal nem rendelkező tagországok, így valószínűtlen az összefogásuk, illetve könnyebben befolyásolhatók.

kormányzat pivotális, ha a harmadik, a negyedik vagy ötödik helyen áll. Ezek egymást kizáró események, valószínűségük $1/7 + 1/7 + 1/7 = 3/7$. Az egyes államok Shapley-értéke egyenlő, $4/7 \cdot 1/6 = 2/21$, ami a szövetségi kormányzat erejének két kilencede.

Felmerül a kérdés, mi a Shapley-érték és az imputációk kapcsolata.

35. Tétel. *Egy szuperadditív (N, v) játékban $\Phi(v) \in A(v)$.*

Bizonyítás: A 2. axióma szerint $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = v(N)$, így a Pareto-optimalitás teljesül. Az egyéni racionalitás $\Phi_i \geq v(\{i\})$ egyenlőtlenségei a következők miatt állnak. Először is a $v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(\{i\})$ a szuperadditivitás miatt. Ezzel

$$\Phi_i(v) \geq \sum_{i \in S \subset N} \gamma(|S|) v(\{i\}) = v(\{i\}) \sum_{i \in S \subset N} \gamma(|S|) = v(\{i\}),$$

hiszen

$$\sum_{i \in S \subset N} \gamma(|S|) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \gamma(|k|) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!(k-1)!(n-k)!}{(n-k)!(k-1)!n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

□

Összefoglalva az eddigieket, egy (N, v) játék elképzelhető megoldásai (kifizetései) az imputációk (elosztások) $A(v)$ halmaza. Mivel $A(v)$-t

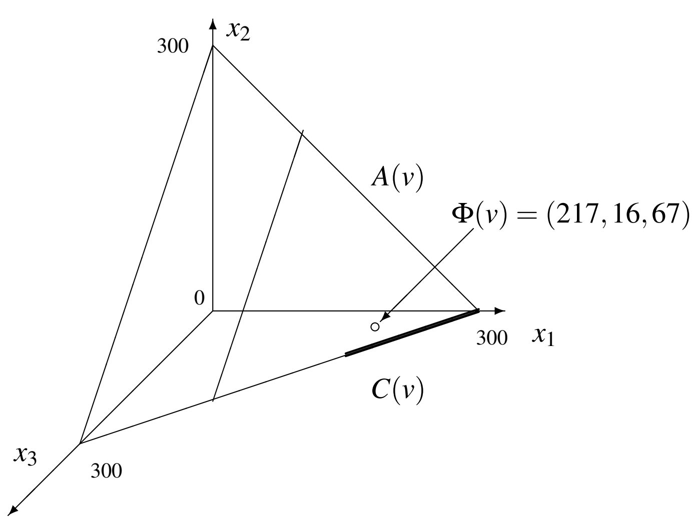
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \text{ egyenlet és az } x_i \geq v(\{i\}) \ (i \in N)$$

egyenlőtlenségek határozzák meg, $A(v)$ egy konvex poliéder. A $C(v)$ meg az $A(v)$-nek része, és szintén poliéder, hiszen

$$C(v) = \{x \in \mathbf{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), S \subseteq N\},$$

míg ha léteznek stabil halmazok, akkor egy stabil B halmazról tudjuk, hogy $C(v) \subseteq B \subseteq A(v)$. Végül szuperadditív játékok esetén a Shapley-érték $\Phi(v)$ vektora szintén $A(v)$-ben van.

Példa 3. Az ingatlanfejlesztés „megoldásai” (a koordinátákat ezer dollárban mérve).



18. fejezet

A Nash-program

Nash már 1950-ben felvetette a kooperatív és nem kooperatív játékok egységes kezelésének gondolatát. A cél, hogy egy adott kooperatív játékhoz alkossunk olyan nem kooperatív játékot, amelynek Nash-egyensúlya az eredeti játék kívánatos megoldása lesz. A fordított irány is fontos; itt az alku lehetőségét vizsgáljuk. Kezdjük ezzel.

18.1. Nash-alkumegoldás

Adott egy $X \subset \mathbb{R}^2$ korlátos konvex zárt halmaz és $d \in \mathbb{R}^2$. X-re úgy tekintünk, mint a kifizetések lehetséges halmazára, amiben megegyezhet a két játékos, míg a d kifizetést (*status quo* vagy *disagreement point*) akkor kapják, ha nem jutnak dűlőre. Ésszerű feltenni, hogy van olyan $x \in X$, hogy $d < x$ és minden $x \in X$-re $d \leq x$.[1] A megegyezést egy $F : (X,d) \to X$ függvénybe kódoljuk, ahol F-re természetes axiómákat teszünk fel:

(i) Invariáns affin transzformációkra

(ii) Pareto-optimális[2]

(iii) Független az irreleváns alternatíváktól

(iv) Szimmetrikus.

Az $S = F(X,d)$ pontot Nash-alkumegoldásnak, röviden NBS-nek (*Nash Bargaining Solution*) nevezzük. Részletezzük az axiómákat.

(i) $\tau_{Ab} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affin transzformáció, azaz $\tau_{Ab}(x) := Ax + b$, ahol

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Így $F(X,d) = S \Rightarrow F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d)) = \tau_{Ab}(S)$.

(ii) szerint csak az X jobb-felső határa lehet megoldás, azaz az olyan $(x_1,x_2) \in X$, amelyre nem létezik $(z_1,z_2) \in X$ úgy, hogy $x_i < z_i$, $i = 1,2$.

A (iii) formálisan $F(X,d) = S$, $Y \subset X$, $S \in Y$ és $d \in Y \Rightarrow F(Y,d) = S$.

A (iv) szerint ha X szimmetrikus az $x_1 = x_2$ egyenesre, akkor S ezen az egyenesen van.

[1] $\mathbb{R}^2$-ben $y < x$ ($y \leq x$) akkor és csak akkor, ha $y_i < x_i$ ($y_i \leq x_i$), $i = 1,2$ esetén.

[2] Jegyezzük meg, hogy ez a fogalom mást takar, mint a Shapley-értéknél használt Pareto-hatákonyság.

36. Lemma. *(Nash) Tegyük fel, hogy az X határához egy S pontban húzott érintő olyan R és T pontokban metszi a d-ben állított vízszintes és függőleges egyeneseket, melyre $S = (R+T)/2$. Ekkor $S = F(X,d)$, azaz NBS.*

Bizonyítás: Legyen $d = (d_1, d_2)$ és S olyan Pareto-optimális pont, amelyre $S = (R+T)/2$, továbbá, ha $T = (t_1, t_2)$ és $R = (r_1, r_2)$

$$A = \begin{pmatrix} (t_1 - d_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (r_2 - d_2)^{-1} \end{pmatrix} \text{ és } b = \begin{pmatrix} -d_1/(t_1 - d_1) \\ -d_2/(r_2 - d_2) \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\tau_{Ab}(d) = (0,0)$, $\tau_{Ab}(R) = (0,1)$, $\tau_{Ab}(T) = (1,0)$ és $\tau_{Ab}(S) = (0.5, 0.5)$. Legyen $Y = \{(x_1,x_2) : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0)\}$, azaz $\tau_{Ab}(X) \subset Y$. Most a $\tau_{Ab}(S) = F(Y,0)$ (iv) miatt és mind a $(0,0)$ és $\tau_{Ab}(S)$ eleme a $\tau_{Ab}(X)$ halmaznak. Így a (iii) axióma szerint $\tau_{Ab}(S) = F(\tau_{Ab}(X), \tau_{Ab}(d))$ és ebből az (i) miatt $S = F(X,d)$. □

Példa: A fogolydilemmára X egy háromszög, melynek csúcsai $(-1,-1)$, $(-10,0)$, $(0,-10)$, $d = (-5,-5)$. $S = (-1,-1)$, azaz a paradoxon eltűnik.

37. Tétel. *(Nash) Az $F(X,d)$ az egyértelmű megoldása a* $\max(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$, *$(x_1, x_2) \in X$ feladatnak.*

Bizonyítás: A d origóba tolásával feltehetjük, hogy $d = (0,0)$ és a célfüggvény $x_1 x_2$. Utánna a megfelelő A mátrixú $\tau_A := \tau_{A(0,0)}$ affin transzformációval elérhető, hogy a feladat egyértelmű[3] S optimum pontja az $(1,1)$ pontba kerüljön. Ha az X halmaz képe az $x_2 = 2 - x_1$ egyenes alatt marad, akkor a 36. lemma miatt az $(1,1) = F(\tau_{Ab}(X), 0)$, így (i) miatt $S = F(X,d)$. Tegyük fel, hogy van olyan $(x'_1, x'_2) \in \tau_{Ab}(X)$, mely a $x_2 = 2 - x_1$ egyenes fölött van, feltehető, hogy $x'_1 < 1$. Ekkor az $m < -1$ meredekségű, az $I = [(1,1),(x'_1,x'_2)]$ szakasz része $\tau_{Ab}(X)$-nek és van olyan $(x^*_1, x^*_2) \in I$, amire $x^*_1 x^*_2 > 1$. Ez viszont ellenmond S optimalitásának, hiszen a τ_A hiperbolát hiperbolába visz és monoton az $x_1 x_2$ szorzatra. □

18.2. Kalai-Smorodinsky-alkumegoldás

A Nash-alkumegoldás egyik gyengesége, hogy a gyakorlatban általában a több lehetőség hasznosabb.[4] Legyen $X_1 = \text{conv}\{(1,0),(0,1),(3/4,3/4)\}$ ill. $X_2 = \text{conv}\{(1,0),(0,1),(1,0.7)\}$, ahol $\text{conv}\{L\}$ az L halmaz konvex burka.

Ekkor $F(X_1,(0,0)) = (3/4,3/4)$, míg $F(X_2,(0,0)) = (0.7,0.7)$, és a második játékos vélhetőleg nehezen érti meg, miért csökken a kifizetése a második játékban?

Kalai és Smorodinsky a (iii) függetlenségi axiómát az (iii)', ún. monotonitási axiómára cseréli. Vezessük be ehhez az $a(X) = (a_1, a_2)$ *utópia pontot*, melyre $a_1(X) = \max\{x_1 : (x_1,x_2) \in X\}$ és $a_2(X) = \max\{x_2 : (x_1,x_2) \in X\}$. Továbbá affin transzformációval minden feladat normált alakra hozható, azaz $d = (0,0)$ és $a(X) = (1,1)$.

(iii)' Ha $X_1 \subset X_2$ és (X_i, d) normált $i = 1,2$-re és $a(X_1) = a(X_2)$, akkor $F(X_1,d) \leq F(X_2,d)$. Az F függvény Kalai-Smorodinsky alku megoldás (KSBS), ha az (i), (ii), (iii)' és (iv) axiómáknak eleget tesz. Jelentse $L(q,r)$ a q és r pontok által meghatározott egyenest.

[3] X konvex, korlátos és zárt.

[4] Bár láttunk rá példát, hogy néha épp ellenkezőleg van ez.

38. Tétel. *Pontosan egy Kalai-Smorodinsky-alkumegoldás van. Ez a megoldás éppen az* $X \cap L(d, a(X))$ *legnagyobb pontja az* $\mathbb{R}^2$*-beli* $<$ *rendezés szerint.*

Bizonyítás: A $X \cap L(d, a(X)) \neq \emptyset$, hisz $d < a(X)$ és vannak olyan $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$, hogy $P_1 = (x_1, a_2(X)) \in X$ és $P_2 = (a_1(X), y_1) \in X$. X konvexitása miatt $L(P_1, P_2) \subset X$ és $|L(P_1, P_2) \cap L(d, a(X))| = 1$. Tehát $X \cap L(d, a(X))$ egy zárt szakasz, amin a $<$ rendezésnek egyértelmű maximuma van.

Ez a maximum pont, $\mu(X, d)$, triviálisan teljesíti az (i), (ii) és (iii)' axiómákat, míg a (iv) azért következik, mert az affin leképzések a definiáló szakaszt szakaszba viszik és megtartják a rendezést.

Az egyértelműséget elég normált feladatokra belátni. Legyen F egy KSBS és $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ és } \exists y \in X, x \leq y\}$. Ekkor $(X_1, 0)$ is normált, $X \subset X_1$ és az (iii)' csak úgy teljesülhet, ha $F(X, 0) = F(X_1, 0)$. Vegyük észre, hogy $(1,0), (0,1) \in X_1$ és legyen $X_2 = \mathrm{conv}\{(1,0), (0,1), \mu(X_1, 0)\}$. Ekkor az $(X_2, 0)$ normált, szimmetrikus és $X_2 \subset X_1$. A monotonitás miatt $\mu(X_1, 0) = F(X, 0) \leq F(X_1, 0)$, de ez csak egyenlőséggel teljesülhet, hisz nincs X_1-nek a $\mu(X_1, 0)$-nál nagyobb pontja. □

Megjegyzés: Más feltételekkel Raiffa korábban (1957) javasolta ezt a megoldást, és Crott 1971-ben kísérleti úton talált rá megerősítést.

18.3. A NBS részjáték tökéletes egyensúlyként

A Nash-program szerint adnunk kell egy nem kooperatív játékot, amelynek a Nash-egyensúlya megfelel az alkumegoldásnak. Ezt a korábban megismert szimmetrikus váltakozó ajánlat játékok egy sorozatával valósíthatjuk meg. Az u_1 és u_2 hasznosságfüggvényeket úgy definiáljuk, hogy az X halmaz Pareto-határának egy paraméterezése legyen az $[0,1]$ intervallum, és az $x \in [0,1]$ esetén adódó határpont $(u_1(x), u_2(1-x)) \in \mathbb{R}^2$.

39. Tétel. *A NBS a szimmetrikus váltakozó ajánlat játékok részjáték tökéletes Nash-egyensúlyainak határértéke, ha* δ *tart az egyhez.*

Bizonyítás: A 37. tételt használjuk, amely alapján az NBS a Nash-szorzat, azaz a $g(x) = (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ függvény maximum helye az X halmazon. Legyen x^*, y^* a váltott ajánlat játék egyensúlya. Ekkor

$$\delta_1^t u_1(x^*) = u_1(y^*) \text{ és } \delta_2^t u_2(y^*) = u_2(x^*).$$

Így

$$g(x^*) = u_1(x^*)u_2(x^*) = u_1(x^*)\delta u_2(y^*) = u_1(y^*)u_2(y^*) = g(y^*).$$

Azaz valamely $c \in \mathbb{R}$ konstansra a $g(x) = c$ hiperbola átmegy mind az x^*, mind az y^* pontokon, pontosabban a Pareto-határ ezekkel paraméterezett pontjain. Ha $\delta \to 1$, akkor $|x^* - y^*| \to 0$, azaz a hiperbola éppen érinteni fogja az X halmazt. Ekkor viszont az $x^* = y^*$ határérték maximalizálja a g függvényt, ami a NBS pontot jelenti. □

19. fejezet

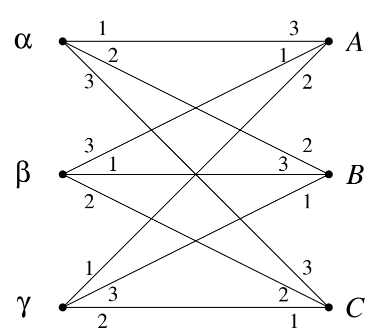
Stabil párosítások

A stabil párosítás vagy stabil házasság probléma kiváló példa mind a gyakorlat és elmélet viszonyának szemléltetésére, mind a mohó algoritmus egy újabb illussztrációjára. A problémakört eredetileg az USA-ban a 40-es évek közepén kulmináló orvos gyakornok hiány, illetve elosztási zavar motiválta. A végzős orvosok ezreit kellett a kórházak által meghirdetett helyekre beosztani; ráadásul mindkét fél (orvos vs. kórház) a saját preferenciáit igyekezett érvényesíteni. Az eredetileg alkalmazott technikák teljesen alkalmatlanná váltak 1947-re, mikoris egy radikálisan új rendszert vezzettek be helyettük. Érdekes módon ennek elméleti vizsgálatát csak 1962-ben tette meg D. Gale és L. S. Shapley, s igazából ők nem tudtak a problémáról: az egyetemi felvételi rendszert illetve a házasságok stabilitását akarták modellezni.[1]

Mi az általuk vizsgált legegyszerűbb modellt ismertetjük, utalva rá, hogy igen sok általánosítás született azóta. A stabil házasság problémában adott n férfi, n nő és mindegyikük valahogyan rangsorolja az ellentétes nem tagjait; ez az illető személy *preferencia listája*. A férfiakat görög, a nőket latin betűkkel jelöljük majd. Így például akkor mondjuk, hogy az α (férfi) *jobban kedveli* vagy *preferálja* A-t B-hez képest, ha α preferencia listáján A előrébb van, mint B. A személyeket és preferenciáikat leírhatjuk (duplán) súlyozott páros gráfokkal, vagy mátrixokkal is az alábbiaknak megfelelően:

Példa:

	A	B	C
α	1, 3	2, 2	3, 1
β	3, 1	1, 3	2, 2
γ	2, 2	3, 1	1, 3



[1] Néhány éve a magyar felsőoktatási felvételi rendszere is hasonló algoritmust használ.

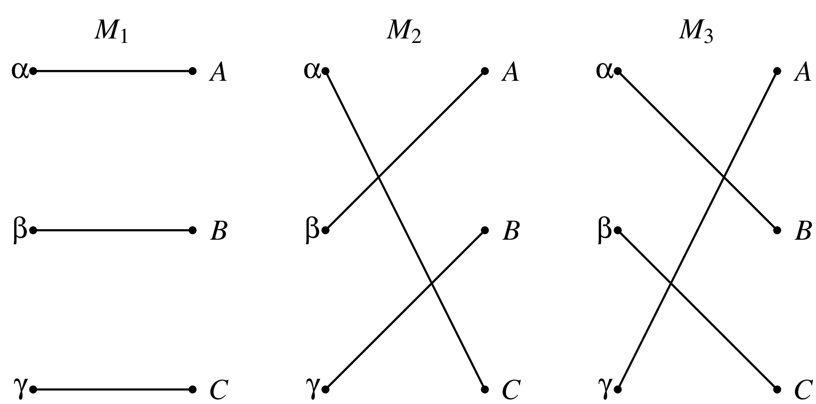
A mátrix egy elemének első koordinátája a megfelelő oszlop által reprezentált nő helyezése a sorhoz tartozó férfi ranglistáján, míg a második koordináta a fordított helyezés.

A feladat egy olyan n-elemű M párosítás megadása, amely, legalábbis valamely értelemben, elképzelhető. Gyakorlati és elméleti megfontolások alapján az alábbi definíció tűnik ésszerűnek:

Definíció: Egy M párosítás *instabil* ha vannak olyan α, β férfiak és A, B nők, hogy $(\alpha, A) \in M$, $(\beta, B) \in M$, de β preferálja A-t B-hez képest, és A preferálja β-t α-hoz képest. Egy M párosítás *stabil*, ha nem instabil.

A definíció motivációja kézenfekvő: feltehető, hogy az instabil esetben β illetve A felbontja pillanatnyi kapcsolatát, és egymással lép kapcsolatra. A célunk egy stabil M párosítás keresése lesz majd, már ha van ilyen egyáltalán. (Megemlítető, hogy korábban Halmos és Vaughan is javasolt modellt optimális házasításra. Ők globális optimumra törekedtek, azaz a gráf éleihez a hasznosságot jelentő számokat rendeltek és a maximális súlyú párosítást keresték. Ez matematikai szempontból nagyon szép és sokat vizsgált probléma, de jelen alkalmazásban nem veszi figyelembe a lokális érdekeket, lehetőségeket.[2] Ezért legfeljebb kikényszeríthető, míg a fenti stabilitás szerint egy M teljes párosítás nem bomlik fel, ha magára hagyjuk a rendszert.)

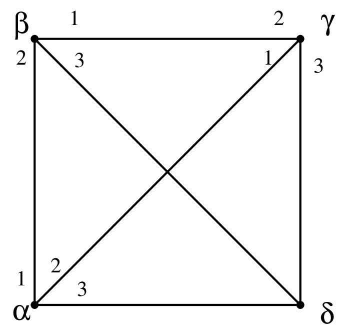
Kérdés persze, van-e egyáltalán megoldás? A fenti példában három megoldás van: $M_1 = \{(\alpha, A), (\beta, B), (\gamma, C)\}$, $M_2 = \{(\alpha, C), (\beta, A), (\gamma, B)\}$ és $M_3 = \{(\alpha, B), (\beta, C), (\gamma, A)\}$.



Példa: A stabil házasság mintájára definiálhatjuk az ún. *szobatárs* problémát. Itt adott $2n$ ember, akiket kétszemélyes szobákba kell telepíteni és az előzőekhez hasonlóan preferenciákkal rendelkeznek. Nyilvánvaló, ha adott négy személy $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ úgy, hogy α, β és γ preferencia listáján δ az utolsó, α-én β, β-én γ és γ-én α az első, akkor *nincs* stabil párosítás.

[2] További nehézség, amely a mindenféle alkalmazásban előjön, hogy honnan vegyük a számokat? Összehasonlítani könnyebb két állást vagy jelöltet, mint számszerűen kiértékelni.

© *Pluhár András, SZTE* © www.tankonyvtar.hu



A példa fényében kellemes meglepetés az alábbi tétel.

40. Tétel. **(Gale-Shapley)** *A stabil házasság problémának mindig van megoldása.*

Bizonyítás: Valójában egy nagyon hatékony, mohó típusú algoritmust adunk, melynek végeredménye bizonyosan stabil párosítás. Tradícionálisan, hisz ez igencsak tradícionális eljárás, a megfelelő köznapi kifejezéseket használjuk a leírás során.

A eljárás első lépésében minden férfi ajánlatot tesz a kedvencének. Minden nő a legjobb ajánlatot fogadja el, de ez csak annyit jelent, hogy „várakozó listára” helyezi a kérőt. A második lépésben az elutasított kérők újra ajánlatot tesznek, ezúttal a preferencia listájukon 2. helyezett hölgynek. A nők ismét a pillanatnyilag legjobb ajánlatot fogadják el; esetlegesen lecserélve a várakozó listán lévő kérőt. Hasonlóan folytatódik ez a későbbiekben is: egy elutasított (vagy egy várakozó listáról lekerült) férfi a soron következő jelölttel próbálkozik, míg a nők a lehető legjobb jelöltet tartják meg.

Legkésőbb $n^2 - 2n + 2$ lépés elteltével minden hölgy kap legalább egy kérőt, így a várakozó listáján is lesz majd valaki. (Ugyanis ha egy lépésben van olyan nő, aki nem kapott még ajánlatot, akkor lennie kell elutasításnak is ebben a lépésben, illetve egy férfi csak egyszer tesz ajánlatot egy nőnek.)

Mikor minden nő kapott ajánlatot, akkor véget vetünk az eljárásnak, és a pillanatnyi párokat véglegesnek kiáltjuk ki. Megmutatjuk, hogy az így kapott M párosítás stabil. Tegyük fel, hogy van olyan α és A, melyre $(\alpha, A) \notin M$, de α preferálja a párjához képest. Ekkor viszont α valamikor ajánlatot tett A-nak és A elutasította őt, azaz a várakozó listáján α-nál „jobb” személy volt, s ha cserélődött is azóta, csak még jobb lehet később. Így A a párját jobban kedveli, mint α-t, azaz nincs instabilitás. $\square$

Példa:

	A	B	C	D
α	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
β	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
γ	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
δ	4, 1	2, 2	3, 0	1, 4

Az algoritmus végrehajtását egy táblázaton követhetjük. Egy cella baloldali eleme az adott lépésben a sor által kódolt személytől ajánlatot kapó, a jobboldali elem pedig a sor ajánlatát elfogadott személy.

	1. lépés	2. lépés	3. lépés	4. lépés	5. lépés	6. lépés
α	A,A	$\emptyset,A$	$\emptyset,A$	$\emptyset,\emptyset$	$B,\emptyset$	C,C
β	$A,\emptyset$	D,D	$\emptyset,D$	$\emptyset,D$	$\emptyset,D$	$\emptyset,D$
γ	B,B	$\emptyset,B$	$\emptyset,\emptyset$	A,A	$\emptyset,A$	$\emptyset,A$
δ	D,D	$\emptyset,\emptyset$	B,B	$\emptyset,B$	$\emptyset,B$	$\emptyset,B$

A követhetőség kedvéért felvettük a férfiak preferencia listáit, ahol felülvonással jeleztük, ha már történt ajánlat:
$\alpha(\bar{A},\bar{B},\bar{C},D)$
$\beta(\bar{A},\bar{D},C,B)$
$\gamma(\bar{B},\bar{A},C,D)$
$\delta(\bar{D},\bar{B},C,A)$
A megoldást az utolsó oszlop jobboldaláról olvashatjuk le:

$$M = \{(\alpha,C),(\beta,D),(\gamma,A),(\delta,B)\}.$$

Felmerül a kérdés, tudunk-e valami közelebbit mondani a stabil párosítások szerkezetéről, összehasonlíthatók-e stb. Vegyünk két stabil párosítást, M_1-et és M_2-őt. Az M_1 *férfi szempontból* jobb, mint M_2, ha minden férfi legalább olyan jó párt kap M_1-ben, mint M_2-ben; jelölésben $M_1 \geq_F M_2$. Nem lehet bármely két stabil párosítást összehasonlítani, de az összes stabil párosítás, mint azt J. H. Conway megmutatta, ún. *disztributív* vagy más szóval *geometriai hálót* alkot.[3]

Speciálisan van legnagyobb és legkisebb eleme. (Ha a nők szempontjából nézzük, ugyanazt a hálót kapjuk, csak megfordítva. Azaz ami az egyik nemnek a legjobb, a másiknak a legrosszabb.) Ez utóbbit egyszerűen beláthatjuk.

Példa: Az első példában szereplő stabil párosítások az alábbi hálót alkotják:

M_1 Az M_1-ben járnak legjobban a férfiak.

M_3 Az M_3 a férfiaknak jobb, mint M_2 és a nőknek jobb, mint M_1.

M_2 Az M_2-ben járnak legjobban a nők.

Egy A hölgy *lehetséges* az α férfi számára, ha van olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha,A) \in M$.

41. Tétel. *Az előző algoritmus minden férfinek a legjobb lehetséges párt adja, míg minden nőnek a legrosszabbat.*

[3] *L háló*, ha van két kétváltozós művelete, $\vee$ és $\wedge$, és ezek *idempotensek* $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$, *kommutatítvak*, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$, *asszociatívak*, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ és elnyelők, azaz $x \vee (x \wedge y) = x$ és $x \wedge (x \vee y) = x$ minden $x,y,z \in L$ esetén. *Disztributív* a háló, ha teljesül még az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ egyenlőség is.

Bizonyítás: Az első állítást a lépések szerinti indukcióval látjuk be. Tegyük fel, hogy a soron következő lépésig egyetlen férfit sem utasított el olyan nő, aki lehetséges lett volna számára. Tegyük fel továbbá, hogy ebben a lépésben A elutasítja α-t. Azt állítjuk, hogy ekkor A nem lehetséges α számára. Valóban, ha A pillanatnyi párja β, akkor β preferálja A-t az összes nőhöz képest, kivéve akik korábban visszautasították. Ezek azonban, az indukciós feltétel miatt, nem lehetségesek β számára. Ha tehát létezne egy olyan M stabil párosítás, amelyre $(\alpha, A) \in M$, ebben β a párját (nevezzük B-nek) kevésbé kedvelné, mint A-t, hiszen mind A és B lehetséges β számára. Ekkor viszont az (α, A), (β, B) instabilitást okoz, azaz A nem lehetséges α számára, s ezzel beláttuk a tétel első felét.

Legyen M^* az algoritmusunk által adott *férfi optimális* megoldása, M pedig egy tetszőleges stabil párosítás. Belátjuk, hogy bármely A nő esetén az ő M-beli párja nem rosszabb, mint az M^*-beli párja. (Ha különbözik a párja a két párosításban, akkor határozottan jobb az M-beli.) Ha $(\alpha, A) \in M^*$, $(\beta, A) \in M$ és $\alpha \neq \beta$, akkor $(\alpha, B) \in M$ valamely $B \neq A$ hölgyre. A tétel első fele miatt persze α preferálja A-t B-hez képest. Másrészt az M párosítás stabil, így speciálisan az (α, B), (β, A) párok stabilitása az jelenti, hogy A preferálja β-t α-hoz képest; s pont ezt akartuk bizonyítani. $\square$

Megjegyzések: Az algoritmus eredeti felhasználásánál a kórházak tették az ajánlatokat, és azt hangoztatták (természetesen bizonyítás nélkül), hogy ez az orvosok javára válik. Számos tanulság vonható itt le, s ezekből csak az egyik, hogy nem árt meggondolni nyilvánvalónak tűnő (vagy annak beállított) állításokat, mint azt Gale és Shapley tették volt.

A másik, hasonlóan fontos észrevétel a döntési helyzetek illetve stratégiák buktatóira vonatkozik. A modell azt sugallja, „elébe kell menni” az eseményeknek és kishitűség nélkül megpróbálni a legjobbnak tűnő megoldásokat a „sült galambra várás” helyett.

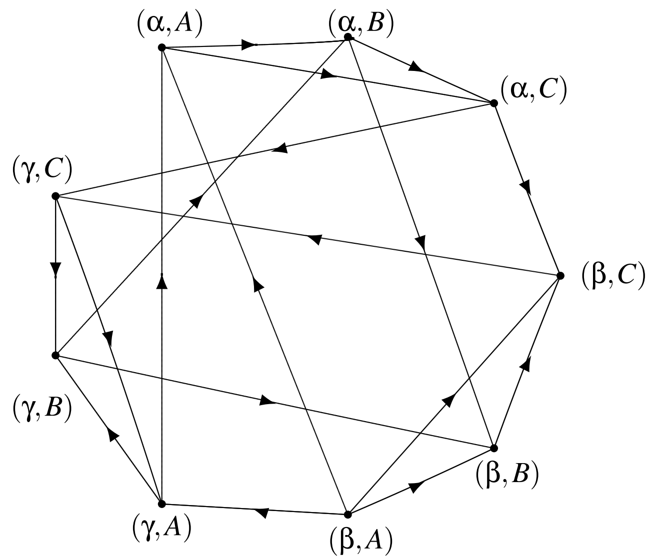
A stabil párosítás mint mag

Korábban definiáltuk egy irányított G gráf magját; ez egy olyan $S \subset V(G)$ halmaz volt, amely független és domináló egyben. Ez a fogalom különösen fontos a játékelméletben, hisz a megoldások stabilitását fogalmazza meg matematikai formában. A stabil párosítás motiválhatja ezt a definíciót, ugyanis egy rögzített probléma stabil párosításai tulajdonképpen magok egy megfelelően alkotott gráfban.

Definiáljuk egy G gráf *vonalgráfját*, $L(G)$-t, a következőképpen: $L(G)$ pontjai G élei lesznek, azaz $V(L(G)) := E(G)$, és $L(G)$ két pontja, e és f, között van él, ha G-ben tekintve az e és f éleknek van közös pontja. Ha G pontjaihoz preferencia listák vannak rendelve, irányítsuk az (e, f) élt $L(G)$-ben úgy, hogy az a preferált pontból indul és a kevésbé kedvelt pontra mutat közös ponthoz tartozó lista szerint.

Állítás: A fenti definíciókkal a G gráf stabil párosításai éppen az $L(G)$ gráf magjainak felelnek meg.

Példa: Az első példa G gráfjához tartozó $L(G)$:



20. fejezet

Csoportok döntéshozatala

Az életben gyakran felmerül, hogy emberek egy csoportjának egy probléma megoldásának különböző alternativáit sorba kell rendeznie.

Példa 1. Egy család autót vásárol, és a kereskedő a következő extrákat ajánlja: blokkolásgátló (ABS), légzsák (L), légkondicionáló (AC) és sztereo rádió (S). Mivel mindet nem engedhetik meg maguknak, mindenki egy fontossági listát állít fel.

férj	feleség	1. gyerek	2. gyerek
ABS	AC	S	AC
AC	L	AC	L
S	S	L	ABS-S
L	ABS	ABS	

A kérdés ezek után: mi legyen a közös sorrend? (Az ABS-S jelöléssel az érzékeltetjük, hogy megengedjük a döntetlent két alternatíva összehasonlításánál.)

Általánosan: Adott egy t elemű I halmaz (az egyének csoportja) és egy A, az alternatívák halmaza. Jelölje P az A sorrendjeinek (döntetlent megengedve) a halmazát, ekkor $P \times \cdots \times P = P^t$ a lehetséges inputok tere, elemei az ún. *profilok*, jelük $(P_1, \ldots, P_t)$. Egy $F : P^t \to P$ függvényt *konszenzus (vagy döntési) függvénynek* (social welfare function) hívunk. A célunk természetesen a valamely szempontból ésszerű konszenzus függvények vizsgálata.

Példa 1. Az egyszerű többség szabálya

Az $a, b \in A$ alternatívákra a csoport a-t b felé helyezi, ha az egyének többsége ezt tette. Sajnos ez a szabály *nem* vezet konszenzus függvényhez, mint azt az alábbi ún. *szavazói* vagy *Condorcet*-paradoxon mutatja.

Legyen $N = \{1, 2, 3\}, A = \{a, b, c\}$.

P_1	P_2	P_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

A szabály szerint a megelőzi b-t, b megelőzi c-t és c megelőzi a-t, ami a rendezés tranzitivitása miatt nem lehetséges.

Példa 2. Borda-szabály

Egy $(P_1,\dots,P_t) \in P^t$-re és $a \in A$-ra definiáljuk a $b_i(a)$ értéket ($b_i : A \to \mathbf{N}$ függvény) az alábbi formulával: $b_i(a) :=$ P_i-ben az a mögé helyezett alternatívák száma. A Borda-érték pedig $b(a) := \sum_{i=1}^{t} b_i(a)$, és a csoport x-et y elé helyezi, ha $b(x) > b(y)$. Így valóban adódik egy konszenzus függvény; tulajdonképpen pl. a pontozásra alapuló sportágakban hasonló történik. Egy súlyos ellenvetés a módszer ellen az alábbi profil kiértékelése:

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & \dots & P_{t-1} & P_t \\ \mathrm{x} & \mathrm{x} & & \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ \mathrm{y} & \mathrm{y} & & \mathrm{y} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \mathrm{x} \end{array}$$

Nyilvánvalóan $b(y) - b(x) = |A| - 1 - (t-1) = |A| - t$, azaz ha az alternatívák száma nagyobb, mint a csoport mérete, akkor az y alternatívát a csoport x elé helyezi. Így az értékelés, ha más nem, nagyon érzékeny a hibákra, elfogultságokra, esetlegesen manipulációkra.

Példa 3. Lexikografikus rendezés

Helyezzük $x \in A$-t $y \in A$ elé, ha P_1-ben x megelőzi y-t. Ha P_1-ben x és y esetleg azonos helyen van, nézzük P_2-t és így tovább. Ez nyilvánvalóan konszenzus függvény, s így matematikai szempontból semmi baj sincs vele. A szó köznapi értelmében persze szó sincs konszenzusról, az egyes játékos *diktátor*.[1]

Nem könnyű tehát minden igénynek eleget tevő konszenzus függvényt találni. Hasonló megközelítést alkalmazunk, mint a Shapley-érték definíciójánál; megpróbálunk axiómákat adni egy megfelelő konszenzus függvényre. Az alábbi axiómákat 1951-ben Arrow fogalmazta meg.[2]

Arrow axiómák

1. „Egyetértés." Ha a megelőzi b-t minden profilban, akkor az ezt teszi $F(P^t)$-ben is.

2. „Függetlenség az irreveláns alternatívától." Legyen A_1 egy tetszőleges részhalmaza az alternatíváknak. Ha egy profilt úgy módosítunk, hogy minden egyén sorrendje az A_1 elemei között változatlan, akkor a konszenzus függvény ugyanazt a sorrendet adja A_1 elemei között az eredeti és a módosított profil esetében.

3. „Nincs diktátor" Nincs olyan egyén, aki ha a-t b elé helyezi, akkor a konszenzus függvény is ezt teszi, függetlenül a többi egyén értékelésétől.

4. Minden profilon értelmezve van a konszenzus függvény.

Az Arrow axiómák az igazságosságot és az ésszerűséget próbálják megragadni. Ezért aztán eléggé meglepő és némileg talán kiábrándító a következő tétel.

42. Tétel. *(Arrow) Ha $t > 1$ és $|A| > 2$, akkor nem létezik az 1-4 axiómáknak eleget tevő konszenzus függvény.*

[1] Azaz a döntés egyedül az ő preferenciái szerint történik, a többi játékos véleménye nem számít.

[2] Arrow axiómáinak sokféle egyenértékű leírása van, itt az egyik legkézenfekvőbbet közöljük.

© Pluhár András, SZTE © www.tankonyvtar.hu

Bizonyítás: Feltesszük, hogy a konszenzus kielégíti az első és a második axiómát, majd belátjuk, hogy ekkor van egy diktátor.

Legyenek a és b tetszőleges alternatívák. Az „a megelőzi b-t" kifejezést rövidítsük $a > b$-nek, míg az $a \geq b$ jelentse azt, hogy *a nincs hátrébb, mint b*.

Először azt mutatjuk meg, hogy ha egy profilban minden szavazónal első *vagy* utolsó helyen van b, akkor a konszenzusban is első vagy utolsó lesz.[3] Tegyük fel, hogy ez nem így van és léteznek a és c alternatívák, melyekre $a \geq b$ és $b \geq c$. A 2. axióma miatt ez marad a helyzet akkor is, ha minden profilban előrébb tesszük c-t a-nál. (Persze, hisz b szélső helyzete miatt nem érintjük az ab illetve cb viszonyt.) Mivel a rendezésünk tranzitív, $a \geq c$, ugyanakkor az első axióma szerint $c > a$, ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy van egy n^* szavazó, aki extrémen pivotális abban az értelemben, ha megváltoztatja a hozzá tartozó profilt, akkor b-t a konszenzus aljáról a tetejére röpítheti.

Vegyük azt a helyzetet, mikor mindenki utolsó helyre teszi b-t (a többiekre vonatkozó döntése bármilyen). Az első axióma miatt a konszenzusban is utolsó lesz b. Változtassuk meg egyenként a sorrendeket az utolsóról az első helyre téve b-t! Legyen n^* az első szavazó, amelynek sorrendjének váltása az élre helyezi b-t a konszenzusban is. (Ilyen van, mert az első axióma miatt legkésőbb a végén be kell ennek következnie.) Jelöljük P_1-gyel az utolsó profilta mely még a b alternatíva utolsó helyét eredményezi, P_2 pedig a következő, amelyre a konszenzus fentiek miatt már első helyre teszi b-t.

Állítjuk, hogy az n^* szavazó diktátor az olyan ac párokra, ahol sem a sem c nem b. (Vagyis az ilyen ac párok egymáshoz való elhelyezkedése a konszenzusban csak n^* sorrendjétől függ.) Vegyük az ac pár azon elemét (mondjuk a-t) amelyik előrébb van n^* sorrendjében. Tekintsünk egy P_3 új profilt, amelyet a P_2-ből nyerünk az a-t b elé mozgatva az n^* sorrendjében, az összes többi sorrendet pedig rendezzük át tetszőlegesen, de meghagyva b extremális (első vagy utolsó) helyén. A 2. axióma miatt a P_3-ra alkalmazott konszenzus $a > b$-t ad, hiszen a és b helye egymáshoz képest ugyanaz, mint P_1-ben, amelyre a konszenzus b-t utolsó helyre, azaz a mögé teszi. Hasonlóan $b > c$ a P_3 mellett, hisz a b és c relatív elhelyezése megegyezik a P_2-ben levővel. A rendezés tranzitivitása miatt $a > c$, tehát tényleg csak n^* sorrendjén múlik az a és c konszenzusbeli sorrendje.

Végül be kell látnunk, hogy n^* diktátor bármely ab párra. Ismételjük meg a fenti gondolatmenetet a b helyére egy c, a-tól és b-től különböző elemet téve. Azt kapjuk, van egy n_c szavazó, akiknek diktátor minden $\alpha\beta$ párra, amire $c \notin \{\alpha, \beta\}$. Speciálisan ilyenek az ab párok, tehát ezek konszenzusbeli sorrendjére csak n_c lehet hatással. Viszont a P_1 és P_2 esetében láttuk, hogy n^* is befolyásolja az ab párt, így csak a $n^* = n_c$ lehetőség marad. □

Megjegyzések: Arrow tétele rávilágít döntéshelyzetek bizonyos csapdáira. Egyik gyakran megvalósuló megoldás a diktátor, egy másik a választási lehetőségek szűkítése kettőre, rosszabb esetben *egyre*. A harmadik pedig, hogy felkészülünk a csapdákra, és megpróbáljuk feloldani a problémát minimális igazságtalanság árán.

[3] Azaz a sorrendek egyik részében, mondjuk a felében első, a maradékban utolsó. Tehát a b elemet az extrém értékelése bizonyosan extrém helyre sorolja.

21. fejezet

Igazságos osztozkodások

Felmerül az olyan osztozkodás amelyben az a cél, legalábbis nyilvánosan, hogy mindenki egyformán jól járjon. Adott egy kupac aranypor, ezen szeretne osztozni két aranyásó azzal a feltétellel, hogy egyforma rész illeti meg őket, és a másik hibája miatt nem kaphatnak kevesebbet. Két játékos esetén egy nagyon régi ötlet, az *aranyásó* algoritmus megoldja ezt: az egyik kettéosztja a kupacot, a másik választ belőle.

Általánosítások. Felmerül, hogy $n \geq 2$ ember osztozkodását is megoldjuk. A másik irány, hogy minden ember irigy is, és nemcsak $1/n$-ed részt akar, de azt is, hogy az övé legyen a legnagyobb darab, azaz *irigységmentes* legyen a felosztás. Az is fontos, hogy az eljárás, amellyel ezeket a célokat elérik, minél egyszerűbb legyen. A felosztandó kupac pedig egy C korlátos, mérhető halmaz, amin adottak a μ_i, Lebesgue abszolúlt folytonos mértékek és $\mu_i(C) = 1$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$-re.

Mozgó kés. A legegyszerűbb a holland aukcióhoz hasonló eljárás: húzzunk egy kést C fölött balról jobbra, és mikor valamelyik játékos úgy úgy véli, hogy a baloldali rész elérte az $1/n$-et, kiáltson fel, elviheti azt és kiszáll a játékból. A maradékra alkalmazzunk rekurzívan ugyanezt az eljárást.

Csökkentés. Állítsuk sorba a játékosokat, és az első vágjon le egy H, szerinte $1/n$ mértékű darabot. Ezután kérdezzük meg a másodikat, hogy a levágott darab szerinte nagyobb-e $1/n$-nél. Ha nem, akkor nem lesz kifogása, hogy az elsőé legyen, ha igen, akkor vágjon annyit, amennyivel több, azt tegye vissza a $C \setminus H$-hoz, és innen az övé lesz H maradéka. A eljárást folytatjuk a soron következőkkel, kihasználva azt, hogy a már megszólaltatott játékosok szerint a továbbadott maradék mértéke nem haladja meg az $1/n$-et. A részhalmaz utoljára vágó játékosé lesz, ő kiszáll, a többiek pedig folytatják ugyanígy.

Irigységmentes elosztás 3 személy esetén. Az aranyásó algoritmus nemcsak igazságos de irigységmentes elosztás is. John Selfrige és John H. Conway 1960-ban megoldotta ezt $n = 3$-ra; lásd alább. Az $n > 3$ esetek nem egyszerűek, nincs bizonyítva még az sem, hogy korlátos lépésben megoldhatóak. Legyenek a játékosok A, B és C, és amikor egy játékos cselekszik akkor a saját mértékét követi.

Conway-Selfridge algoritmus, az $n = 3$ esetre.

1. Először A vágja három egyenlő részre a halmazt.

2. B levág a legnagyobb részből annyit, hogy két egyforma legnagyobb legyen. A levágott részen később osztoznak.

3. C választ egy darabot, majd B és A viszi az utolsót. Ha C nem vitte el a B által megvágott darabot, akkor B-nek kell ezt választania. Hívjuk V-nek, amelyiküké a vágott darab, a másik (B vagy C) legyen NV.

4. A 2. pontban levágott darabot ossza el NV három egyenlő részre.

5. A játékosok elviszik a felvágott maradékot ebben a sorrendben: V, A és NV.

43. Tétel. *A Conway-Selfridge algoritmus irigységmentes elosztást ad.*

Bizonyítás: Világos, hogy A nem irigy V-re, hisz még akkor sem lenne az, ha V kapja meg az összes, a 2. pontban levágott részt. NV-re sem, hisz a 3. pontban vele egyforma darabot kapott, az 5. pontban pedig megelőzi a választásban. A V szintén nem irigykedhet; a 3. pontban az egyik legnagyobbat kapta, a levágott részből meg ő vesz előként. Az NV szintén egy legnagyobbat kap a 3. pontban, a 4. pontban pedig ő oszthatja egyenlő részekra a maradékot. □

Mielőtt rátérnénk az n-személyes irigység mentes elosztásra, olyan elosztást vizsgálunk, ahol a vágások számát szeretnénk korlátozni.

Nyaklánc probléma. Két tolvaj akar megosztozni egy nyitható nyakláncon, amelyen n fajta drágakő található. Az i-edik kőből $2a_i$ darab van, melyet fele-fele arányban kell osztani, hisz nehezen összehasonlíthatóak a nem azonos típusú kövek. Mivel a lánc maga is értékes, ezt a lehető legkevesebb vágással szeretnék elérni. Ha az azonos kövek egymás mellett vannak, akkor legalább n vágás kell. West és Alon megmutatta, hogy ez a legrosszabb eset.

44. Tétel. *A nyaklánc probéma mindig megoldható legfeljebb n vágással.*

Bizonyítás: Áttérünk a folytonos problémára. Vegyük az $I = [0,1]$ egység intervallumot, ahol a pontok az $\{1,\dots,n\}$ számok egyikével vannak színezve és az egyszínű pontok halmaza mérhető. Egy $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_r < y_{r+1} = 1$ sorozat r *méretű kettéosztás* ha $\cup\{[y_i, y_i] : i \equiv 0 \mod 2\}$, azaz ha minden színhalmaz felét tartalmazza. A nyaklánc kövei indukálják I színezését egy skálázással. Egy lemmával kezdjük.

45. Lemma. *A színezett I intervallumnak van legfeljebb n méretű kettéosztása.*

Bizonyítás: (45. lemma) Szükségünk van egy mély topológiai eredményre, amit Borsuk és Ulam adott. Jelölje $\mathbb{S}^n$ az $\mathbb{R}^{n+1}$ egységgömbjének felszínét, azaz $\mathbb{S}^n = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : ||\bar{x}|| = 1\}$.

46. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ folytonos és $f(\bar{x}) = -f(-\bar{x})$. Ekkor van olyan $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$, amelyre $f(\bar{x}) = 0$.*

Az intervallum egy színezéséhez készítünk egy $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényt. Ha $\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, akkor legyen $z(\bar{x}) = (z_0, \dots, z_{n+1})$ úgy, hogy $z_0 = 0$, $z_j = \sum_{i=1}^{j} = x_i^2$ minden $j \geq 1$ esetén. Legyen $f_j(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i/|x_i|) m_j(i)$, ahol $m_j(i)$ a j-edik szín $[z_{i-1}, z_i]$-be eső mértéke, $1 \leq j \leq n$. Az f függvény j-edik koordinátája legyen f_j. Ezzel az f folytonos, $\mathbb{S}^n$-et $\mathbb{R}^n$-be viszi, így a 46. tétel szerint van olyan $\bar{x} \in \mathbb{S}^n$ amelyre $f(\bar{x}) = 0$. Legyen $Z = \cup\{[z_{i-1}, z_i] : x_i/|x_i| = 1\}$. Mivel $f(\bar{x}) = 0$, Z kettéosztás, és legfeljebb n vágást okoz. □

© www.tankonyvtar.hu © Pluhár András, SZTE

A 45. lemmából következik a 44. tétel, hisz ha egy vágás rossz, azaz elvágna egy i típusú követ, akkor egy másik vágás szintén elvág egy ilyet a párosság miatt. Ha egyszerre eltoljuk őket, akkor csökkenthető a köveken átmenő vágások száma, indukcióval a nulláig. □

Megjegyzés. A 45. lemma m_j sűrűségeit kicserélve folytonosan integrálható függvényekre kapható Hobby és Rice egy régi tétele:

47. Tétel. *Legyenek a $g_1,\dots,g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvények folytonosan integrálhatóak. Ekkor van olyan $0 = z_0 \le z_1 \le \cdots \le z_n \le z_{n+1} = 1$ és $\delta_i \in \{-1,1\}$, $1 \le i \le n+1$, hogy $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \int_{z_{i-1}}^{z_i} g_j = 0$ minden $1 \le k \le n$.*

Erre támaszkodva bizonyítható irigységmentes, sőt, teljesen egyenlő elosztás *létezése* is.[1]

48. Tétel. *A C korlátos, mérhető halmaz felbontható $\{C_i\}_{i=1}^n$ halmazok diszjunkt uniójára úgy, hogy $\mu_j(C_i) = 1/n$ minden $1 \le i, j \le n$ esetén.*

Bizonyítás: Befoglalva C-t egy elég nagy dobozba és egy mozgó hipersíkkal elvágva visszajátszhatjuk az elosztást az $I = [0,1]$-re, amin a μ_i mértékek g_i sűrűségfüggvényt indukálnak. Ha $n = 2^k$, akkor a 47. tétel többszöri alkalmazása adja az eredményt. Ha n nem kettőhatvány, akkor végezzük el az osztást 2^k-ra, ahol $n < 2^k$ és k minimális, osszunk szét n részt, és a maradékra rekurzíven folytassuk az eljárást. A maradék μ_i mértéke minden lépésben legalább feleződik és nullához tart. A játékosok végső része megszámlalható sok mérhető, és csupa egyforma mértékű, halmaz uniója lesz. □

[1] Sajnos véges megvalósítása nem.

Irodalomjegyzék

[1] J. Beck, *Combinatorial Games. Tic-Tac-Toe Theory.* Cambridge University Press (2008).

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways For Your Mathematical Plays*, Volume **2**. Academic Press, New York 1982.

[3] Chvátal, Linear programming. A Series of Books in the Mathematical Sciences. *W. H. Freeman and Company,* New York, 1983.

[4] J. H. Conway, *On numbers and games.* London Mathematical Society Monographs, No. 6. Academic Press, London-New York, 1976.

[5] B. Csákány, *Diszkrét matematikai játékok,* Polygon Könyvek, Szeged, 1998.

[6] Forgó Ferenc, Pintér Miklós, Simonovits András és Solymosi Tamás, *Játékelmélet*. elektronikus jegyzet, 2005.

[7] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. A magyar nyelvű változat: Kombinatorikai problémák és feladatok, Typotex kiadó, 1999.

[8] M.J. Osborne, A. Rubinstein, *A course in game theory.* MIT Press 1994.

[9] C. H. Papadimitriou, *Számítási bonyolultság.* Novadat Bt., 1999.

[10] Pluhár András, Kombinatorikus játékok. *elektronikus jegyzet*, 1996.

[11] F. Roberts, *Discrete mathematical models with applications to social, biological, and environmental problems.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[12] B. von Stengel, Computing equilibria for two-person games. *Handbook of Game Theory* Vol. **3**, eds. R.J. Aumann and S. Hart North-Holland, Amsterdam 2002.

[13] Székely Gábor, Paradoxonok a véletlen matematikájában. *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest (1982).

[14] N. N. Taleb, *The Black Swan. The impact of the highly improbable*. Random House, New York, N. Y. (2007).