



Írta:

**BALÁZS PÉTER**

# KÉPREKONSTRUKCIÓ

Egyetemi tananyag



**TYPOTEX**

**2011**

COPYRIGHT: © Balázs Péter, SZTE, TTIK, Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika tanszék

LEKTORÁLTA: Dr. Fazekas Attila, Debreceni Egyetem Informatikai Intézet Számítógéptudományi Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.



ISBN 978-963-279-490-7

KÉSZÜLT: a **Typotex Kiadó** gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: **Votisky Zsuzsa**

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: **Juhász Lehel**

### **KULCSSZAVAK:**

képrekonstrukció, komputer tomográfia, diszkrét tomográfia, szűrt visszavetítés, algebrai rekonstrukciós módszerek, rekonstrukció optimalizálással, emissziós tomográfia, hv-konvex diszkrét halmaz, elektronmikroszkópia, nemroncsoló tesztelés

### **ÖSSZEFOGLALÓ:**

A jegyzet első felében a folytonos képrekonstrukció elméletét és gyakorlatát tárgyaljuk. Először a transzformáció alapú rekonstrukciós technikákat, majd az algebrai rekonstrukció módszereit ismertetjük. A továbbiakban a CT berendezés felépítésével, működésével és az abból eredő képfeldolgozás specifikus problémákkal, valamint azok megoldásával foglalkozunk. Ezek után egyéb képalkotó modalitásokat (SPECT, PET, MRI, diffrakciós tomográfia) mutatunk be érintőlegesen. Végül a folytonos képrekonstrukció nem orvostudományból származó alkalmazásaiból mutatunk meg néhányat. A jegyzet második részében a diszkrét tomográfiával foglalkozunk. Az alapok tárgyalása után speciális tulajdonságú bináris képek rekonstrukcióját mutatjuk be. Azt is megmutatjuk, hogy a bináris képrekonstrukció hogyan fogalmazható meg optimalizálási feladatként, és ennek megoldására melyek a leggyakrabban alkalmazott kombinatorikus módszerek. Szót ejtünk az emissziós diszkrét tomográfiáról is. A témakör ismertetését itt is az alkalmazások bemutatásával zárjuk.

# Tartalomjegyzék

<b>Előszó</b>	<b>7</b>
<b>1. A számítógépes tomográfia alapjai</b>	<b>9</b>
1.1. A rekonstrukciós tomográfia feladata	9
1.2. Folytonos és digitális képek	9
1.3. Transzmissziós és emissziós tomográfia	10
1.4. Vetületi geometriák	11
1.5. A vetületek és a szinogram	13
<b>2. Transzformáció alapú rekonstrukciós technikák</b>	<b>15</b>
2.1. Visszavetítés	15
2.2. A vetület-szelet tétel	16
2.3. Szűrt visszavetítés	18
2.4. Konvolúciós rekonstrukció	21
<b>3. Algebrai rekonstrukciós technikák</b>	<b>25</b>
3.1. A rekonstrukciós probléma átírása lineáris egyenletrendszerre	25
3.2. ART – Algebrai rekonstrukciós technika	26
3.3. További megfontolások	30
3.4. SIRT – Szimultán iteratív rekonstrukciós technika	32
3.5. SART – Szimultán algebrai rekonstrukciós technika	32
3.6. Az algebrai és a transzformáción alapuló rekonstrukciós technikák összehasonlítása	34
<b>4. A CT képképzés technikája</b>	<b>35</b>
4.1. A CT generációi	35
4.2. Rekonstrukció legyezőnyaláb és helikális vetületképzés mellett	37
4.2.1. Rekonstrukció legyezőnyaláb vetületekből	37
4.2.2. Rebinning	39
4.2.3. Rekonstrukció helikális vetületképzés esetén	39
4.3. Képképzési hibák (artifaktumok)	40
4.3.1. Mintavételezés	41
4.3.2. Parciális térfogat hatás	41
4.3.3. Nyalábkeményedés	42
4.3.4. Fém artifakt	43

<b>5. Képképző modalitások</b>	<b>44</b>
5.1. Nukleáris medicina	44
5.1.1. SPECT	45
5.1.2. PET	46
5.2. MRI	47
5.3. Reflexiós és diffrakciós tomográfia	48
<b>6. A folytonos képrekonstrukció alkalmazásai</b>	<b>51</b>
<b>7. A diszkrét tomográfia alapjai</b>	<b>53</b>
7.1. A diszkrét tomográfia szerepe	53
7.2. A bináris tomográfia alapjai	53
7.3. Elemi bináris rekonstrukciós algoritmusok	55
7.4. Kapcsoló komponensek és unicitás	59
<b>8. Speciális geometriai tulajdonságú képek rekonstrukciója</b>	<b>62</b>
8.1. A mag-burok algoritmus	63
8.2. A hv-konvex poliominók rekonstrukciója	65
8.2.1. Mag-burok algoritmus hv-konvex poliominókra	66
8.2.2. Rekonstrukció 2SAT kifejezésként	69
8.2.3. Egyértelműségi eredmények, irányított halmazok	70
8.3. A hv-konvex 8-összefüggő halmazok rekonstrukciója	72
<b>9. A bináris rekonstrukció, mint optimalizálási feladat</b>	<b>73</b>
9.1. A rekonstrukciós feladat átírása optimalizálási problémára	73
9.2. Bináris rekonstrukció szimulált hűtéssel	74
9.2.1. A szimulált hűtés	74
9.2.2. Pixel és objektum alapú megközelítések	75
9.3. Bináris rekonstrukció genetikus algoritmussal	76
9.3.1. Genetikus algoritmusok	76
9.3.2. Mutációs és rekombinációs operátorok a pixel alapú megközelítésben	77
9.3.3. Mutációs és rekombinációs operátorok az objektum alapú megközelítésben	82
<b>10. Emissziós diszkrét tomográfia</b>	<b>83</b>
10.1. Az emissziós diszkrét tomográfia alapjai	83
10.2. Az általános eset	84
10.3. A hv-konvex mátrixok rekonstrukciója abszorpciós esetben	84
10.3.1. A $\beta_0$ -reprezentáció	85
10.3.2. A hv-konvex bináris mátrixok egyértelműsége és rekonstrukciója abszorpciós esetben	86
10.4. Rekonstrukció szemközti oldali vetületekből	88

---

<b>11. A diszkrét tomográfia alkalmazásai</b>	<b>90</b>
11.1. Angiográfia . . . . .	90
11.2. Elektrotomográfia . . . . .	92
11.2.1. Nanostrukturák meghatározása . . . . .	92
11.2.2. Makromolekulák vizsgálata . . . . .	93
11.3. Nemroncsoló anyagvizsgálat . . . . .	94
11.3.1. A nemroncsoló anyagvizsgálat berendezése és elve . . . . .	94
11.3.2. A vetületi képek torzulása és korrekciója . . . . .	95
11.3.3. Ismeretlen elnyelődési együtthatók kezelése . . . . .	96
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>99</b>



# Előszó

Jelen jegyzetet a Szegedi Tudományegyetem programtervező informatikus MSc szakirányos Képrekonstrukció című tárgyának tematikája alapján készítettük. A jegyzet első hat fejezetében a *folytonos képrekonstrukció* elméletét és gyakorlatát tárgyaljuk. Az alapvető fogalmak tisztázása után (1. fejezet) a számítógépes képrekonstrukció eljárásait és azok matematikai háttérét mutatjuk be. A 2. fejezetben a transzformáció alapú technikákat, a 3. fejezetben pedig az algebrai rekonstrukció módszereit ismertetjük meg az olvasóval. A 4. fejezetben a CT berendezés felépítésével, működésével és az abból eredő képfeldolgozás specifikus problémákkal, valamint azok megoldásával foglalkozunk, míg az 5. fejezetben az egyéb képalkotó modalitásokkal ismerkedünk meg. Végül, a témakör lezárásaként a 6. fejezetben a folytonos képrekonstrukció nem orvostudományból származó alkalmazásaiból mutatunk meg néhányat. A jegyzet második részében a *diszkrét tomográfiával* foglalkozunk, mely a folytonos képrekonstrukciótól elkülönülő, önálló matematikai háttérrel rendelkezik. A témakörrel való ismerkedést a 7. fejezetben az alapok tárgyalásával kezdjük. A 8. fejezetben a speciális tulajdonságú bináris képek rekonstrukciójával foglalkozunk. A 9. fejezetben azt mutatjuk be, hogy a bináris képrekonstrukció hogyan fogalmazható meg optimalizálási feladatként, és ennek megoldására melyek a leggyakrabban alkalmazott kombinatorikus módszerek. Az emissziós diszkrét tomográfiát a 10. fejezetben tárgyaljuk. Végül az utolsó, 11. fejezetben, a témakör ismertetését itt is az alkalmazások bemutatásával zárjuk.

Szem előtt tartva azt, hogy a képrekonstrukció nem csak informatikai szempontból fontos és érdekes terület, a jegyzet megírása során törekedtünk arra, hogy az olvasótól minél kevesebb matematikai, informatikai tudást követeljünk meg. Terjedelmi okokból azonban néhány helyen nem bocsátkozhattunk matematikai részletekbe, így a jegyzet teljes feldolgozásához szükség lehet egyes matematikai fogalmak tisztázására, mint például a Fourier-transzformáció, bizonyos alapvető kombinatorikai, gráfelméleti összefüggések, vagy a mátrixokkal kapcsolatos alapvető műveletek, illetve bonyolultságelméleti alapok. Mindemellett bízunk abban, hogy a bemutatásra kerülő anyag változatos tematikája, a számos szemléltető ábra, valamint az interaktív segédlet biztosítja azt, hogy nem csak a szűkebb szakterület iránt érdeklődő olvasó jut hasznos és érdekes információkhoz a jegyzet olvasása során.

Ezúton köszönöm Najzer Helga és Jobbágy Róbert hallgatóimnak a kézirattal kapcsolatos értékes észrevételeiket. Külön köszönettel tartozom Hantos Norbert PhD hallgatónak az algebrai rekonstrukciós technikák eredményeit összehasonlító ábrák elkészítéséért. Végül itt szeretnék köszönetet mondani Fazekas Attilának, a Debreceni Egyetem docensének a kézirat alapos lektorálásáért.

Szeged, 2011. április

Balázs Péter



# 1. fejezet

## A számítógépes tomográfia alapjai

### 1.1. A rekonstrukciós tomográfia feladata

A tomográfiáról a legtöbb olvasónak valószínűleg a CT berendezés jut eszébe, pedig ahogy ezt látni fogjuk, maga az eljárás lényegesen általánosabb, gyakorlati alkalmazásai pedig sokkal szerteágzóbbak, mint az orvosi CT képalkotás. A *tomográfia* a görög „tomos” (szelet) szóból származik és általánosságban szeleteken alapuló képalkotást jelent. Egy 3D-s objektum szeleteit úgy képezhetjük, hogy azt egy tetszőleges 2D-s síkkal elmetsszük, ezáltal egy 2D-s keresztmetszetet (szeletet) kapunk. A tomográfia alapfeladata ezek után az, hogy a szeletekből összeállítsuk (rekonstruáljuk) a 3D-s objektum egy leírását, modelljét.

A fenti definícióba beleférne az is, hogy a vizsgált objektumot a valóságban is szeletekre vágjuk, és így próbálunk meg annak belső felépítéséről információt nyerni. Gyakorlati szempontból azonban rekonstrukciós tomográfián olyan módszereket értünk, ahol az objektum belsejéről, a szeletekről, úgy szerzünk információt, hogy közben magát az objektumot nem károsítjuk, roncsoljuk.

Matematikai értelemben a 3D-s objektum egy 2D-s szeletében egy adott  $(x, y)$  pontban jelenlévő anyag sűrűségét egy kétváltozós  $f(x, y)$  függvénnyel írhatjuk le. Ezek a szeletek azonban (a nemroncsoló kikötés miatt) közvetlenül nem hozzáférhetők, csak valamilyen másodlagos információval rendelkezünk róluk. Ez az információ legtöbbször az, hogy az adott 2D-s szeleten bizonyos irányok mentén mennyi az anyagi sűrűségek összege. Azaz az  $f(x, y)$  függvény helyett annak csak bizonyos vonalak mentén vett integráljai ismertek. A rekonstrukció alapfeladata az  $f(x, y)$  függvény előállítás, annak bizonyos irányokból vett vonalmenti integráljaiból.

### 1.2. Folytonos és digitális képek

A kétváltozós függvények egy szemléletes ábrázolási módja az, ha szürkeárnyaltos képként fogjuk fel őket úgy, hogy az  $(x, y)$  pontban a szürkeintenzitás megegyezik az  $f(x, y)$  függvényértékkel. Általában a szürkeintenzitás értékeket a  $[0, 1]$  intervallumra szokás normálni, ahol a 0 érték a fekete színnek, az 1 érték pedig a fehér színnek felel meg. Egy ilyen képen bármilyen 0 és 1 közötti szürkeintenzitás megjelenhet és (mivel az  $f(x, y)$  függvény tetszőleges,

nem feltétlenül egész koordinátájú pontokban is értelmezve lehet) a képpontok halmaza sem korlátozott. Ebben az esetben tehát a függvény értelmezési tartományára és értékészletére sincs megszorítás, mindkettő folytonos. Egy hagyományos (azaz nem digitális) fényképezőgéppel készített fekete-fehér képet is pontosan így értelmezhetünk, legalábbis a filmet alkotó részecskék mérethatáráig.

Ebben a jegyzetben *digitális képekkel* foglalkozunk, melyek a fenti folytonos képektől annyiban térnek el, hogy az  $(x, y)$  és  $f(x, y)$  értékek is diszkrét. A számítógépes képfeldolgozás során a képek minden esetben digitálisak, a számítógép ugyanis csak véges számábrázolási pontossággal tudja a képpontok (más szóval pixelek) pozícióit és azok értékeit tárolni. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak a kép szót használjuk, a szöveggörnyezetből mindig ki fog derülni, hogy folytonos vagy digitális képről beszélünk.

### 1.3. Transzmissziós és emissziós tomográfia

A számítógépes tomográfia (Computerized Tomography - CT) a rekonstrukciós tomográfia egy speciális módszere, melynek elsődleges alkalmazásai az orvostudomány területén jelentkeznek, ahol a cél a páciens belső szöveteinek képi megjelenítése. A páciensen több irányból Röntgen-sugárzás halad át, melynek egy része eközben elnyelődik. A páciens másik oldalán egy detektorsor méri a vizsgált területről kilépő sugárzás intenzitását. A különböző szöveteken áthaladva az elnyelődés mértéke különböző, és mindig az adott szövetre jellemző. Ezt nevezzük az adott szövet (vagy általánosabban az adott anyag) *lineáris elnyelődési együtthatójának*. A fizikából ismert Beer-Lambert törvény alapján ha  $I_0$  a Röntgen-sugár kezdeti intenzitása és ez  $\Delta x$  vastagságú  $\mu$  lineáris elnyelődési együtthatójú (homogén) anyagon halad át, akkor a kilépő mért  $I$  intenzitás, az alábbi képlettel adható meg

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \Delta x}. \quad (1.1)$$

Ha a sugár különböző  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  elnyelődési együtthatójú, de azonos  $\Delta x$  vastagságú anyagokon halad át, akkor az (1.1) képlet

$$I = I_0 \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i \Delta x}$$

alakot ölt, ami az elnyelődési együttható lineáris tulajdonságát fejezi ki. Ha most a  $\Delta x$  minden határon túl csökken (azaz a diszkrét felbontáson alapuló modellt a folytonos modell felé közelítjük), akkor az

$$I = I_0 \cdot e^{-\int_0^d \mu(x) dx} \quad (1.2)$$

képlethez jutunk, ahol  $d$  a Röntgen-forrás detektortól vett távolsága,  $x$  az adott sugárnyalábon vett távolság a forrástól számítva,  $\mu(x)$  pedig az elnyelődési együttható értéke az  $x$  pontban. Az (1.2) egyenlet mindkét oldalát  $I_0$ -al osztva, majd logaritmusuk -1-szeresét véve a

$$-\ln \frac{I}{I_0} = \int_0^d \mu(x) dx$$

képlet adja meg az adott Röntgen-sugáron vett vetületet, ami láthatóan szoros összefüggésben áll azzal, hogy a sugár milyen mennyiségű és milyen elnyelési együtthatójú anyagokon haladt át.

A fenti megállapítások csak az úgy nevezett *transzmissziós tomográfia* esetére vonatkoznak, azaz amikor a sugárzás a vizsgált objektumon kívülről érkezik. Habár a jegyzet túlnyomó részében a transzmissziós tomográfiával kapcsolatos alapokat ismertetjük, azzal az esettel is foglalkozni fogunk amikor a sugárzás az objektum belsejéből indul és a különböző elnyelési együtthatójú anyagokon áthaladva az objektumon kívül észleljük annak gyengülését. Egy  $I_0$  intenzitással sugárzó pont esetében a ponttól  $x$  távolságra lévő detektor által mért intenzitást ekkor az

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x} \quad (1.3)$$

összefüggéssel fejezhetjük ki, ahol  $\mu \geq 0$  a homogén anyag abszorpciója (az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az anyag homogén). Természetesen több sugárzó pont esetén a detektoron az összintenzitást mérhetjük. Az ezen az összefüggésen alapuló képalkotást *emissziós tomográfiának* nevezzük, melynek szintén főként orvosi alkalmazásai (SPECT, PET) ismertek.

## 1.4. Vetületi geometriák

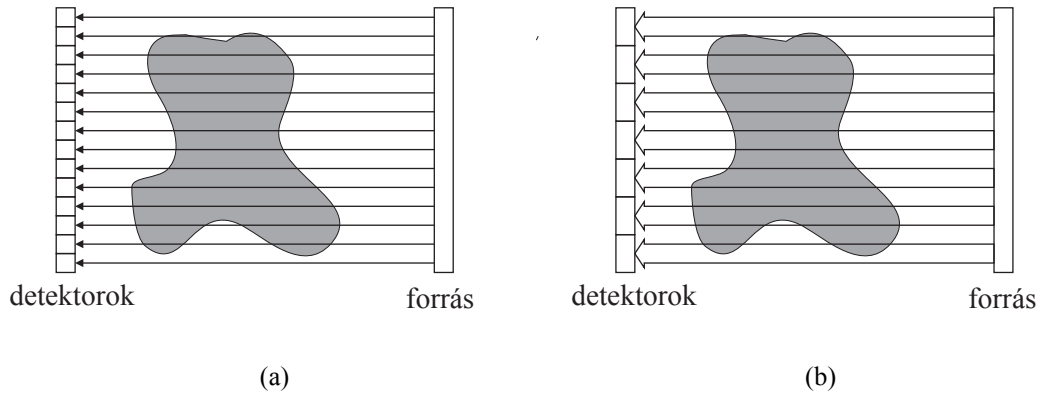
Természetesen a csupán egy sugár mentén számított vetületi érték nem sokat árul el a 2D-s keresztmetszetről. Azonban megfelelően sok vetületből magát a teljes keresztmetszetet leíró  $f(x, y)$  függvényt rekonstruálhatjuk. Az alábbiakban a leggyakoribb vetületképzési módszereket (más szóval vetületi geometriákat) tekintjük át.

A legegyszerűbb a *párhuzamos nyaláb* vetületképzés (parallel-beam projection). Ebben az esetben egy adott irányból párhuzamos vetítősugarakkal képezzük a függvény egy adott irányból vett vetületét, ahogyan ezt az **1.1(a)** ábrán láthatjuk. Habár ez a fajta vetületképzés az orvosi alkalmazásokban már ritkán használatos, a legtöbb képrekonstrukciós módszer közvetve vagy közvetlenül erre a geometriára épül, így a továbbiakban részletesen mi is ezt fogjuk tárgyalni.

A modernebb képalkotó berendezések már az úgy nevezett *legyezőnyaláb* vetületképzésen alapszanak (fan-beam projection). Ilyenkor egy pontszerű Röntgen-forrást feltételezünk, melyből legyezőnyalábszerűen indulnak ki a vetítősugarak a szemben lévő detektorokhoz. A legyezőnyaláb-vetületképzésnek két altípusa van. Ha a vetítősugarak közötti szögek megegyező nagyságúak, akkor *ekvianguláris geometriáról* beszélünk. Ekkor a szemközti oldalon egy detektorív helyezkedik el. Ha azonban a szemközti oldalon a detektorok egy egyenes mentén egyenlő távolságokban helyezkednek el egymástól (ez az *ekvidisztáns geometria*), akkor a szomszédos vetítősugarak által bezárt szögek nem azonosak. A kétfajta legyezőnyaláb geometria struktúrája az **1.2** ábrán látható. Itt kívánjuk megjegyezni, hogy a legyezőnyaláb geometriánál a sugárforrást végtelen távolra helyezve speciális esetként éppen a párhuzamos vetületképzést kapjuk.

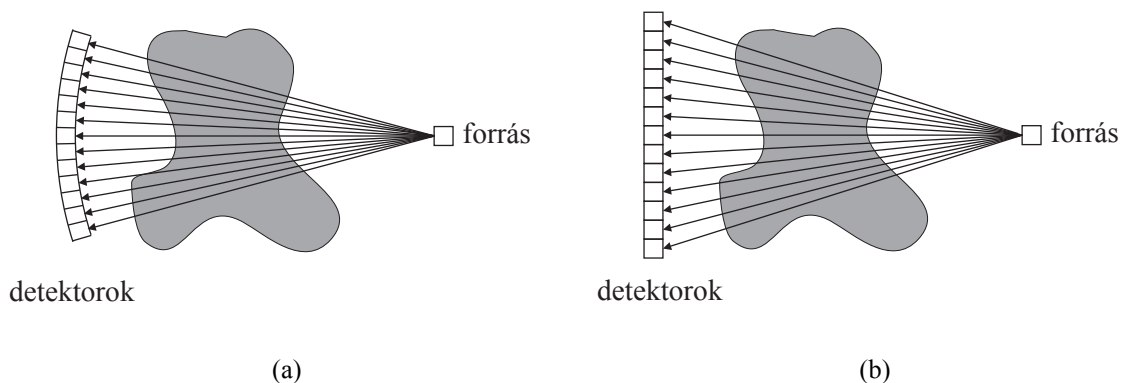
A legújabb CT berendezések az úgynevezett *kúpnyaláb vetületképzést* (cone-beam projection) alkalmazzák. A forrás itt is pontszerű, de a túloldalon nem egy, hanem több egymásra helyezett detektorív található. Ez a fajta vetületképzés már valódi térfogati információt szol-

gáltat a vizsgált objektumról, szemben az előzőekben tárgyaltakkal, melyek egy időben csak egy síkot érintenek.



1.1. ábra. Párhuzamos vetületi geometria vonalintegrálok (a) és területintegrálok (b) alkalmazásával.

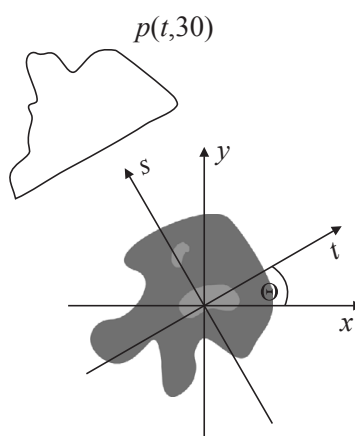
Az eddigiekben feltételeztük, hogy a pontszerű sugárforrásból egy vastagság nélküli vetítősugár indul ki. Számos esetben azonban a valósághoz közelebb áll egy olyan modell, amelyben a vetítősugaraknak szélességi kiterjedése is van, azaz a forrást egy sugársáv hagyja el. Ilyenkor a detektorokon mért intenzitást nem vonalmenti integrálok, hanem területi integrálok segítségével számíthatjuk. Erre mutat egy példát az 1.1(b) ábra a párhuzamos vetületképzés esetén. Természetesen hasonló elgondolással kialakíthatjuk a területi integrálokra alapuló modellt a legyezőnyaláb vetületi geometriára is. Mi a továbbiakban általában az egyszerűbb, azaz a vonalintegrálokra alapuló modellel fogunk dolgozni, ahol a területi modellt használjuk, ott ezt külön hangsúlyozni fogjuk.



1.2. ábra. Ekvianguláris (a) és ekvidisztáns (b) legyezőnyaláb vetületi geometria.

## 1.5. A vetületek és a szinogram

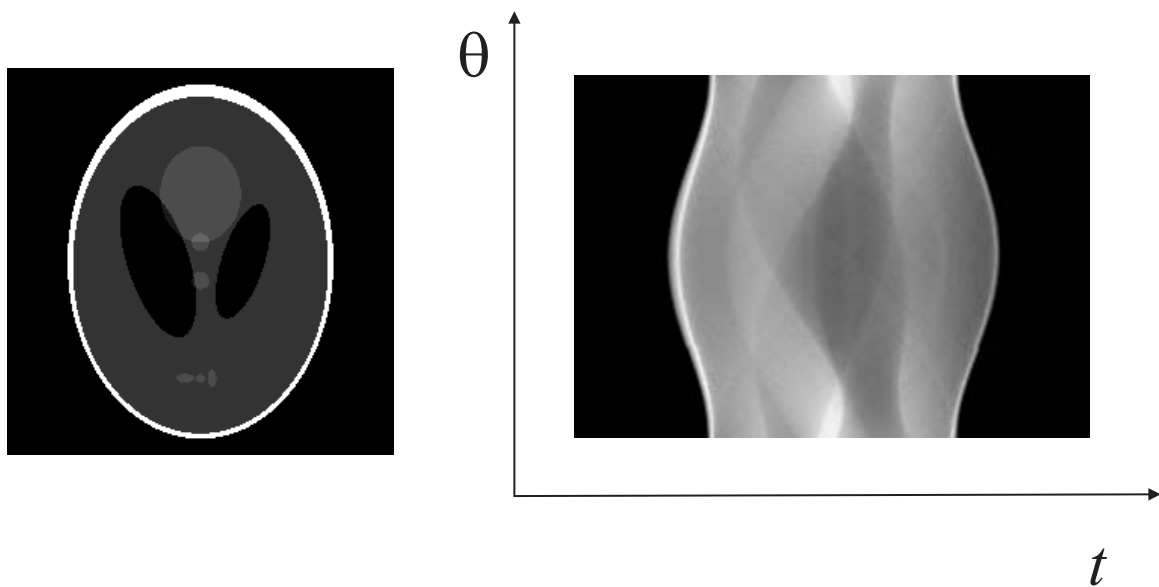
Tekintsük a kétváltozós  $f(x, y)$  függvényt, ami a vizsgált objektum elnyelési együtthatóit reprezentálja a tetszőlegesen vett  $(x, y)$  pontokban. Jelölje  $t$  és  $s$  az  $x$  és  $y$  tengelyekkel meghatározott koordináta-rendszer  $\theta$  szögű elforgatottjának tengelyeit, ebben a sorrendben. Jelölje továbbá  $p(t, \theta)$  az  $f(x, y)$  függvénynek az  $s$ -től  $t$  távolságban vett  $s$ -sel párhuzamos vonalmenti integrálját. Rögzített  $\theta$  esetén a  $p(t, \theta)$  értékek  $t$ -nek egy függvényét adják, melyet az  $f(x, y)$  függvény  $\theta$  szögű *vetületének* nevezünk. Az 1.3 ábrán egy kétváltozós függvény és annak a  $30^\circ$ -hoz tartozó  $p(t, 30)$  vetületét láthatjuk.



1.3. ábra. Egy kétváltozós függvény és annak a  $\theta = 30^\circ$  szög által meghatározott vetülete.

Transzmissziós tomográfia és párhuzamos vetületképzés esetén tetszőleges  $\theta$  szögű vetület megegyezik a  $180^\circ + \theta$  szögű vetülettel, így elegendő csak a  $0^\circ$  és a  $180^\circ$  közötti vetületekkel foglalkoznunk. A vetületek elhelyezhetők egy kétdimenziós koordináta-rendszerben a függőleges tengelyen növekvő  $\theta$  értékek szerint úgy, hogy az egyes vetítésugarakon vett vetületi értékeket szürkeintenzitások segítségével jelenítjük meg. Az így előállt képet *szinogramnak* nevezzük. Ennek mérete attól függ, hogy milyen sűrűn (azaz hány fokként) vesszük az adott függvény vetületeit. Az 1.4 ábra az úgynevezett Shepp-Logan fejfantomot és annak szinogramját mutatja. A vetületeket  $0^\circ$ -tól  $180^\circ$ -ig  $1^\circ$ -os közökkel képeztük. Az ilyen fejfantomképek különböző szürkeintenzitású ellipszisek generálásával adódnak és rendkívül hasznosak valamint általánosan alkalmazottak különböző képrekonstrukciós algoritmusok tesztelése, összehasonlítása céljából.

A képrekonstrukció feladata az adott vetületekből előállítani az eredeti függvényt (vagy annak minél jobb közelítését), ami lényegében tehát egy kép megkonstruálását jelenti annak szinogramjából.



1.4. ábra. A Shepp-Logan fejfantom és annak szinogramja.

## 2. fejezet

# Transzformáció alapú rekonstrukciós technikák

### 2.1. Visszavetítés

Amennyiben csak a függvény vetületei állnak rendelkezésünkre, akkor – a-priori információ híján – azzal a feltételezéssel élünk, hogy minden egyes vetítősugár esetén a sugarat érintő pixelek azonos szerepet játszanak a vetület kialakításában. Minden vetületi értéket a megfelelő irányból egyenletesen visszavetítve és minden pixelre a megfelelő visszavetített értékeket összegezve egy egyszerű rekonstrukciós eljáráshoz jutunk. Ezt a módszert *visszavetítéses rekonstrukciónak* hívjuk, és ez képezi a leggyakrabban használatos rekonstrukciós eljárások alapját. A visszavetítés eredményeként kapott képet *laminogramnak* nevezzük. A 2.1 ábrán az 1.4 ábra fejfantomjának egyszerű visszavetítéssel rekonstruált eredményét (a laminogramját) láthatjuk. Az összehasonlítás kedvéért magát a fejfantomot is újra ábrázoltuk. Szembeötlő, hogy az eredményül kapott kép mennyire elmosódott. Ennek az általános jelenségnek a magyarázatára a későbbiekben térünk ki. Az mindenesetre tisztán látszik, hogy a csupán visszavetítéssel megalkotott kép a gyakorlati szempontból nem kielégítő, így a rekonstrukció alaposabb megfontolásokat igényel.



2.1. ábra. A Shepp-Logan fejfantom és annak laminogramja.

## 2.2. A vetület-szelet tétel

Jelölje  $p(t, \theta)$  az  $f(x, y)$  függvény  $\theta$  szögű vetületét. Speciálisan az  $y$  tengellyel párhuzamos vetületet a

$$p(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

módon írhatjuk fel. Mindkét oldal  $x$  szerinti egydimenziós Fourier-transzformáltját véve kapjuk, hogy

$$P(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, 0) e^{-i2\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx dy. \quad (2.1)$$

Tekintsük most az  $f(x, y)$  függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltját a  $v = 0$  helyen, amire

$$F(u, v) \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(ux+vy)} dx dy \Big|_{v=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi ux} dx dy \quad (2.2)$$

teljesül. A (2.1) és (2.2) egyenletek jobboldalainak egyenlőségéből adódik, hogy

$$P(u) = F(u, v) \Big|_{v=0}.$$

Mivel a koordináta-rendszer választása tetszőleges, így a fenti összefüggés érvényes marad tetszőlegesen elforgatott koordináta-rendszer esetén is. Ezt közvetlenül is bizonyíthatjuk a megfelelő koordináta-transzformáció segítségével. Az  $f(x, y)$  függvényt a  $\theta$  szöggel elforgatott koordináta-rendszerben az  $f'(t, s)$  függvény adja meg, ahol a két koordináta-rendszer közötti kapcsolatot a

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.3)$$

és az

$$s = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (2.4)$$

összefüggések adják meg. A  $\theta$  szögű vetületre ekkor fenáll, hogy

$$p(t, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds.$$

A  $p(t, \theta)$  függvény  $t$  szerinti egydimenziós  $P(\omega, \theta)$  Fourier-transzformáltjára

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t, s) ds e^{-i2\pi \omega t} dt. \quad (2.5)$$

A koordináta-transzformáció során a (2.3) és (2.4) összefüggésekből megalkotott Jacobi-determináns alapján

$$ds dt = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix} dx dy = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} dx dy = dx dy \quad (2.6)$$



adódik. A (2.3), (2.5) és (2.6) egyenletek alapján azt kapjuk, hogy

$$P(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy.$$

Az  $f(x, y)$  függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltja

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(xu + yv)} dx dy,$$

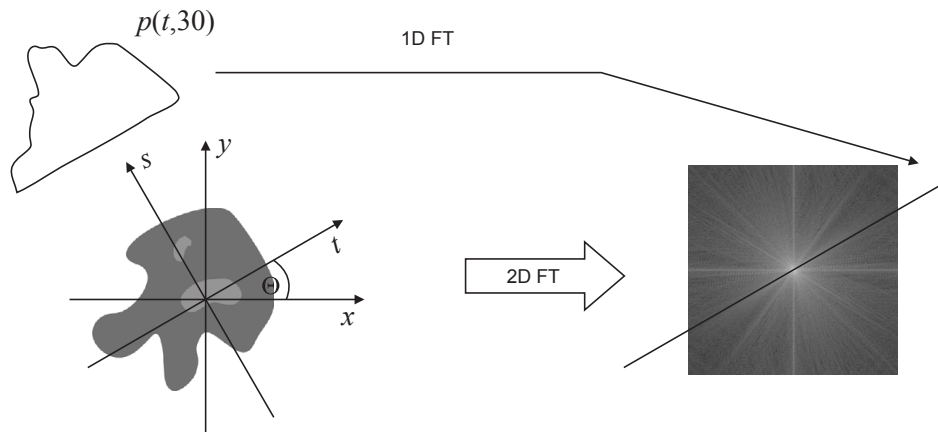
mely az  $u = \omega \cos \theta$  és  $v = \omega \sin \theta$  esetén az

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = P(\omega, \theta) \quad (2.7)$$

kapcsolatot adja, ahol a Fourier-térben a  $u = \omega \cos \theta$  és  $v = \omega \sin \theta$  változók egy az origón átmenő  $\theta$  irányszögű egyenest határoznak meg.

Fenti észrevételeinket az alábbi úgy nevezett *vetület-szelet tétel* foglalja össze, melyet szokás még *központi szelet tételnek*, illetve *Fourier-szelet tételnek* is nevezni.

**Tétel.** Az  $f(x, y)$  függvény  $\theta$  szögű vetületének egydimenziós Fourier-transzformáltja megegyezik az  $f(x, y)$  függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltjának egy a frekvenciatérben az origón áthaladó  $\theta$  irányszögű egyenesre eső részével.

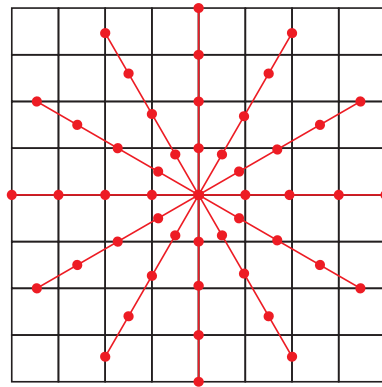


2.2. ábra. A vetület-szelet tétel szemléletes jelentése.

Az összefüggést szemléletesen a 2.2 ábra mutatja. A tétel közvetlenül szolgáltat egy egyszerű rekonstrukciós eljárást is, melyet *Fourier rekonstrukciós módszernek* hívunk. Ennek lényege a következő: Véve a vetületek egydimenziós Fourier-transzformáltjait, azok egy-egy egyenest határoznak meg a függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltjából. Ha a  $0$  és  $\pi$  szögek között az összes vetületet vesszük, akkor az eredeti függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltjának minden pontját megkaphatjuk. Erre alkalmazva egy kétdimenziós inverz Fourier-transzformációt megkapjuk az eredeti függvényt is.

### 2.3. Szűrt visszavetítés

Habár a Fourier rekonstrukció matematikailag elegáns módszer, a gyakorlatban több nehézség merül fel vele kapcsolatban. Egyrészt a kétdimenziós inverz Fourier-transzformáció számítási szempontból költséges művelet. Ennél lényegesen nagyobb gondot okoz azonban az, hogy a folytonos modellt a számítógépes reprezentáció során diszkrétizálni kell. A gyakorlatban csak véges számú vetület képzésére van lehetőség, így az  $F(u, v)$  Fourier-transzformált csak bizonyos egyenesek mentén lesz ismert. Ráadásul a Fourier-transzformáltról nyert információ, azaz a Fourier-tér mintavételezése, polárkoordinátás alakban adódik, melyet valamilyen módon interpolálni kell az  $u$  és  $v$  változók által meghatározott négyzetrácsra, hogy aztán a (diszkrét) inverz Fourier-transzformációt végrehajthassuk. Ezt a helyzetet mutatja a 2.3 ábra. Az interpoláció során a Fourier-térben fellépő minden apró közelítési hiba a teljes eredeti képre hatással van, hiszen a Fourier-tér pontjai a kép egy-egy frekvenciájának felelnek meg. Az is világos, hogy a nagyobb frekvenciák felé egyre nagyobb lesz az interpolációból származó hiba hatása. Az interpoláció a Fourier-térben tehát mélyebb elemzést igényel.



2.3. ábra. A Fourier-térről a vetületekből nyert információ (pirossal) és az  $u$  és  $v$  változók által meghatározott négyzetrács, melyre az interpolációt el kell végezni.

Induljunk most ki az  $F(u, v)$  függvény inverz Fourier-transzformáltjából, ami értelemszerűen az  $f(x, y)$  függvényt adja:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv.$$

Térjünk át most is a vetületeken alapuló mintavételezésnek megfelelő  $(\omega, \theta)$  polárkoordináta-rendszerbe az  $u = \omega \cos \theta$ ,  $v = \omega \sin \theta$  és a Jacobi-determináns alapján

$$dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \omega} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \omega} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{vmatrix} d\omega d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\omega \sin \theta \\ \sin \theta & \omega \cos \theta \end{vmatrix} d\omega d\theta = \omega d\omega d\theta$$

összefüggések segítségével. Ekkor

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta.$$

A vetület-szelet tétel (2.7) polárkoordinátás alakját a fenti egyenletbe helyettesítve valamint felhasználva, hogy  $\cos \theta = -\cos(\theta + \pi)$  és  $\sin \theta = -\sin(\theta + \pi)$  adódik, hogy

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\ &+ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta + \pi) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A vetületek között értelemszerűen fennáll a  $p(t, \theta + \pi) = p(-t, \theta)$  összefüggés, amiből adódóan hasonló összefüggést kapunk azok egydimenziós Fourier-transzformáltjaira is, mégpedig

$$P(\omega, \theta + \pi) = P(-\omega, \theta). \quad (2.9)$$

A (2.9) összefüggést a (2.8) formulába helyettesítve

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\ &+ \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(-\omega, \theta) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} \omega d\omega d\theta + \\ &+ \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^0 P(\omega, \theta) e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} (-\omega) d\omega d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega d\theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ezt ha az elforgatott  $(s, t)$  koordináta-rendszerben fejezzük ki, akkor azt kapjuk, hogy

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta) |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega d\theta, \quad (2.11)$$

amiből világosan látszik, hogy (szemben a Fourier rekonstrukciós módszerrel) nem az eredeti vetületek inverz Fourier-transzformáltját kell visszavetítenünk a rekonstrukció során, hanem

a  $P(\omega, \theta)|\omega|$  függvényekét, melyek az eredeti vetületekből a frekvenciatérben egy  $|\omega|$  függvényvel való szorzás (szűrés) eredményeként állnak elő. Ezt az eljárást hívjuk *szűrt visszavetítésnek*, melynek főbb lépései minden egyes vetületre végrehajtva tehát az alábbiak:

1. Határozzuk meg a  $p(t, \theta)$  vetület  $P(\omega, \theta)$  Fourier-transzformáltját.
2. Szorozzuk be  $P(\omega, \theta)$ -t a  $H(\omega)=|\omega|$  (vagy valamilyen más) szűrővel, hogy megkapjuk  $G(\omega, \theta)$ -t.
3. Határozzuk meg a  $G(\omega, \theta)$  inverz Fourier-transzformáltját, hogy megkapjuk a  $g(t, \theta)$  szűrt vetületet.
4. Vetítsük vissza  $g(t, \theta)$ -t és adjuk hozzá az  $f(x, y)$  képhez.

Az eljárás kapcsolatát a visszavetítéssel megérthetjük, ha bevezetjük a  $\theta$  szögű szűrt vetületre a

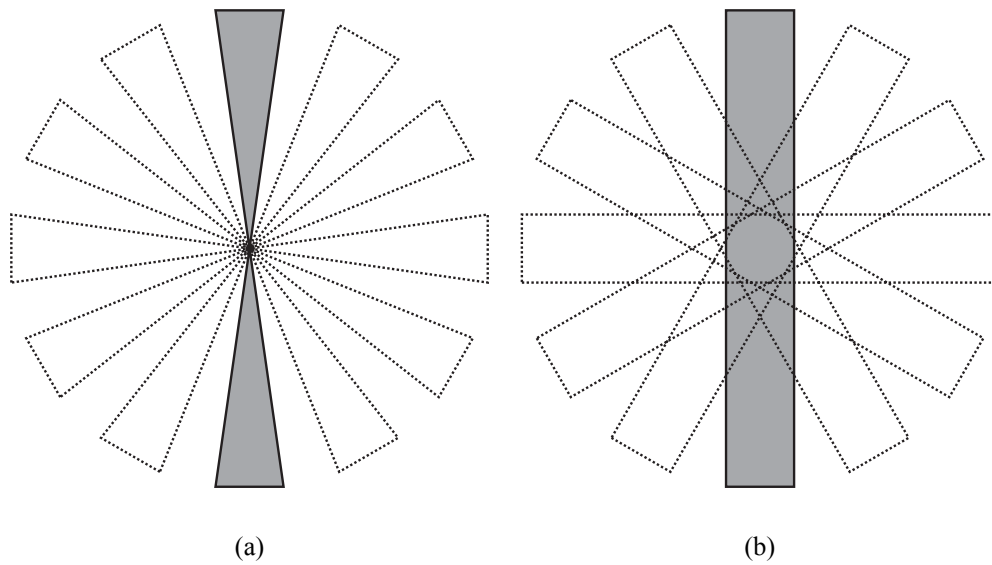
$$g(t, \theta) = g(x \cos \theta + y \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega, \theta)|\omega| e^{j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\omega$$

jelölést. Ekkor a (2.10) egyenlet az

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

alakot ölti. Az  $x \cos \theta + y \sin \theta$  érték éppen az  $(x, y)$  pont távolsága az origón átmenő  $\theta$  irányú szögű egyenestől. Azaz az  $(x, y)$  pont intenzitása úgy adódik, hogy az összes irányból az összes rajta áthaladó (szűrt) vetületi sugár értékét összegezzük, ami összhangban áll a visszavetítés elméletével.

A visszavetítés korrekciójára kapott szűrő alakja szemléletesen is megmagyarázható. A vetület-szelet tétel szerint az  $f(x, y)$  függvény kétdimenziós Fourier-transzformáltját egydimenziós Fourier-transzformáltak „egymásra illesztésével” kapjuk. Ideális esetben ezek az egydimenziós Fourier-transzformáltak akkor töltene ki a teljes frekvenciatérrel, ha tortaszelet alakúak lennének, ahogy azt a 2.4(a) ábrán látjuk. A vetületek Fourier-transzformáltjai azonban (végtelenül vékony) sáv alakúak. Így ha ezeket a transzformáltakat összeadjuk, akkor a Fourier-tér központi részét túlhangsúlyozzuk, míg a külső régiók alulreprezentáltak maradnak (lásd a 2.4(b) ábrát). Ez az oka annak, hogy az egyszerű visszavetítés homályos, elmosódott képet ad. A Fourier-tér középső része ugyanis az alacsony frekvenciáknak (homogén régióknak) felel meg az eredeti képen, míg a külső része a magas frekvenciáknak megfelelő éleket reprezentálja. A korrekció értelemszerűen egy olyan súlyozás kell legyen, mely a középponttól kifelé haladva egyenletesen növekszik. A 2.5 ábra a visszavetítés szűrő nélküli és szűrt változatának összehasonlítását mutatja az eredménykép szempontjából. Megfigyelhetjük, hogy a szűrő segítségével jelentősen javult a rekonstruált kép minősége.



2.4. ábra. A vetületek Fourier-transzformáltjainak a Fourier-térben való elhelyezkedése ideális (a) és valós (b) esetben.



2.5. ábra. A már megismert Shepp-Logan fantom, rekonstruálása szűrő nélkül és ramp-szűrővel (balról jobbra).

## 2.4. Konvolúciós rekonstrukció

A szűrt visszavetítés algoritmus megadja azt a módszert, mellyel a rekonstrukció elvégezhető. Gyakorlati szempontból azonban érdemes még egy további megfontolást tennünk. A konvolúciós tétel szerint a frekvenciatérben végrehajtott szorzásnak a képtérben végrehajtott konvolúció felel meg. Míg a  $P(\omega, \theta)$  függvények inverz Fourier-transzformáltjai a  $p(t, \theta)$  vetületi függvények, addig az  $|\omega|$  frekvenciatérbeli szűrő képtérbeli megfelelője a

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

inverz Fourier-transzformált. Tehát az (2.11) formulát az alábbi alakba írhatjuk:

$$f(x, y) = \int_0^\pi [p(t, \theta) * \xi(t)]_{t=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta.$$

Ha azonban a  $t = 0$  behelyettesítéssel megvizsgáljuk a

$$\xi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| e^0 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| d\omega$$

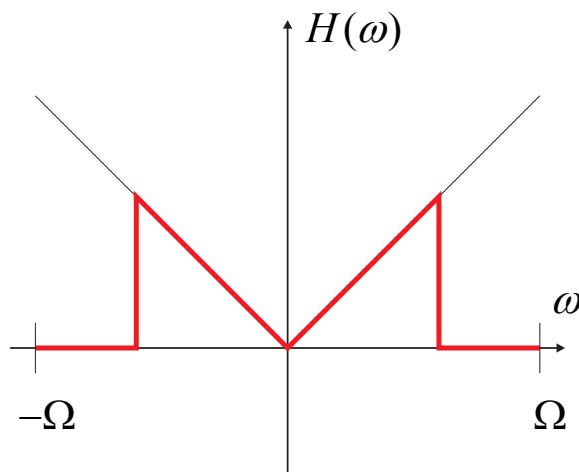
kifejezést, akkor láthatjuk, hogy ez az érték nem létezik, mivel az  $|\omega|$  függvény alatti terület nem véges. A probléma úgy hidalható át, hogy feltételezzük, hogy a vetületek Fourier-transzformáltjai sávhatárolt függvények, azaz energiájuk egy megadott  $\Omega$ -ra a  $(-\Omega, \Omega)$  intervallumon kívül 0. Ebben az esetben az integrálást csak egy véges tartományon kell elvégeznünk, azaz a  $\xi(t)$  függvényt a

$$\tilde{\xi}(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} |\omega| e^{j2\pi\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

függvénnyel közelítjük. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy az ideális  $|\omega|$  szűrő helyett, annak egy  $q(\omega)$  függvénnyel ablakolt változatát,  $H(\omega) = |\omega|q(\omega)$ -t alkalmazzuk a szűrés során. Jelen esetben

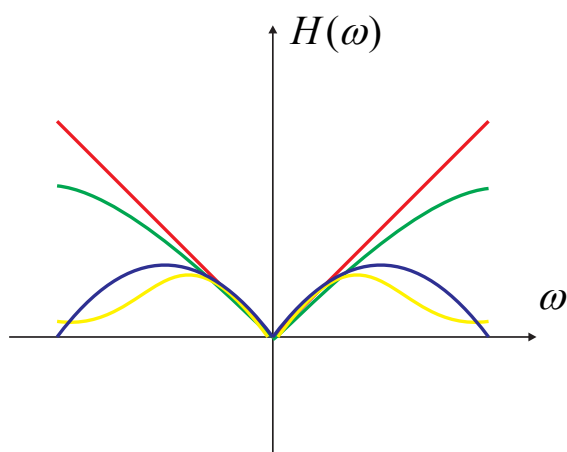
$$q(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |\omega| < \Omega, \\ 0, & \text{ha } |\omega| \geq \Omega \end{cases}$$

és ennek megfelelően a (2.12) integrál már valóban létezik és számítható. A frekvenciatérbeli ideális szűrőt és a fenti módon leírt közelítését, melyet szokás rámpa (ramp) vagy Ram-Lak szűrőnek is nevezni, a 2.6 ábra mutatja.

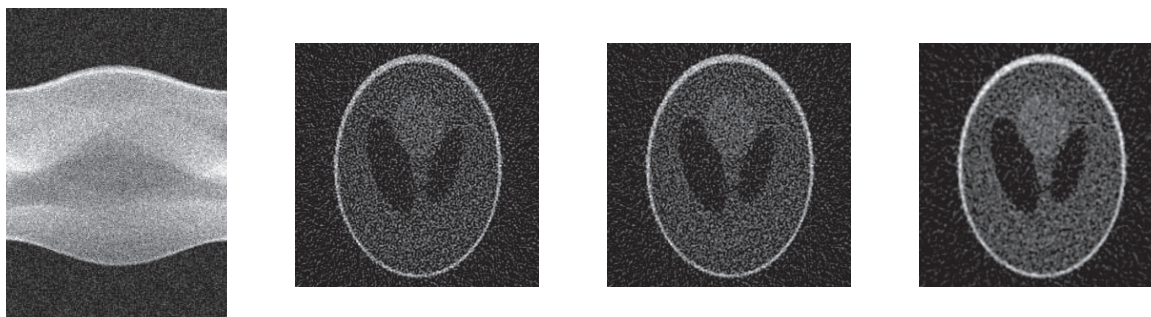


2.6. ábra. Az ideális szűrő és annak sávhatárolt közelítése, a Ram-Lak-szűrő (pirossal).

Természetesen az ideális szűrőt más szűrőkkel is közelíthetjük. A Ram-Lak-szűrő használata célravezető, ha a vetületek zajmentesek vagy csak kevés zajjal terheltek, ami a gyakorlati alkalmazásokban azonban általában nem teljesül. Emellett leggyakrabban még a Hamming-, a koszinusz- és a Shepp-Logan-szűrők használatosak, ezek alakja a 2.7 ábrán látható. A Shepp-Logan-szűrő a magas frekvenciákat tompítja, ami sokszor jó kompromisszumot jelent az alacsony zaj és a jó felbontás között. A Hamming-szűrő a magas frekvenciákat teljesen kiszűri, ami igen alacsony zajt, de csökkent felbontást eredményez. A 2.8 ábra a zajos vetületekből való különböző szűrőkkel történő rekonstrukcióra mutat példát. A megfelelő szűrő kiválasztása mindig az aktuális alkalmazástól függ és rendszerint nagy szaktudást igényel.



2.7. ábra. A ramp- (piros), a Shepp-Logan- (zöld), a koszinusz- (kék) és a Hamming-szűrők (sárga).



2.8. ábra. A Shepp-Logan fantom zajos szinogramja és a rekonstrukció a zajos vetületekből a ramp-, a Shepp-Logan- és Hamming-szűrők alkalmazásával (balról jobbra).

Mindezek a megfontolások lehetővé teszik egy olyan rekonstrukciós módszer kidolgozását is, melyhez egyáltalán nem kell igénybe vennünk a Fourier-transzformációt, hanem helyette a paramétertérben végrehajtott konvolúcióval dolgozhatunk. Az eljárás *konvolúciós rekonstrukció* néven ismert a szakirodalomban és két fő lépésből áll:

1. Képezzük a vetületek konvolúcióját a (2.12)-ben megadott függvénnyel.
2. Végezzük el a visszavetítést.

A gyakorlatban a konvolúciós rekonstrukciót gyakran alkalmazzák, abban az esetben azonban, ha a vetítésugarak száma egy adott vetületben relatíve nagy, hatékonyabb lehet a frekvenciatérben való számítás a gyors Fourier-transzformáció segítségével.



## 3. fejezet

# Algebrai rekonstrukciós technikák

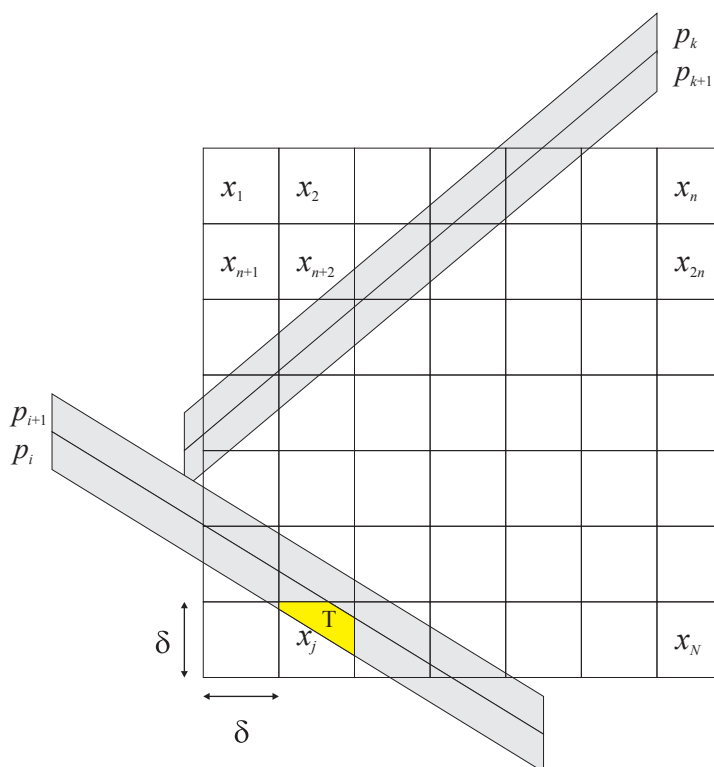
### 3.1. A rekonstrukciós probléma átírása lineáris egyenletrendszerre

Az algebrai rekonstrukciós módszerek kiindulási ötlete az, hogy a rekonstrukciós probléma visszavezethető egy egyenletrendszer megoldásának feladatára. Mivel egy adott pixelen az intenzitásértéket konstansnak tekintjük, így a képfüggvényt ábrázolhatjuk egy mátrixszal, aminek elemei (cellái, pixeljei) a vizsgált objektum megfelelő részének elnyelési együtthatóit reprezentálják. Az algebrai rekonstrukciós módszerek a vetületek és pixeljelek közötti kapcsolatot egyenletek segítségével írják le. A modellt a 3.1 ábra szemlélteti. Tegyük fel, hogy a képméret  $n \times n$ -es. Az egyenletrendszerben az ismeretlenek a mátrix elemei, azaz az  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  vektor (ahol most  $N = n^2$ ). Minden egyes egyenlet egy-egy vetületi sugárnak a mátrix elemeivel, azaz az ismeretlenekkel való kapcsolatát írja le. A  $i$ -edik sugár a  $j$ -edik pixelt  $w_{ij}$  súllyal érinti, ahol a súly meghatározása az adott vetületi modelltől függ. A szemléltető ábrán sávszerű vetületeket használtunk, így  $w_{ij} = T/\delta^2$ , ahol  $T$  a sárgával jelölt terület nagysága,  $\delta$  pedig a pixeljelek oldalhossza. Ha  $M$  darab vetületi sugarunk van (az összes vetítési irányból az összes sugarat leszámolva) és az ezek mentén mért vetületi értékek  $p_1, p_2, \dots, p_M$ , akkor az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk, melyben kizárólag az  $\mathbf{x}$  vektor (azaz a képpontok elnyelési együtthatóit tartalmazó vektor) az ismeretlen

$$\begin{aligned}w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + w_{13}x_3 + \dots + w_{1N}x_N &= p_1 \\w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + w_{23}x_3 + \dots + w_{2N}x_N &= p_2 \\&\vdots \\w_{M1}x_1 + w_{M2}x_2 + w_{M3}x_3 + \dots + w_{MN}x_N &= p_M,\end{aligned}\tag{3.1}$$

ahol a  $w_{ij}$  súly természetesen 0, ha az  $i$ -edik sugár nem érintette a  $j$ -edik pixelt és 0-nál nagyobb, ha valamilyen mértékben érintette azt.

Az ilyen típusú egyenletrendszerek mátrixalgebrai módszerekkel könnyen megoldhatók, a gyakorlati alkalmazások szempontjából azonban több probléma is felmerül a megközelítéssel kapcsolatban. A gyakorlatban a képpontok száma meglehetősen nagy és általában ezzel megegyező nagyságrendű a vetületek száma is. Tegyük fel például, hogy a képméret  $256 \times 256$ ,



3.1. ábra. Az algebrai rekonstrukciós technikákban használt modell.

180 irányból (mondjuk 1 fokként) készítünk vetületeket, és minden irányból 256 vetítősugarat bocsátunk ki. Ekkor  $N = 256 \cdot 256 = 65536$  és  $M = 256 \cdot 180 = 46080$ . Egy ilyen vetületi geometria a gyakorlatban nem ritka, a hozzá tartozó súlyokat tartalmazó  $W = (w_{ij})_{M \times N}$  mátrix elemszáma azonban  $10^9$  nagyságrendű, aminek a kiszámítása és számítógépes tárolása is problémákat vet fel. Ha az egyenletek száma kisebb, mint a változók száma (mint az előbbi példa esetében is), akkor további gondot jelenthet az, hogy az egyenletrendszer alulhatározott, azaz több lehetséges megoldása is van. Emellett a gyakorlati alkalmazásokban a vetületek általában zajjal terhelték, azaz a  $p_1, p_2, \dots, p_M$  értékek legtöbbször nem pontosan ismertek. Ennek a következményeként gyakran előfordul, hogy a (3.1) egyenletrendszer inkonzisztens, azaz a mért adatokkal nem létezik megoldása. Ez szintén lehetetlenné teszi, hogy a közvetlen invertáláson alapuló algebrai módszereket eredményesen alkalmazzuk.

Az előbb tárgyaltak alapján célszerű a (3.1) egyenletrendszernek csak egy közelítő megoldását keresni. Az egyes algebrai rekonstrukciós módszerek alapvetően abban különböznek, hogy a vetületek ismeretében a felállított egyenletrendszert milyen közelítő módszerrel oldják meg úgy, hogy az eredményként előálló képmátrix vetületei a lehető legközelebb álljanak az eredeti képmátrix vetületeihez. A továbbiakban a legalapvetőbb ilyen eljárásokat mutatjuk be.

## 3.2. ART – Algebrai rekonstrukciós technika

Az ART (Algebraic Reconstruction Technique, algebrai rekonstrukciós technika) az elsőként publikált olyan rekonstrukciós eljárás, mely egyenletrendszer megoldásával közelíti a re-

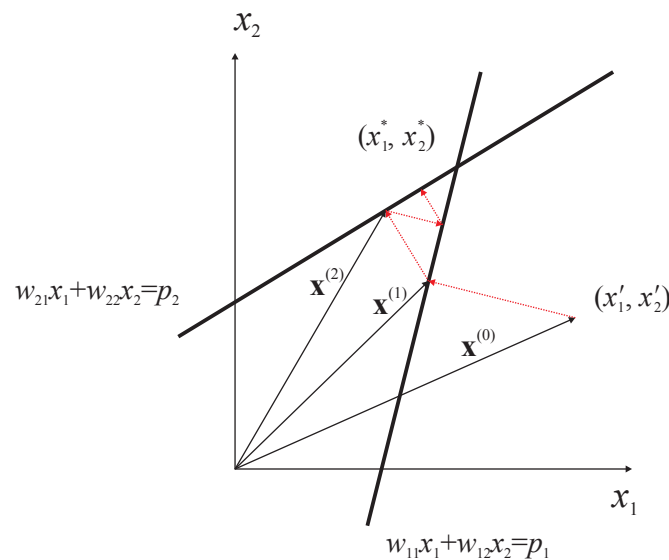
konstruálandó objektum képét [26]. Az eljárást szokás még Kaczmarz-módszernek is nevezni [32]. Az ART megjelenése óta annak számtalan változata született, mi itt csak az alapeljárást mutatjuk be.

Az  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ismeretlen kép tekinthető egy ismeretlen  $N$ -dimenziós térbeli pontnak. Ekkor tetszőleges  $i$ -re ( $i = 1, \dots, M$ ) az  $i$ -edik egyenlet

$$w_{i1}x_1 + w_{i2}x_2 + w_{i3}x_3 + \dots + w_{iN}x_N = p_i$$

egy hipersíkot ír le az  $N$ -dimenziós térben. Konzisztens esetben – azaz ha az egyenletrendszernek van megoldása – mindig található olyan  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$  pont, ami kielégíti az összes hipersík egyenletét. A módszerrel iteratíván közelítünk egy ilyen pontot oly módon, hogy egy tetszőlegesen megválasztott  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$  kiindulási pontból merőlegesen lépünk az egyik hipersíkra, majd innen tovább megint merőlegesen a következőre, és így tovább. Ha az eljárást az összes hipersíkra végrehajtottuk, akkor előlről kezdjük az iterációt. Bizonyos itt részletezésre nem kerülő feltételek teljesülése esetén a módszer véges vagy végtelen lépésben konvergál egy megoldásul szolgáló  $\mathbf{x}^*$  ponthoz [27].

Két pont és két vetületi sugár esetén a módszer szemléletes (lásd a 3.2 ábrát). Az egyenlet-



3.2. ábra. Az ART iteráció geometriai reprezentációja két képpont és két vetületi sugár esetén.

rendszer ekkor a

$$w_{11}x_1 + w_{12}x_2 = p_1$$

$$w_{21}x_1 + w_{22}x_2 = p_2$$

alakot ölti és a két hipersík valójában két egyenes a síkon. Tegyük fel, hogy az egyenesek nem párhuzamosak, tehát pontosan egy metszéspontjuk van. Legyen  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^{(0)}$  a kezdőpontba mutató vektor. Az iterációs lépések során felváltva lépünk az egyenesekre, a korábbi pontból merőleges irányban, így kapva az  $\mathbf{x}^{(1)}$ ,  $\mathbf{x}^{(2)}$ , stb. pontokat. A 3.2 ábrán jól látható, hogy ez a pontsorozat a két egyenes metszéspontjához, azaz az egyenletrendszer megoldásához konvergál.

Általános esetben egy iterációs lépést (az aktuális megoldási javaslatához tartozó pont  $(i-1)$ -edik hipersíkról az  $i$ -edik hipersíkra történő merőleges vetítését) az alábbi módon írhatjuk fel

$$\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i-1)} - \frac{\mathbf{x}^{(i-1)} \cdot \mathbf{w}_i - p_i}{\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i} \mathbf{w}_i, \quad (3.2)$$

ahol  $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN})$ . Itt és ebben a fejezetben a továbbiakban a  $\cdot$  műveleti jellel két vektor belső szorzatát jelöljük. Tovább finomítva az iterációs lépés egyenletét kapjuk, hogy minden iterációban elegendő kiszámítanunk a

$$\Delta x_j^{(i)} = x_j^{(i)} - x_j^{(i-1)} = \frac{p_i - q_i}{\sum_{k=1}^N w_{ik}^2} w_{ij}$$

különbséget az  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_N^{(i)})$  vektor minden egyes komponensére, ahol  $q_i$  az aktuális megoldás  $i$ -edik vetítősugarán vett vetülete azaz

$$q_i = \sum_{k=1}^N w_{ik} x_k^{(i-1)}.$$

Vagyis egy iterációs lépésben egy adott vetítősugar esetén ki kell számolnunk az aktuális megoldási javaslatához tartozó vetületi értékeket, és ennek valamint az elvárt vetületi értéknek a különbséget a megfelelő súlyok szerint szét kell osztanunk azokon a pixeleken, melyeket az adott vetületi sugár érint.

A lépés helyességének megértéséhez tekintsük a 3.3 ábrát. Tegyük fel, hogy a kiindulási megoldás az  $\mathbf{x}^{(0)}$  vektorral adott (melyet a  $H$  pont jelöl) és ezt az első egyenlet által meghatározott hipersíkra (a  $G$  pontba) szeretnénk merőlegesen vetíteni. Ennek a hipersíknak az egyenlete  $\mathbf{w}_1 \mathbf{x} = p_1$  és a hipersík értelemszerűen a  $\mathbf{w}_1$ -gyel egyállású és megegyező nagyságú  $OW$  helyvektorra merőleges. Az  $OU$  egységvektorra

$$\vec{OU} = \frac{\mathbf{w}_1}{\sqrt{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}. \quad (3.3)$$

A hipersík origótól vett távolságát az  $|\vec{OA}| = \vec{OU} \cdot \vec{OG}$  skaláris szorzattal fejezhetjük ki, hiszen  $\vec{OA}$  éppen  $\vec{OG}$ -nek az  $\vec{OU}$ -ra eső merőleges vetülete. Az eddigiekből kapjuk, hogy

$$|\vec{OA}| = \vec{OU} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}} (\mathbf{w}_1 \cdot \vec{OG}) = \frac{p_1}{\sqrt{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}}, \quad (3.4)$$

hiszen a  $G$  pont természetesen rajta van vetítési hipersíkon. A hipersíkra való vetítés  $\vec{HG}$  vektorára teljesül, hogy

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \vec{HG}. \quad (3.5)$$

Mivel az  $AFHG$  pontok egy téglalapot határoznak meg, így

$$|\vec{HG}| = |\vec{OF}| - |\vec{OA}| = \mathbf{x}^{(0)} \cdot \vec{OU} - |\vec{OA}|, \quad (3.6)$$

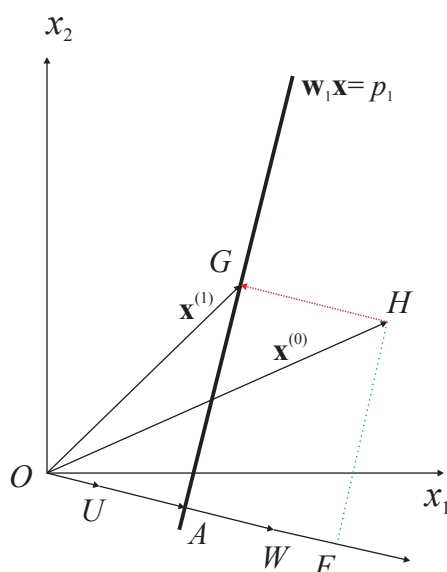
hiszen az  $\vec{OF}$  vektor az  $\vec{OH} = \mathbf{x}^{(0)}$  vektornak a  $\vec{OU}$ -ra eső merőleges vetülete. Ekkor a (3.3) és (3.4) egyenleteket a (3.6) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$|\vec{HG}| = \frac{\mathbf{x}^{(0)} \cdot \mathbf{w}_1 - p_1}{\sqrt{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}},$$

ahonnan pedig, figyelembe véve, hogy  $\vec{HG}$  és  $\vec{OU}$  ellentétes irányú vektorok, kapjuk hogy

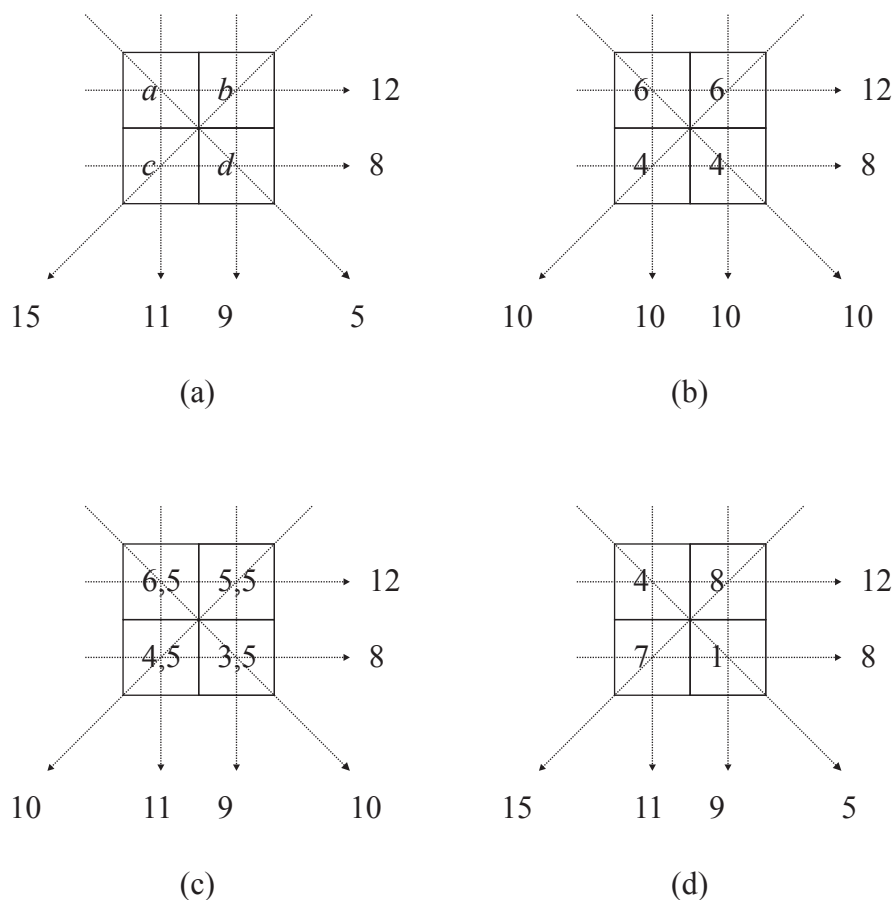
$$\vec{HG} = -|\vec{HG}| \vec{OU} = -\frac{\mathbf{x}^{(0)} \cdot \mathbf{w}_1 - p_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1} \mathbf{w}_1,$$

ami a (3.5) egyenlettel éppen a (3.2) korrekciós formula helyességét igazolja.



3.3. ábra. Az ART korrekciós lépésének bizonyítása.

Az ART rekonstrukciós eljárást egy nagyon egyszerű példán illusztráljuk. Tegyük fel, hogy a rekonstruálandó kép mérete  $2 \times 2$ , és 6 darab vetítősugarunk van, melyeknek elhelyezkedése és a rajtuk mért vetületi értékek a 3.4(a) ábrán láthatóak. Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltesszük azt is, hogy a vetületi hibákat minden az adott vetítősugár által érintett pixel esetében egyenletesen vetítjük vissza (tehát  $w_{ij} = 1$ , ha az  $i$ -edik sugár áthalad a  $j$ -edik pixel középpontján és  $w_{ij} = 0$  egyébként). Ekkor az azonos irányú vetítősugarakon egymástól függetlenül egyszerre terjeszthetjük vissza a vetületi hibát. Tegyük fel, hogy a kiindulási képünk minden pixele a 0 értéket tartalmazza, azaz  $a = b = c = d = 0$ . Elsőként a vízszintes vetületeket véve, az  $a$  és  $b$  cellákra  $12/2 = 6$ , míg a  $c$  és  $d$  cellákra  $8/2 = 4$  vetületi hibát terjesztünk vissza. A kapott mátrixot és az aktuális vetületeit a 3.4(b) ábrán láthatjuk. Ezek után a függőleges vetületeken kialakuló hibák miatt a következő értékek kerülnek be a mátrixba:  $a = 6 + (11 - 10)/2 = 6.5$ ,  $b = 6 + (9 - 10)/2 = 5.5$ ,  $c = 4 + (11 - 10)/2 = 4.5$  valamint  $d = 4 + (9 - 10)/2 = 3.5$  (lásd 3.4(c) ábra). Végül az átlós irányú vetületek alapján:  $a = 6.5 + (5 - 10)/2 = 4$ ,  $b = 5.5 + (15 - 10)/2 = 8$ ,  $c = 4.5 + (15 - 10)/2 = 7$  és  $d = 3.5 + (5 - 10)/2 = 1$  adódik, ami már kielégíti az összes vetületet (3.4(d) ábra).

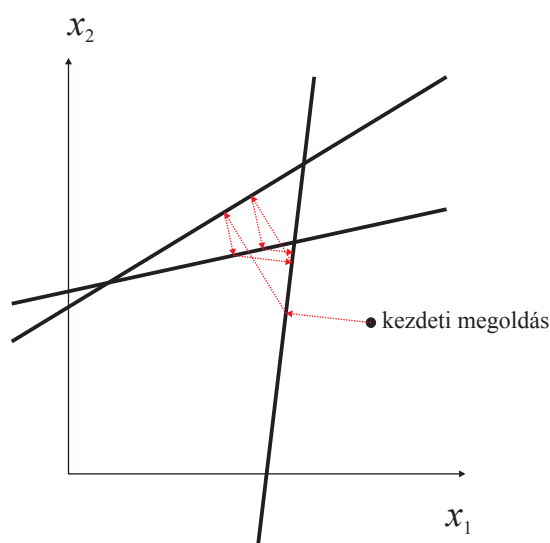


3.4. ábra. Példa az ART lépéseire.

### 3.3. További megfontolások

Az előző fejezeten ismertett eljárás konvergenciájának sebessége függ a hipersíkok által bezárt szögektől. Ha azok páronként merőlegesek, akkor  $M$  lépésben megtalálhatjuk a megoldást, míg ha kis szöget zárnak be egymással, akkor a konvergencia lassú lehet. Ezért a hipersíkok bejárásának sorrendjét célszerű gondosan megválasztanunk. Másrészt ha az egyenletrendszer alulhatározottságából eredően több megoldás is lehetséges, akkor az eljárás ahhoz a megoldáshoz konvergál, ami a kezdőponthoz legközelebb esik, tehát a kezdő megoldási javaslat kiválasztásának is hatása van a rekonstrukció eredményére. Végül ha az egyenletrendszer – zajból kifolyólag – nem megoldható, akkor az eljárás nem konvergál, hanem egy idő után a hipersíkok metszéspontjai körül ciklizál, ahogyan az a 3.5 ábrán látható 3 vetítésű és 2 képpont esetén [27].

Ami a (3.2) egyenletben megadott korrekciós lépést illeti, ehhez vagy minden lépésben a súlyok újraszámítása szükséges, vagy az összes súly (azaz a vetületi geometria) eltárolása, ami nagyméretű egyenletrendszer esetében az eljárást (futási idő vagy memóriahasználat szempontjából) túlságosan költségessé teheti. A számítás meggyorsítása és egyszerűsítése érdekében ezért gyakran a  $w_{ij}$  súlyokat csak úgy szokás venni, hogy  $w_{ij}=1$ , ha az  $i$ -edik sugár áthalad a  $j$ -edik pixel középpontján és  $w_{ij}=0$  egyébként (ahogyan ezt az előző fejezet példájában is



3.5. ábra. Az ART ciklizálása inkonzisztens egyenletrendszer esetén.

tettük). Ekkor a korrekciós lépés az egyszerű

$$\Delta x_j^{(i)} = \frac{p_i - q_i}{N_i} \quad (3.7)$$

alakot ölti, ahol  $N_i$  azt jelöli, hogy az  $i$ -edik vetítősugár hány pixel középpontján halad keresztül. A korrekciót kizárólag csak azokra pixelekre kell elvégeznünk, melyek középpontján áthalad az adott vetítősugár.

A fenti megfontoláson alapuló eljárást könnyű implementálni, de bizonyos esetekben a rekonstrukció minősége a valódi súlyok (3.7) alapú durva becslése miatt nem kielégítő. Ilyenkor korrekciós lépésként a

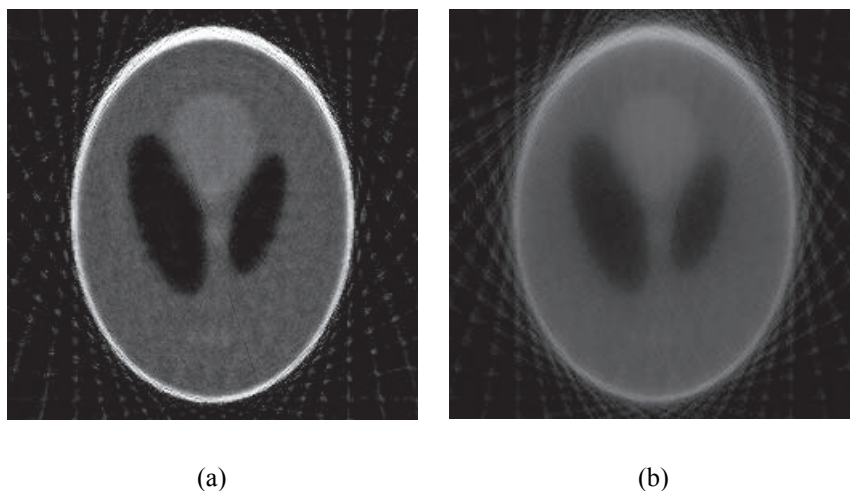
$$\Delta \vec{x}_j^{(i)} = \frac{p_i}{L_i} - \frac{q_i}{N_i}$$

formulát szokás használni, ahol  $L_i$  az  $i$ -edik vetületi sugár rekonstrukciós területen áthaladó részének  $\delta$ -val normalizált hossza.

A jobb képminőség érdekében szokás még a  $\Delta x_j^{(i)}$  értékek helyett a pixeleket csak egy  $\alpha \Delta x_j^{(i)}$  értékkel módosítani, ahol  $0 < \alpha < 1$  egy az iterációs számtól függő csökkenő érték. Ezáltal általában simább képet lehet kapni, amiért az árat a lassabb konvergenciával fizetjük meg.

### 3.4. SIRT – Szimultán iteratív rekonstrukciós technika

A SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique, szimultán iteratív rekonstrukciós technika) szintén az ART alapötletéből indul ki, de az egyenletrendszer hibáját – az aktuális  $q_i$  vetületi értékeket és az elvárt  $p_i$  vetületi értékek különbségét – egy iterációban egyszerre vetíti vissza az  $x_j$  változókon. Azaz egy iterációban minden pixelre meghatározza az összes azon a pixelen átmenő vetítősugar esetében a visszaterjesztendő hibát, de csak egyszer módosítja a pixel értékét, mégpedig a visszaterjesztendő hibák átlagával. A 3.4(a) ábra helyzetét újra kiindulási alapul véve a SIRT első iterációjában adódó értékek:  $a = \frac{12+11+5}{3} = \frac{14}{3}$ ,  $b = \frac{12+9+15}{3} = 6$ ,  $c = \frac{8+11+15}{3} = \frac{17}{3}$  és  $d = \frac{9+8+5}{3} = \frac{11}{3}$ , amely azonnal mutatja, hogy még nem konvergált be az eljárás a minden vetületet kielégítő megoldásba. A SIRT tehát (általában) lassabban konvergál, mint az ART. Ugyanakkor a SIRT simább képet ad, azaz az így kapott eredményképpen a szomszédos pixeleken ritkábban jelennek meg nagy szürkeárnyalatbeli különbségek [27]. A két módszer egy további összehasonlítását tekinthetjük meg a 3.6 és 3.7 ábrákon, valamint az [ARTvideo.avi](#) és [SIRTvideo.avi](#) videókon, ahol mindkét esetben a rekonstrukció első 20 iterációjának eredményét tüntettük fel lépésenként.

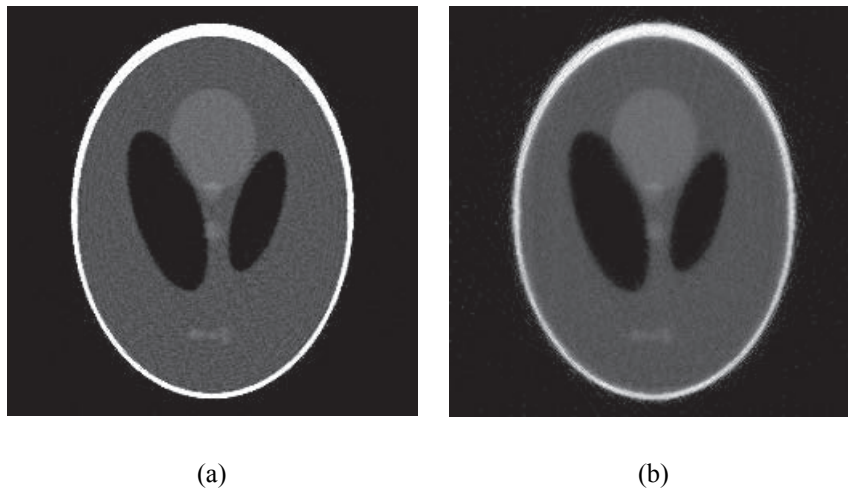


3.6. ábra. Példa a SIRT lassabb konvergenciájára (20 vetület, 10 iteráció). (a): ART rekonstrukció, (b): SIRT rekonstrukció.

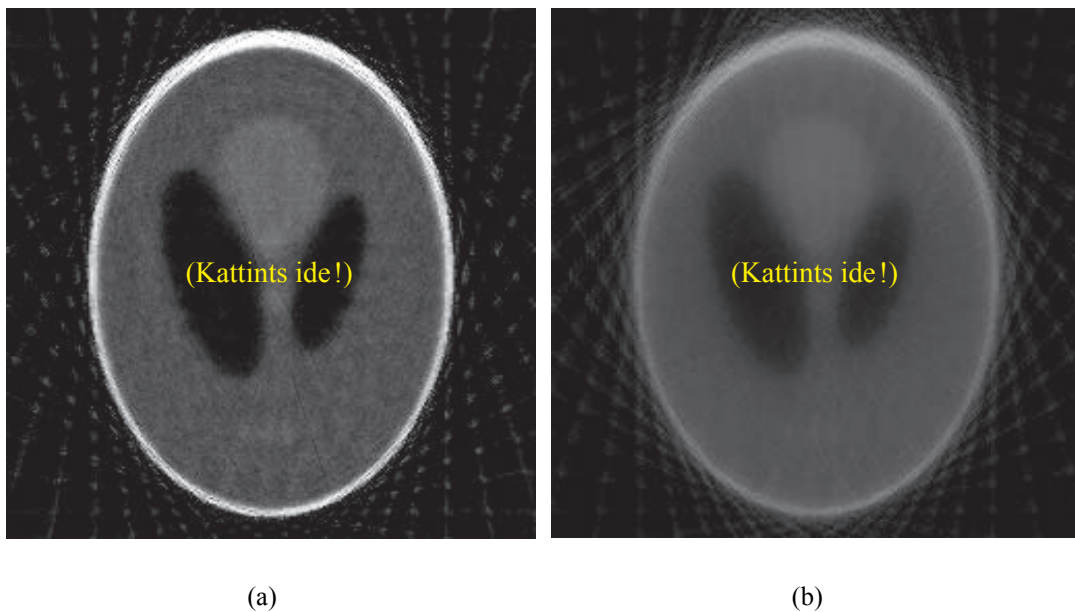
### 3.5. SART – Szimultán algebrai rekonstrukciós technika

A SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique, szimultán algebrai rekonstrukciós technika) az alap ART és a SIRT eljárások jó tulajdonságait próbálja ötvözni, így egyszerre ad egy gyors és jó minőségű képet szolgáltató algoritmust. Az eljárás részletes ismertetése meghaladja ezen jegyzet terjedelmi korlátait, így itt csak a legfontosabb ötletek kiemelésére szorítkozunk, melyek az alábbiak (a módszer részletes leírása megtalálható a [33] könyvben):





3.7. ábra. Példa a SIRT simább képére (45 vetület, 70 iteráció). (a): ART rekonstrukció, (b): SIRT rekonstrukció.



- A diszkretizálásból eredő hibák kiküszöbölése végett a vetületképzést nem pixel alapon, hanem úgynevezett bilineáris interpolációval végezzük, mely közelebb áll a folytonos képreprezentációhoz.
- A vetületi hibák visszaterjesztését az összes az adott vetületi irányhoz tartozó vetítősugáron (de nem az összes vetítősugáron!) szimultán módon, átlagolva egyszerre hajtjuk végre.

- A vetületi hibák visszaterjesztését nem egyenletesen, hanem egy Hamming-ablak segítségével végezzük, mely a kép közepén a kép szélétől vett távolsággal arányosan nagyobb súllyal terjeszti vissza a hibát, mint annak szélein.

### 3.6. Az algebrai és a transzformáción alapuló rekonstrukciós technikák összehasonlítása

A képrekonstrukció leggyakrabban használt eljárása a szűrt visszavetítés, mely rendkívül elegáns elméleten nyugszik, sebessége a gyakorlatban is kielégítő és a szűrőkön keresztüli jó paraméterezhetősége miatt általánosan használható. A tapasztalat azonban az, hogy a transzformáció alapú technikák akkor adnak pontos eredményt, ha sok vetület áll rendelkezésre és ezek eloszlása egyenletes a 180 vagy a 360 fokos tartományon, ami ezen eljárások elméletéből egyenesen következik. Az algebrai rekonstrukciós technikák ezzel szemben akkor is sikerrel bevethetők, ha a fenti feltételek nem, vagy csak részben teljesülnek. Alkalmazhatóságuknak jelentősége megnő továbbá akkor is, ha a vetületek csonkoltak, azaz bizonyos irányokból a vizsgált objektumnak csak egy részéről érhető el vetületi információ (annak fizikai kiterjedése miatt, vagy legyezőnyaláb vetületképzés esetén). Az iteratív rekonstrukciós technikák egyszerűen általánosíthatók legyezőnyaláb vagy még speciálisabb vetületi geometriák esetére is, a modellbe könnyen beépíthetők a vetítésugarak kisebb elhajlásából adódó hatások és kezelni tudják a sugárzás energiájának gyengüléséből eredő hatásokat is. Ugyanakkor általában pontatlanabbak és iteratív jellegüknél fogva lassabbak a transzformáció alapú technikáknál. Az algebrai rekonstrukciós módszerek további előnye, hogy bizonyos előzetes tudás (úgy nevezett *a-priori információ*) is beépíthető a rekonstrukciós eljárásba. Például, ha bizonyos pixelek szürkeárnyalata előre ismert (mondjuk egy korábbi rekonstrukció eredményeként), akkor könnyen kidolgozható az algebrai rekonstrukció egy olyan változata, mely ezen rögzített pixelértékeket már nem módosítja. Többek között ezen az észrevételen alapul az úgy-nevezett *Diszkrét algebrai rekonstrukciós technika* (DART - Discrete Algebraic Reconstruction Technique) [12].

## 4. fejezet

# A CT képképzés technikája

Ebben a fejezetben a CT berendezés technikai felépítésével, annak történeti fejlődésével ismerkedünk meg. A berendezések műszaki korlátaiból és egyéb a vetületek kinyerése során keletkező pontatlanságokból fakadó következményeket is tárgyaljuk. Ezen ismeretek elengedhetetlenek a precíz képrekonstrukciós algoritmusok kidolgozásához, azok alkalmazhatóságának megértéséhez. A fejezet elolvasása előtt javasoljuk az olvasónak, hogy idézze fel az 1. fejezetben tárgyalt alapvető vetületi geometriákat.

### 4.1. A CT generációi

Az 1. generációs (1G) CT szkennerek (4.1(a) ábra), melyek 1970-ből származnak, egyetlen (pontoszerű) Röntgen-cső forrást és egyetlen detektort tartalmaztak. Az adott irányú különböző vetítésű sugarak előállításához mind a forrást mind a detektort egymással párhuzamosan kellett eltolni, további irányú vetületek kinyeréséhez pedig a forrás-detektor párt egyidejűleg el kellett forgatni. Ezzel a berendezéssel a páciens vizsgálata hosszú percekig (vagy akár órákig) is eltarthatott, aminek következtében a beteg mozgásából adódóan a képminőség gyenge volt. Természetesen ez a technika ma már túlhaladott, ugyanakkor a további megoldások alapját képezte, és több előnyös tulajdonsága is volt. A kibocsátó és érzékelő elemeket elviekben tetszőlegesen lehetett egyidejűleg eltolni, illetve forgatni (a gyakorlatban 160 sugarat alkalmaztak irányonként, a forgatás pedig 1 fokként történt meg), ami tetszőlegesen sok irányú tetszőlegesen sűrű vetítésű sugarazást tett lehetővé, azaz a képképzési eszköz elve közel állt a folytonos elméleten nyugvó matematikai módszerekhez. Emellett, mivel a forrás és a detektor is lényegében pontoszerű volt, a sugarakat érő kölcsönhatásoknak betudható sugárelhajlás nem okozott téves észlelést.

A 2G CT szkennerek (1972), (lásd 4.1(b) ábra) továbbra is egyetlen pontoszerű forrással dolgoztak, de a túlsó oldalon már nem egy detektor volt elhelyezve, hanem egy egész detektorsor. Továbbra is eltolni valamint forgatni is kellett az elemeket, a több detektorból adódóan azonban nagyobb léptékű (például 6 detektossal és 1 fokot bezáró sugarakkal 6 fokos) forgatásra nyílt lehetőség. Az adatkinyerés ideje tehát jelentősen lerövidült, ami a mozgásból eredő képminőségét rontó hatásokat csökkentette. Az egyik legfejlettebb ilyen típusú szkennerek 30 detektort tartalmaztak és 20 másodperc alatt képesek voltak egy szelvény adatainak a kinyerésére. Ha a páciens megkérték, hogy lélegzetét tartsa vissza, akkor még a tüdő emelkedéséből és süllyedéséből

származó hibák is redukálhatóak voltak. A több egymás mellé helyezett detektor miatt azonban a sugárelhajlás okozta jelenségek csökkentésére szükség volt úgynevezett kollimátorok bevezetésére, melyek csak a megfelelő irányból érkező sugarakat engedték a megfelelő detektorokhoz, ez pedig nagyobb dózis alkalmazását tette szükségessé. A párhuzamos vetületképzési geometriát ebben a rendszerben felváltotta az ekvidisztáns legyezőnyaláb geometria, mely azonban még nem fedte le a teljes vizsgálati keresztmetszetet.

Az első 3G CT készüléket 1976-ban helyezték üzembe (4.1(c) ábra). Itt a Röntgen-csőből kilépő sugarakat a túloldalon egy teljes detektorív érzékelté, melynek mérete akkora volt, hogy az így kialakult ekvianguláris legyezőnyaláb geometria segítségével már a teljes vizsgálati tartomány lefedhető volt. Ennek következtében a rendszerből ki lehetett iktatni az eltolási mozgást, ami természetesen jelentősen lerövidítette az adatgyűjtés idejét és javította a rekonstrukció minőségét is. A legkorszerűbb ilyen elvű berendezésekkel már egy másodperc alá lehetett szorítani a szkennelési időt. Természetesen a berendezés a korábbiaknál költségesebb volt a benne lévő sok detektorelem miatt. A technológia azonban olyan előnyösnek bizonyult, hogy a piacon napjainkban fellelhető CT berendezések majdnem mindegyike a 3G-s elven működik.

Az elsőként 1978-ban megjelent 4G CT szkennerekben (4.1(d) ábra) a detektorívet lecserélték egy teljes rögzített detektorkörre, így már csak a Röntgen-forrásnak kellett forgómozgást végeznie. Ez tovább gyorsította az adatgyűjtés folyamatát és javította a képminőséget is. A megoldás azonban rendkívül költségesnek bizonyult, továbbá a sugárforrás és egy adott detektor által bezárt szög már nem volt állandó, ami alkalmazhatatlanná tette a kollimációs technikát. Így a 4G-s szkennerek nem igazán terjedtek el.

Az elektronnyaláb (5G) szkennerek az 1980-as évek elején jelent meg abból a célból, hogy a leképező eljárással akár a szív szapora mozgását is követni lehessen. Ebben a konstrukcióban a teljes detektorgyűrűt egy nagy röntgenanód-gyűrű veszi körül, melynek elemeit egy elektronsugár segítségével különböző időpontokban gerjesztik. A berendezés nem tartalmaz mozgó elemet, lényegében az elektronnyaláb pásztázza végig az anódgyűrűt és így keletkeznek a vetületek a különböző irányokból. Ennek eredményeként 50 milliszekundumos (azaz a szív mozgását is követni tudó) szkennelési idő is elérhető volt.

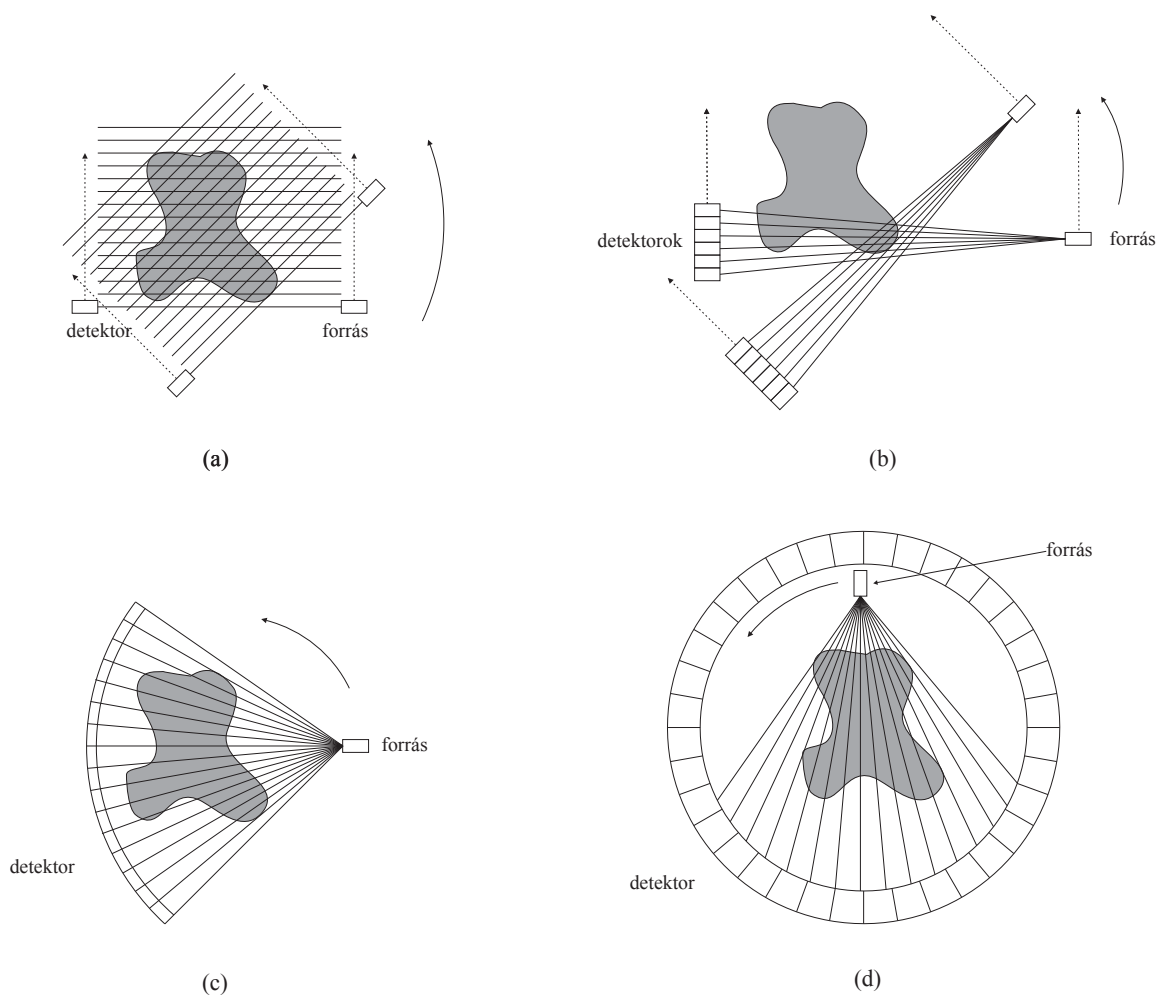
Az 1990-es évek legelejére tehető a 6G CT készülékek megjelenése. Ezek alapvetően megőrizték a 3G vagy 4G szkennerek felépítésének alapjait. Az újítás az bennük, hogy a testről a 3D-s képet nem szeletenként alkotják meg, hanem a vetületek képzése során a páciens a vizsgálóasztallal együtt folyamatosan elcsúsztatásra kerül a fej-láb (azaz a forrás-detektor síkjára merőleges) irányban. A vetületek egy spirális vagy más szóval helikális vonal mentén képződnek, így a szomszédos szeletekről átfedő információhoz jutunk, ami a 3D-s képalkotást elősegíti. Ezekben a berendezésekben egy 60 cm-es torzóról a vetületképzés körülbelül fél percig tart. A legújabb (7G) úgy nevezett multislice CT-k ezt az eljárást még tovább fejlesztve nem detektorívet, hanem detektorívek egymásra helyezett tömbjét tartalmazzák, és így a legyezőnyaláb geometriát felváltja bennük a kúpnyaláb geometria. Ennek következtében a spirális mozgás mellett egyszerre több szeletről is nyerhető információ, mely rendkívül jó minőségű 3D-s képeket eredményez.

## 4.2. Rekonstrukció legyezőnyaláb és helikális vetületképzés mellett

Egyszerősége miatt eddig csupán a párhuzamos vetületi geometriával foglalkoztunk és arra az esetre dolgoztunk ki rekonstrukciós algoritmusokat. Ezen fejezetben célunk annak megmutatása, hogy mi a teendő legyezőnyaláb illetve helikális vetületképzés esetén. Csak a transzformáció alapú technikákra fogunk koncentrálni, ugyanis az algebrai módszerek – ahogy erről korábban már említést tettünk – mindenféle probléma nélkül kezelni tudják a bonyolultabb vetületi geometriákat is.

### 4.2.1. Rekonstrukció legyezőnyaláb vetületekből

Ahogy azt már az 1. fejezetben említettük, a legyezőnyaláb vetületképzésnek két altípusa ismert. Nézzük először, hogy mit tudunk mondani az ekvianguláris geometria esetén. A továbbiakban középponton a vetületi geometria képzeletbeli középpontját, középsugáron pedig



4.1. ábra. Az 1G, 2G, 3G és 4G CT készülékek felépítése.

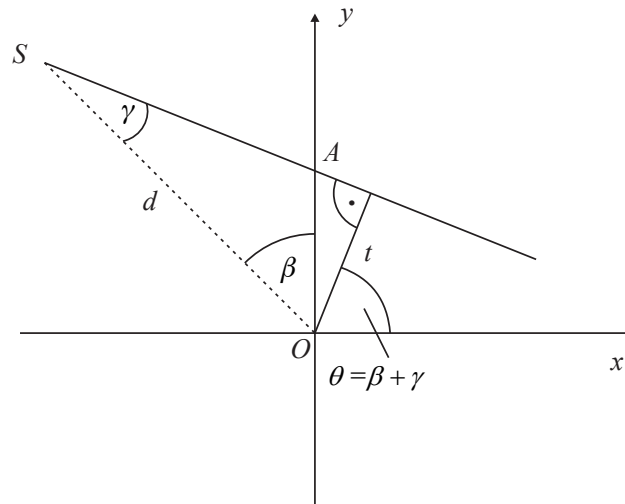
a (képzeltbeli) középponton átmenő képzeltbeli vetítősugarat értjük. Ekkor egy tetszőleges vetítősugarat egyértelműen meghatározhatunk két paraméterrel, a középsugar  $y$  tengellyel bezárt  $\beta$  szögével, valamint a vetítősugar középsugárral bezárt  $\gamma$  szögével (lásd a 4.2 ábrát). Emlékezzünk vissza, hogy párhuzamos geometria esetén egy vetítősugarat annak  $\Theta$  szöge és  $t$  középponttól vett távolsága határozott meg. Elemi geometriai megfontolásokból adódik, hogy egy  $(\gamma, \beta)$  paraméterpárral megadott legyezőnyaláb vetítősugar megfelel a  $(t, \Theta)$  paraméterpárral meghatározott párhuzamos vetítősugárnak, amennyiben

$$\Theta = \beta + \gamma \quad (4.1)$$

és

$$t = d \sin \gamma \quad (4.2)$$

teljesül, ahol  $d$  a röntgenforrás középponttól vett távolsága. A 4.2 ábra jelöléseivel ugyanis a  $\Theta$ -val jelzett szög merőleges szárú szög az  $SOA$  háromszög  $A$ -nál elhelyezkedő külső szögével.



4.2. ábra. Áttérés az ekvianguláris legyezőnyaláb geometriáról a párhuzamosra. A sugárforrást  $S$ , a középpontot  $O$ , a középsugarat pedig szaggatott vonal jelöli.

Hasonlóan járhatunk el az ekvidisztáns geometria esetén is. Ekkor egy vetítősugarat az  $(s, \beta)$  paraméterpár határoz meg, ahol  $s$  a középpont és a vetítősugar valamint a középvonalon áthaladó és a detektorsorral párhuzamos egyenes metszéspontjának távolságát méri,  $\beta$  pedig ismét a középsugar  $y$  tengellyel bezárt szögét jelöli (lásd a 4.3 ábrát). A (4.1) és (4.2) egyenletek ekkor a

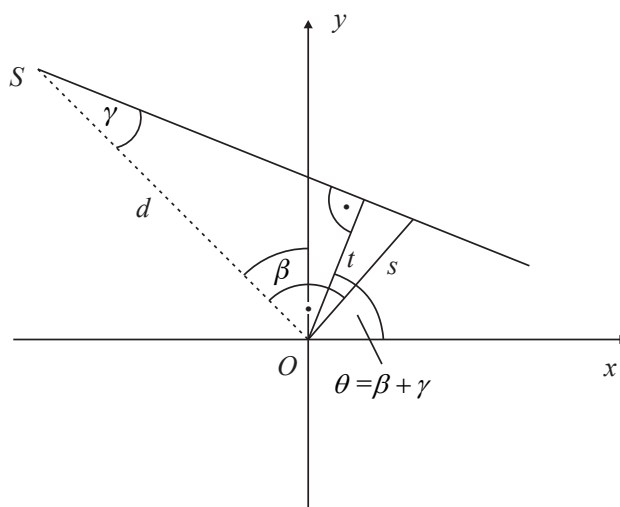
$$\Theta = \beta + \arctan \frac{s}{d},$$

valamint a

$$t = \frac{ds}{\sqrt{d^2 + s^2}}$$

formát öltik, azaz ezt az esetet könnyűszerrel visszavezethetjük az ekvianguláris esetre.

Ezen kapcsolatok alapján már kidolgozhatjuk a szűrt visszavetítés különböző legyezőnyaláb vetületképzésre vonatkozó változatait, melyek részletezésétől eltekintünk, a konkrét levezetés megtalálható például a [30] könyvben.



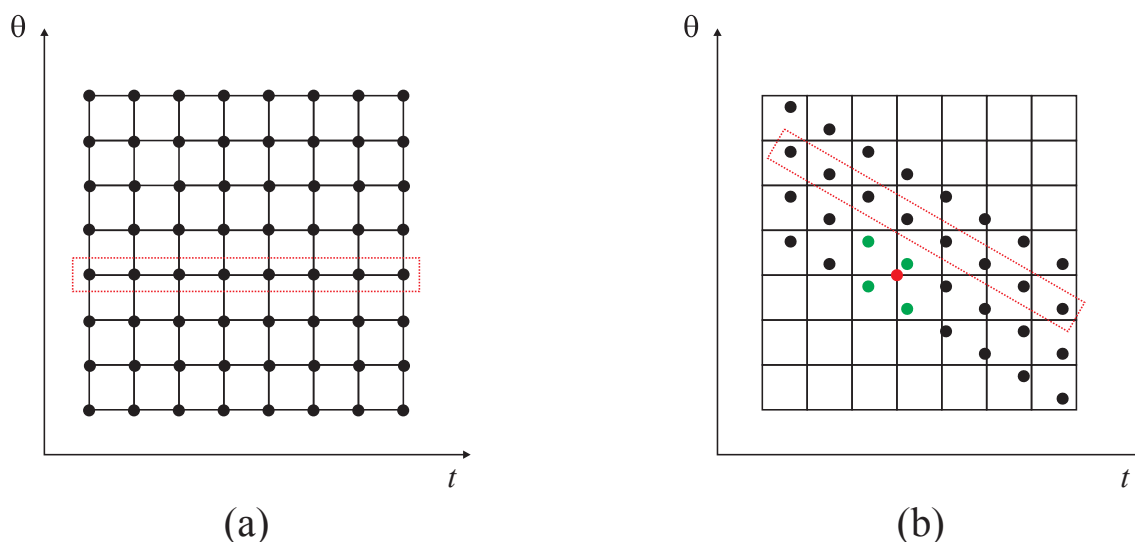
4.3. ábra. Áttérés az ekvidisztáns legyezőnyaláb geometriáról a párhuzamosra. A sugárforrást  $S$ , a középpontot  $O$ , a középsugarat pedig szaggatott vonal jelöli.

### 4.2.2. Rebinning

Habár az előzőekben bemutatott elgondolások alapján kidolgozható a szűrt visszavetítés algoritmusát közvetlenül legyezőnyaláb vetületek esetére is, az így kapott módszer számítási igénye lényegesen nagyobb, mint a párhuzamos vetületekre leírt eljárásé. Ugyanakkor látható, hogy erős kapcsolat van a párhuzamos és a legyezőnyaláb vetületek között. Ez a kapcsolat alternatívaként szolgálhat a legyezőnyaláb vetületekből történő rekonstrukcióra, amennyiben sikerül a legyezőnyaláb-geometriából szerzett adatokat úgy rendezni, mintha azok párhuzamos vetületi geometriából származnának. Ez az eljárás a *rebinning*, mely a következő észrevételen alapszik. Párhuzamos vetületek esetén minden egyes vetítésugáron mért érték a szinogram egy-egy pontját adja meg, mely pontok egy szabályos négyzetrácson helyezkednek el, és egy vetületnek egy sor felel meg a szinogramon, ahogyan azt a 4.4(a) ábra mutatja. Ezzel szemben legyezőnyaláb vetületek esetén az egy-egy vetítésugár által a szinogramból meghatározott pontok általában nem esnek rá erre a négyzetrácsra, és általánosságban az sem teljesül, hogy egy sorra vagy akár csak egy egyenesre esnének (lásd a 4.4(b) ábrát). Ahhoz, hogy a szinogramot megkaphassuk a négyzetrács pontjaiban és így alkalmazhassuk a párhuzamos vetületre kidolgozott módszereket, csupán annyi a teendőnk, hogy a legyezőnyaláb vetületek által szolgáltatott értékeket valamilyen módon interpoláljuk a megfelelő rácspontokra. Ezt az interpolációt végezhetjük például a négy legközelebbi szomszéd átlagolásával (lásd újra a 4.4(b) ábrát), vagy egyéb annál sokkal összetettebb (és természetesen több számítást igénylő) módon is.

### 4.2.3. Rekonstrukció helikális vetületképzés esetén

A legújabb CT szkennerek a helikális (spirális) vetületképzést alkalmazzák, azaz a páciens folyamatosan csúsztatják a vetületek kinyerése során a forrás-detektor által meghatározott síkra merőlegesen. Ennek következményeként a sorban egymás után kinyert vetületek nem



4.4. ábra. A szinogram mintavételezése (a) párhuzamos vetületek és (b) legyezőnyaláb vetületek esetén. Mindkét esetben szaggatott vonallal körülhatárolva az egy vetülethez tartozó vetítésugarakból adódó információ. A (b) ábrán zölddel jelzett pontok vesznek részt a pirossal jelzett rácspont értékének kialakításában az interpoláció során.

ugyanarról a keresztmetszeti szeletről készülnek, hanem újra és újra az aktuálisra rákövetkező szeletből hordoznak információt. Mivel a vetület-szelet tétel és a ráépülő rekonstrukciós eljárások feltételezik, hogy ugyanarról a kétdimenziós képről képezzük a vetületeket, így a helikális esetben a vetületeket némileg módosításunk kell, hogy a klasszikus (szeletenkénti) képrekonstrukciós módszereket alkalmazzuk. A célravezető módszer az úgy nevezett *helikális interpoláció*, melynek során legtöbbször két egymástól  $360^\circ$  forgástávolságban kinyert vetületből számítjuk ki egy fiktív keresztmetszeti síkon a vetületi értéket. Tegyük fel, hogy a pácienssel a forrás-detektor egyszeri  $360^\circ$ -os körbeforgása során a vizsgálóasztal  $d$  távolságot csúszik. Ekkor a két ugyanolyan irányú vetület nem ugyanarról a szeletről képződik, hanem két egymástól  $d$  távolságra található szeletről. Egy tetszőleges fiktív közbülső szeleten a  $p'$  vetületet számíthatjuk a

$$p' = p_1x + p_2(d - x)$$

képlettel, ahol  $p_1$  és  $p_2$  a  $360^\circ$ -os körbefordulás előtti és utáni síkokon mért vetületeket jelölik,  $x$  pedig a képzeletbeli szeletnek a körbefordulás előtti síktól vett távolsága. Természetesen elképzelhető másfajta interpolációs technika is.

Az eljárást tovább nehezítheti, ha a helikális vetületek legyezőnyalábszerűen képződnek, ekkor általában még rebinningre is szükség van.

### 4.3. Képpalkotási hibák (artifaktumok)

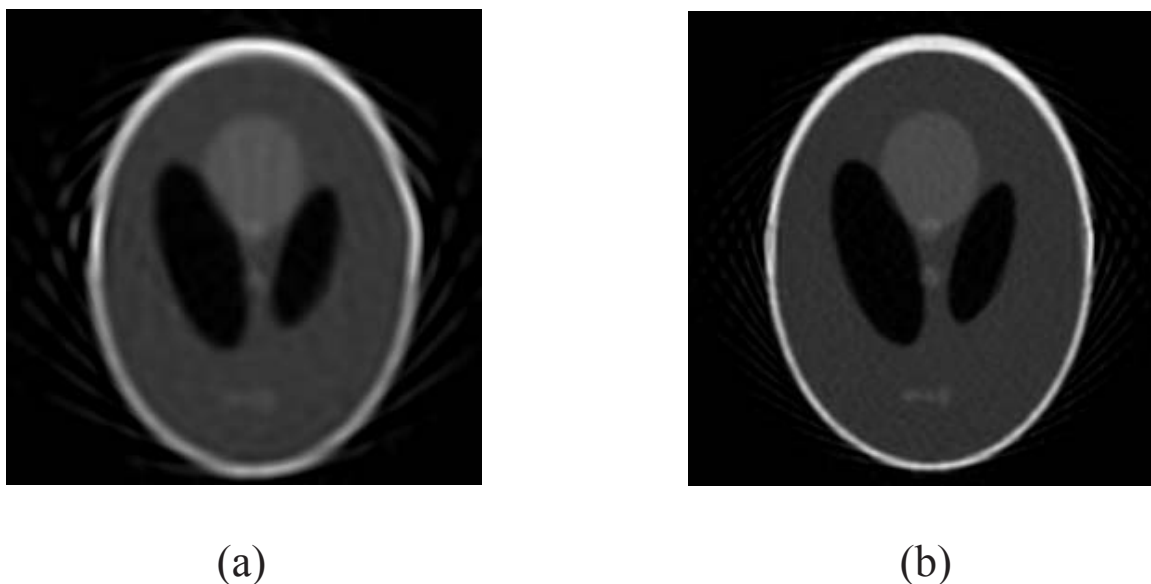
A képrekonstrukció során az előállított kép elkerülhetetlenül több-kevesebb eltérést, hibát mutat a valós helyzethez képest. Azokat a hibákat, melyek a klinikai diagnózist döntően befolyásolhatják *artifaktumoknak* nevezzük. Ebben a fejezetben ezek közül tárgyaljuk a legfontosab-



bakat. Maga a téma megérne egy külön jegyzetet is, az olvasó további hasznos információkat talál például a [30] könyvben.

### 4.3.1. Mintavételezés

A képrekonstrukció első lépése az előállítandó kép mintavételezése, azaz a vetületek kigyűjtése. Nem mindegy azonban, hogy egy adott irányból milyen sűrűn haladnak át a vetítősugarak a vetületek képzése során. A *Nyquist mintavételezési kritérium* azt mondja ki, hogy amennyiben a detektorok szélessége  $d$ , akkor a szomszédos vetítősugarak egymástól vett távolsága legfeljebb  $d/2$  lehet, ellenkező esetben fellép az úgy nevezett *álcázás (aliasing)* jelenség. A 4.5 ábra a  $256 \times 256$ -os méretű fantom 180 vetületből vett rekonstrukcióit mutatja vetületenként 64, illetve 128 vetítősugárral. Mindkét esetben jól megfigyelhetők az alulmintavételezés következtében kialakult csíkok.



4.5. ábra. A Shepp-Logan fejfantom alulmintavételezett rekonstrukciói 64 (a) illetve 128 (b) vetítősugárral vetületenként.

Egy másik a mintavételezéssel összefüggő kérdés az, hogy hány vetület szükséges a megfelelő minőségű rekonstrukcióhoz. Erre vonatkozóan a következő megállapítást tehetjük. Amennyiben a vetítősugarak száma vetületenként  $N$ , akkor legalább  $N\pi/2$  vetület szükséges a rekonstrukció során, azaz a vetítősugarak száma és a vetületek száma nagyságrendileg meg kell, hogy egyezzen. Ellenkező esetben itt is számolnunk kell az aliasing jelenséggel, ami csíkok megjelenését okozhatja a képen, ahogy az a 4.6 ábrán is látható.

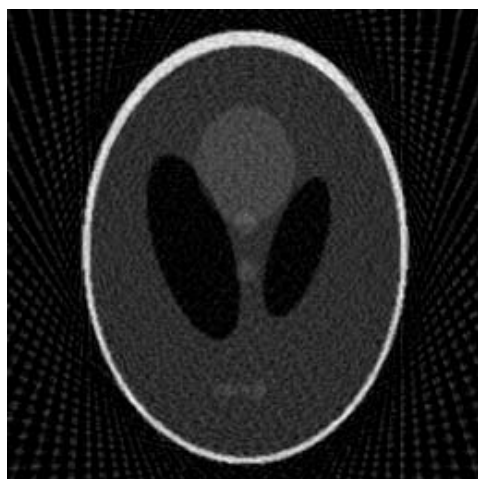
### 4.3.2. Parciális térfogat hatás

A *parciális térfogat hatás* jelenséget az okozza, hogy a rekonstrukció során a keresztmetszeti szeleteket vastagság nélkülinek tekintjük, holott a valós esetben nyilván egy minimális szelet-

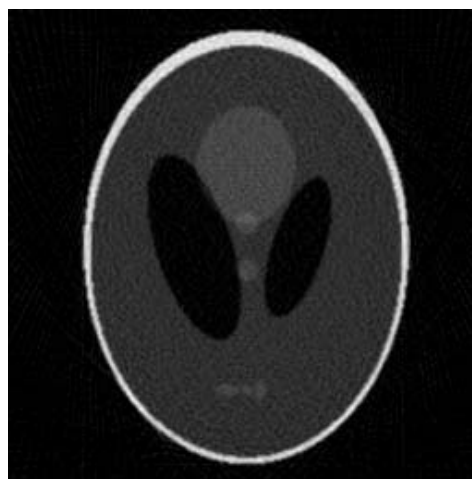
vastagsággal számolnunk kell. A rekonstruált képen egy pixel csak egy elnyelési együtthatót tud ábrázolni. Azonban ha a rekonstruálandó szeletbe egy objektum csak részben lóg bele, akkor a neki megfelelő pixelnek egyidőben kellene jellemeznie az objektum jelenlétéből és annak hiányából adódó elnyelési együtthatót is, ami egy átlagos szürkeintenzitás megjelenését eredményezi. Az artifakt a kontraszt csökkenését, az élek elmosódását, illetve csíkok megjelenését hozza magával. A hatás vékonyabb CT szeletek vagy helikális geometria alkalmazásával csökkenthető.

### 4.3.3. Nyalábkeményedés

A *nyalábkeményedés (beam hardening)* jelenség oka abban keresendő, hogy a Röntgen-sugárzásból származó sugárzás nem monokromatikus, hanem különböző energiájú Röntgen-sugárzások összességéeként áll elő. Az anyagon áthaladva a kisebb energiájú Röntgen-fotonok nagyobb valószínűséggel nyelődnek el, így a detektorig már nem jutnak el. Azaz a transzmisszió során a Röntgen-nyaláb átlagenergiája a magasabb energiaszintek felé tolódik el. Mivel a lineáris gyengülési együttható az energiától is függ, így az a feltételezés, hogy a Röntgen-sugár energiája a vizsgált anyagon belül állandó, nem állja meg a helyét. Ennek következményeként a rekonstruált képen a sűrű (pl. csont) és a lágy (pl. agy) szövetek határán a sűrűbb szövetekből kiinduló sötét csíkok jelennek meg. A jelenség korrigálására általában szoftveres és hardveres technikákat is bevetnek.



(a)



(b)

4.6. ábra. A Shepp-Logan fejfantom vetületben alulmintavételezett rekonstrukciói 45 (a) illetve 90 (b) vetület esetén.

#### 4.3.4. Fém artifakt

A vizsgálat során a páciensben található fémobjektumok (amalgám tömés, sebészi kapcsok, implantátumok, stb.) a legváltozatosabb csíkhátásokat tudják produkálni. A fémek gyengülési együtthatója messze a leképezni kívánt tartományon kívül esik, ami számos problémát okoz. A helyzetet tovább nehezíti, hogy az extrém sűrű anyagok jelenléte nyalábkeményedési és parciális térfogat artifaktumokat is eredményez, valamint a fémen a sugárzás szét is szóródhat. A fémes elemeket a képalkotás megkezdése előtt ezért tanácsos eltávolítani. Amennyiben ez nem lehetséges, akkor szoftveres úton javítható a kép minősége.

## 5. fejezet

# Képalkotó modalitások

A már megismert CT berendezésen kívül még számos eszköz áll rendelkezésre, hogy egy objektum belsejéről annak károsítása nélkül információt szerezzünk. Ebben a fejezetben a leggyakrabban alkalmazott ilyen úgy nevezett *képalkotó modalitások* elvét mutatjuk be, valamint a velük kapcsolatban álló képrekonstrukciós elméletet tárgyaljuk.

### 5.1. Nukleáris medicina

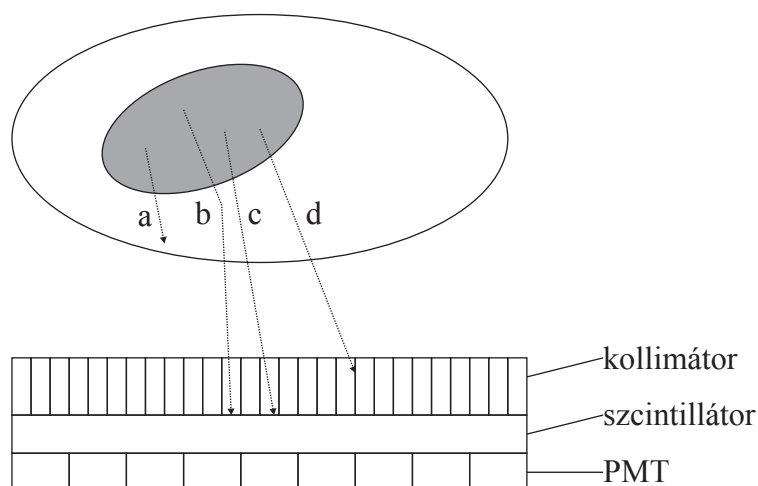
A nukleáris medicina az orvosi képalkotás olyan módszereit foglalja magában, ahol a páciens szervezetébe (injektálással, lenyeléssel, vagy belélegzéssel) radioaktív izotópokat (nyomjelzőket, angolul *tracereket*) juttatnak. Különböző radioaktív izotópok különböző molekulákhoz tudnak kapcsolódni és az adott szerv vizsgálatához ezen radioaktív *tracerek* változatosan tervezhetők.

A radioaktív bomlás az a folyamat, melynek során az instabil radioaktív atommag stabil állapotba igyekszik jutni, miközben sugárzást bocsát ki. A nukleáris medicina képalkotó eszközeivel ezt a vizsgált személy belsejéből érkező sugárzást lehet detektálni, ennek helyét és mennyiségét meghatározni, tehát lényegében azt, hogy az adott molekula és a hozzá kapcsolódó radioaktív nyomjelző hol mekkora mennyiségben halmozódik fel a szervezetben. A folyamat lényegesen különbözik a CT képalkotástól, ott ugyanis a sugárzás a vizsgált objektumon kívülről érkezik, és azon áthalad, tehát a CT a *transzmissziós tomográfia* modelljét használja, szemben a nukleáris medicina *emissziós tomográfias* modelljével.

A következőkben a két legismertebb emissziós tomográfián alapuló módszert, a SPECT és a PET képalkotást mutatjuk be. Ezen technikák a sugárzás keletkezésének helybéli különbsége mellett egy másik jelentős eltérést is mutatnak a CT-vel szemben. Míg a CT anatómiai információt szolgáltat az emberi testről, addig a SPECT és a PET segítségével funkcionális vizsgálatokat végezhetünk. Az ezen módszerek által szolgáltatott képek felbontása azonban ma még messze elmarad a CT képi felbontásától, ami leginkább annak köszönhető, hogy a sugárzás forrását ezen esetekben nehezen tudjuk megfelelő pontossággal lokalizálni. A SPECT és PET képalkotás azonban ügyesen ötvözhető a CT képalkotással, és így (a két különböző modalitásból származó képet összeillesztve, más szóval regisztrálva) az anatómiai és a funkcionális információt elegyíthetjük, ami rendkívül hasznos eszközt ad az orvosok kezébe.

### 5.1.1. SPECT

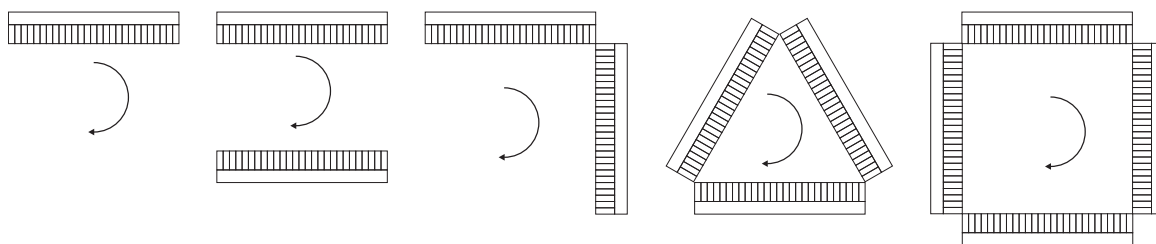
A SPECT (Single Photon Emission Computed Tomography, fotonemissziós tomográfia) olyan tracereket használ, ahol a radioaktív anyag bomlása egyszerű gamma-sugárzást eredményez. A képalkotó berendezés elve az 5.1 ábrán látható. Az ábrán szürkével jelöltük a gamma-fotonokat kibocsátó területet. A gamma-fotonok érzékelése az ábra alján látható egységben történik meg. A szcintillátor az ionizáló sugárzás (a gamma-fotonok) hatására rövid fényimpulzust bocsát ki. A fotoelektron-sokszorozó csőben (PMT) a fényimpulzus hatására elektron keletkezik, amit megsokszoroznak (felerősítik az elektromos jelet). Végül ezt a felerősített elektromos jelet dolgozzák föl a számítógépen. Hogy csak a megfelelő irányból kilépő gamma-fotonokat detektálják, a szcintillátor elé egy kollimátort helyeznek, mely a nem megfelelő szögben érkező gamma-fotonokat elnyeli. Négy eset lehetséges: (a) a gamma-foton el sem jut a detektorig, (b) a gamma-foton az eredeti kiindulási útját (esetleg többször) megváltoztatva eljut a detektorsorig, (c) a gamma-foton az eredeti irányának megfelelően jut el a detektorsorig, (d) a gamma-foton elakad a kollimátorban. Az (a) esetben egy adott pozícióból hamisan némileg kevesebb, míg a (b) esetben hamisan több sugárzást észlelünk, mint amennyi ott valójában keletkezik. Mindkét esetben a rekonstrukció során előálló kép minőségének romlásával kell számolnunk.



5.1. ábra. A SPECT képalkotás elve. A szürke tartományból érkező sugárzás útja négyféle lehet: (a) a gamma-foton nem jut el a detektorig, (b) a gamma-foton az eredeti kiindulási útját megváltoztatva jut el a detektorsorig, (c) a gamma-foton az eredeti irányának megfelelően jut el a detektorsorig, (d) a gamma-foton elakad a kollimátorban.

A detektorsort az objektum körül körbeforgatva a sugárzást természetesen számos irányból mérhetjük. Sok esetben nem is csak egy, hanem kettő, három vagy akár még több detektorsorral is dolgozhatunk (lásd az 5.2 ábrát). Minél több detektor van, annál gyorsabb és pontosabb a vetületek kinyerésének folyamata, ezzel arányosan viszont a költségek növekedésével is számolnunk kell.

Ami a vetületekből történő rekonstrukciót illeti, lényegében a hagyományos (CT-re kifejlesztett) rekonstrukciós eljárásokat alkalmazhatjuk a SPECT esetében is. A szűrt visszavetítés esetében azonban a megfelelő (a SPECT berendezés fizikai felépítését is figyelembe vevő)



5.2. ábra. A SPECT leggyakoribb kamera-konfigurációi.

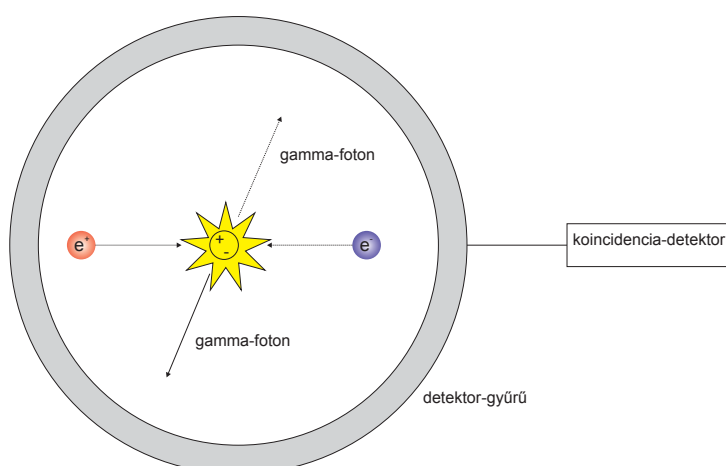
szűrő megválasztásának rendkívüli szerepe van, hiszen a vetületek általában itt sokkal pontatlanabbak és kevesebb van belőlük, mint a CT esetében. Az algebrai rekonstrukciós technikák általában ilyen körülmények között is jól teljesítenek, így szerepük ezen alkalmazásokban felértékelődhet.

Fontos hangsúlyoznunk azt is, hogy – ellentétben a transzmissziós tomográfiával – az emissziós tomográfiában a  $\Theta$  és a  $\Theta + 180^\circ$  fokos vetületek általában nem egyeznek meg, hiszen az érzékelt sugárzás intenzitása függ attól, hogy a detektor milyen távol van a belső sugárforrástól, ahogyan azt már az (1.3) képletnél tárgyaltuk. Ezt a jelenséget szintén figyelembe kell vennünk a rekonstrukciós algoritmusok megtervezése során.

### 5.1.2. PET

A PET (Positron Emission Tomography, pozitronemissziós tomográfia) képalkotás elve az 5.3 ábrán látható. Az eljárás esetében a radioaktív izotópok pozitront (az elektronnal ellentétes töltésű antirészecskét) bocsátanak ki a bomlás során. Ez a pozitron összetalálkozik egy elektronnal és mindkettő megsemmisül, miközben két nagy energiájú gamma-foton keletkezik, melyek (megközelítőleg) egymással ellentétes irányban repülnek ki (a bezárt szög  $180^\circ \pm 0.25^\circ$ ). Ezt a folyamatot hívjuk *annihilációnak*. A gamma-fotonokat egy a páciens körül elhelyezkedő detektorkör két ellentétes oldali pontjában észlelhetjük. A detektor felépítése hasonló a SPECT-nél már megismerthez. Amennyiben a detektor ellentétes oldalain egyszerre detektálunk gamma-fotonokat, akkor tudjuk, hogy a pozitron megsemmisülése valahol a két gamma-foton által meghatározott egyenesen következett be (eltekintve a SPECT-nél már ismertett jelenségekből következő mérési hibáktól). Az egyidejűség eldöntése a koincidencia-detektor feladata. A rengeteg becsapódás érzékelésével meghatározhatjuk, hogy egy adott egyenesen hány megsemmisülés történt, tehát lényegében megkapjuk a vetületeket.

A PET esetében általában a SPECT-nél használtknál kisebb felezési idejű radioaktív izotópokat használnak, melyeket leggyakrabban ciklotronban állítanak elő, így általában a vizsgálat költségesebb, mint a SPECT vizsgálatok. A PET-tel történő képrekonstrukció algoritmikus részére ugyanazok a megfontolások érvényesek, mint a SPECT esetében, a PET képek felbontása és minősége ugyanakkor valamivel jobb, mint a SPECT képeké, hiszen egyszerre két irányból detektálható az ugyanabból a pontból érkező sugárzás. Ugyanakkor a pozitron keletkezési és megsemmisülési helye között körülbelül 1 milliméter lehet a távolság, ami limitálja a képfelbontás részletességét. Tovább nehezíti a helyzetet, hogy az annihiláció során a gamma-fotonok nem pontosan egymással ellentétesen repülnek ki, ami szintén bizonytalanságot okoz a vetületi adatokban. A modernebb PET berendezésekben már több egymásra



5.3. ábra. A PET képképzés elve. A pozitron (piros) és az elektron (kék) egymással összeesapódva megsemmisülnek és két nagy energiájú gamma-foton röpköd ki egymással megközelítőleg ellentétes irányban. Ezeket a gamma-fotonokat a detektorgyűrűn észlelhetjük.

épített detektorgyűrű kerül beépítésre, ami már nem csak szeletenkénti, hanem közvetlen 3D-s rekonstrukciót is lehetővé tesz.

## 5.2. MRI

Az MRI (Magnetic Resonance Imaging, mágneses rezonancián alapuló képképzés) alapelve az, hogy a hidrogén atommagja úgynevezett mágneses momentummal rendelkezik, melynek iránya egyéb külső hatás hiányában tetszőleges lehet, külső statikus mágneses térben azonban a momentumok a tér irányának megfelelően állnak be. Ha a statikus mellett egy másik irányú (rádióhullámokkal gerjesztett) változó mágneses tér is hat az atommagokra, akkor azok momentumának iránya megváltozik, majd a változó mágneses tér megszűntetése után visszaáll a statikus mágneses tér által meghatározott irányba, miközben áram indukálódik. Ezt a jelenséget képes észlelni az MRI berendezése, ezáltal információt szerezve arról, hogy hol milyen sűrű a hidrogénatommagok eloszlása. Mivel az emberi testben túlnyomórészt a víz tartalmaz hidrogént, így lényegében arról kapunk információt, hogy egy adott pontban mennyire tartalmaz sok vizet, azaz mennyire lágy a szövet. Következésképpen az MRI főleg a lágyrészekről tud rendkívül jó felbontású képet adni. Ugyanakkor az alacsony víztartalmú kemény szövetek (például a csontok) nem vizsgálhatóak vele. Így a CT és az MRI lényegében kiegészítik egymást, emiatt gyakori, hogy a CT képeket az MRI képekkel kombinálják.

Az MRI további előnye, hogy nem használ sugárzást, a páciens egy statikus mágneses térbe helyezik, melyre egy másik változó mágneses tér hatását is kifejtik. Az eljárás hátránya azonban, hogy rendkívül költséges. Az MRI segítségével főleg anatómiai információra tehetünk szert, léteznek azonban a funkcionális információ kinyerését megcélzó fMRI eljárások is, melyek a klinikai gyakorlatba még nem épültek be, inkább csak kutatási célokra használják őket. Az MRI estében a transzformáció-alapú rekonstrukciós eljárások alkalmazhatók sikeresen.

### 5.3. Reflexiós és diffrakciós tomográfia

A transzmissziós és emissziós eseteken kívül a tomográfia még két további esetével is érdemes megismerkednünk. Bizonyos (nem feltétlenül csak orvosi) vizsgálatok esetén a relatíve nagy energiájú sugárzás – mint amilyen például a Röntgen-sugárzás is – nem megengedett, vagy technikai okokból nem alkalmazható. Ezekben az esetekben a kisebb energiájú sugárzások segítségével még mindig sok lehetőségünk nyílnak képalkotásra. Ilyen kisebb energiájú hullámformák például az elektromágneses spektrum ultraibolya és infravörös tartományai közé eső részei (beleértve a látható fényt is), a rádióhullámok, a mikrohullámok, valamint az ultrahang, de az elektromos mező is alkalmas lehet képalkotásra. Míg azonban az úgynevezett kemény (azaz nagy energiájú) hullámok esetében a sugárzás adott anyagon lényegében egyenes vonalon való áthaladása (transzmissziója) és annak gyengülése alkalmas a képalkotásra, a helyzet a lágy (kis energiájú) hullámok esetében egészen más. A kisebb energiájú hullámok ugyanis túlnyomórészt a vizsgált objektumról visszaverődnek. Ez a visszaverődés (más szóval reflexió) az alapja például az ultrahang vizsgálatoknak is. Egy adott frekvenciájú és amplitúdójú hullámcsomagot bejuttatva az emberi testbe, az a különböző szövetek határáról valamilyen mértékben visszaverődik, miközben amplitúdója megváltozik. A hullámcsomag visszaérkezésének idejéből kiszámítható a visszaverő felület távolsága. Az amplitúdóváltozásból pedig a visszaverő felület tulajdonságaira lehet következtetni, valamint arra, hogy milyen szöveten haladt át a hullámcsomag. Az eljárást *reflexiós tomográfiának* nevezik.

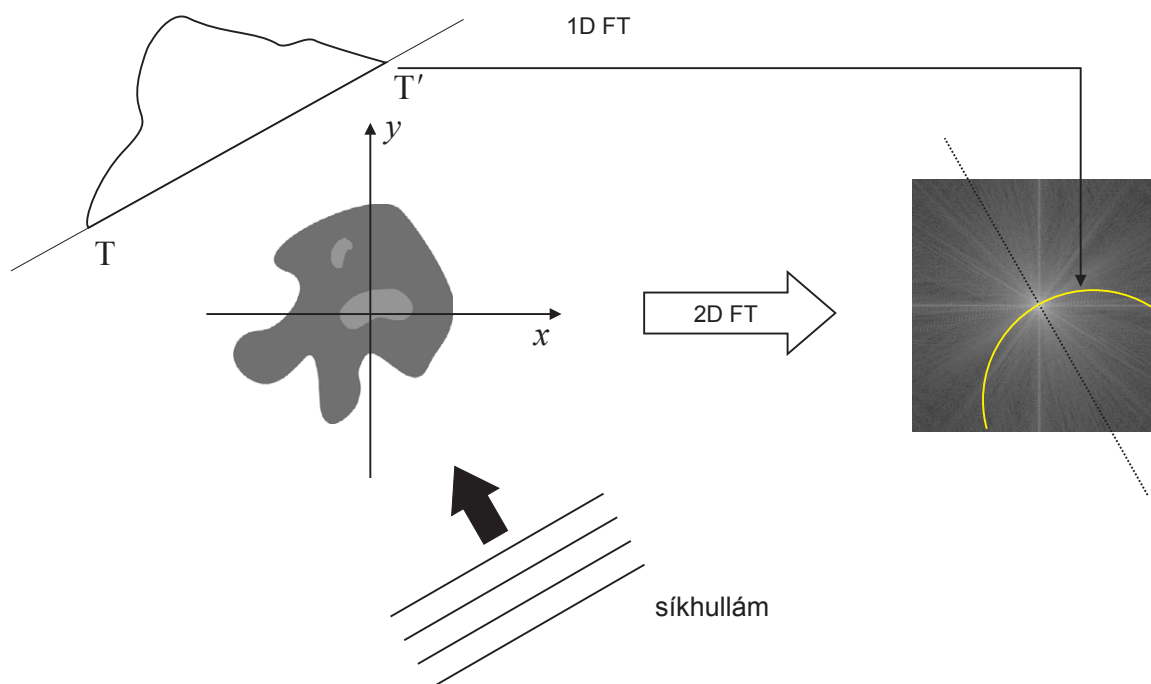
Amennyiben a lágy hullámok energiája olyan, hogy képesek a vizsgált anyagon áthaladni, akkor is az anyaggal kölcsönhatásba lépve jellemzően nem egyenes irányban haladnak át, hanem elhajlanak, mégpedig az anyagi minőségtől függően más-más mértékben. Így a rekonstrukció során nem vonalmenti integrálokkal tudunk dolgozni, hanem arról van információnk, hogy egy adott hullám az anyagon áthaladva milyen mértékben térül el. Az elhajlásokon alapuló képrekonstrukciót *diffrakciós tomográfiának* hívjuk, melynek alapja az úgynevezett *Fourier diffrakciós tétel*, ami hasonló összefüggést állapít meg, mint a vetület-szelet tétel a transzmissziós tomográfiára. A tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

**Tétel.** Ha egy objektumon az 5.4 ábrán látható módon síkhullám halad át, akkor a túloldali  $TT'$  szakaszon mért hullámfront-elhajlás 1D-s Fourier-transzformáltja az objektum 2D-s Fourier-transzformáltjának egy félkörön fekvő részét adja meg az 5.4 ábrán látható módon.

Megjegyezzük, hogy a tétel csak abban az esetben érvényes, ha a vizsgált objektum inhomogenitásai által okozott elhajlás csak kismértékű. A Fourier diffrakciós tétel első látásra csak annyiban emlékeztet a vetület-szelet tételre, hogy mindkettő a vetületek és a kép Fourier-transzformáltjait hozza kapcsolatba egymással. A két tétel között azonban sokkal szorosabb az összefüggés. Emlékezzünk vissza rá, hogy a transzmissziós esetben a vetület-szelet tétel segítségével az objektum 2D-s Fourier-transzformáltjának egy-egy középponton áthaladó egyenesre eső részét határozhattuk meg. A diffrakciós tétel esetében egy középponton átmenő félkörön lévő értékeket határozhatjuk meg a kép Fourier-transzformáltjából. A kör középpontja a Fourier-tér középpontjából kiindul és a kibocsátott hullám irányával párhuzamos félegyenesen található, sugarára ( $k_0$ ) pedig a

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.1)$$



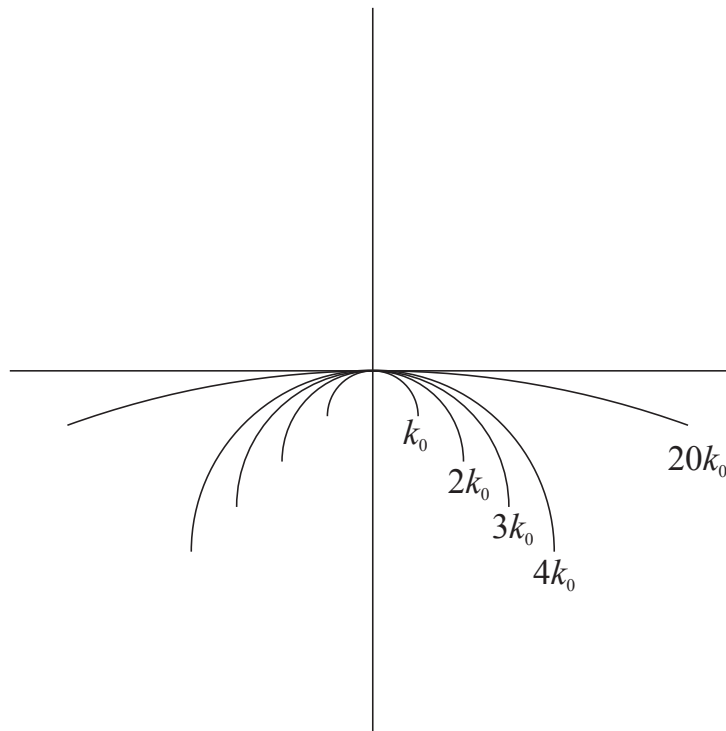


5.4. ábra. A Fourier diffrakciós tétel szemléltetése.

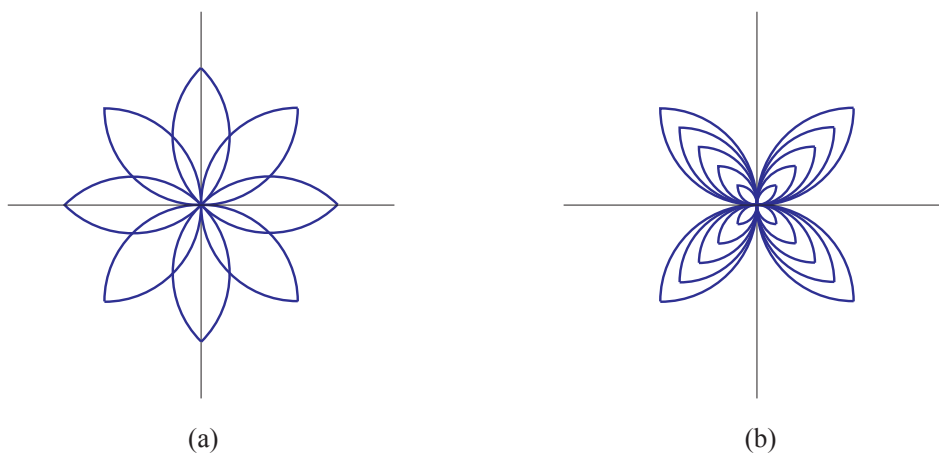
összefüggés érvényes, ahol  $\lambda$  az adott hullám hullámhosszát jelöli. A hullámhossz csökkenésével (azaz a hullám energiájának növekedésével) a félkör sugara tehát növekszik, ahogyan ezt az 5.5 ábrán is láthatjuk. Minél nagyobb a hullám energiája, annál inkább képes áthatolni az adott anyagon, tehát a modell annál inkább közelíti a transzmissziós esetet. És valóban, ezzel összhangban a diffrakciós-tételből adódó félkörök is egyre inkább közelítenek a vetület-szelet tétel által meghatározott egyeneshez.

Természetesen ha egy objektumra több irányból bocsátunk hullámokat, akkor több információhoz juthatunk annak Fourier-transzformáltjáról. Az 5.6(a) ábrán például 8 vetület segítségével gyűjtjük a Fourier-térből az adatokat. Vegyük észre, hogy ebben az esetben is (szemben a transzmissziós tomográfiával) az ellenkező irányú vetületek általában nem egyeznek meg, így az általuk meghatározott Fourier-térrészletek sem azonosak. Csakhogy a vetületek által meghatározott körívek az (5.1) egyenlet alapján a hullámhossztól is függenek, így ha lehetőség van arra, hogy az objektumot különböző hullámhosszúságú hullámokkal is vizsgáljuk, akkor ugyanabból az irányból – csupán a hullámhossz változtatásával – több félkör mentén is gyűjthetünk információt, ahogyan azt például az 5.6(b) ábra mutatja.

A reflexiós és diffrakciós tomográfia képrekonstrukciós eljárásai mélyebb fizikai ismereteket igényelnek, így itt nem ismertetjük azokat. Az érdeklődő olvasónak bevezetőül a [33] könyvet ajánljuk.



5.5. ábra. A Fourier diffrakciós tétel kapcsolata a vetület-szelet tétellel.



5.6. ábra. Mintavételezési technikák a diffrakciós esetben: (a) azonos hullámhossz különböző irányok, (b) a hullámhossz is változik.

## 6. fejezet

# A folytonos képrekonstrukció alkalmazásai

A folytonos képrekonstrukció legismertebb alkalmazásai vitathatatlanul az orvostudomány területéről származnak. Szép számmal adódnak azonban más tudományterületeken is alkalmazások. Ebben a fejezetben a teljesség igénye nélkül ezek közül sorolunk fel néhányat a [23, 47] munkák alapján.

- Biztonságtechnikai vizsgálatok: A repülőterek biztonsági csomagvizsgálatait végezhetik hagyományos Röntgen-átvilágítás helyett CT berendezéssel is, így pontosabb képet kapva a csomagok belsejéről. Az eljárás alkalmazható olyan esetben is, amikor felmerül a gyanú, hogy bizonyos személyek például kábítószer tartalmazó csomagokat nyeltek le.
- Állattenyésztési alkalmazások: A CT segítségével drasztikus beavatkozás nélkül lehetővé válik haszonállatok izom- és zsírszöveteiről információt nyerni, mely a takarmányozás megtervezésében lehet segítségünkre.
- Faipari, erdészeti alkalmazások: Ultrahang, CT és MRI eszközök segítségével információ nyerhető az élő vagy kivágott fa belső szerkezetéről, feltérképezhető a fa esetleges belső korhadtsága, betegségei. Az élő fa vizsgálata az erdőgazdálkodásban jut szerephez, segítségével eldönthető, hogy egy fát ki kell-e vágni vagy sem. Az élettelen fa vizsgálata pedig többek között a faiparban anyagminőség megállapítására és minőségellenőrzésre ad lehetőséget.
- Régészeti, őslénytani vizsgálatok: A CT segítségünkre lehet régészeti leletek nemroncsoló elemzésében is, például múmiák tanulmányozásában, szobrok falvastagságának megállapításában, vagy kőzetben belüli leletek vizsgálatában.
- Geológiai vizsgálatok: Röntgen vagy hanghullámok segítségével kőzetrétegek összetétele is megállapítható, az eljárás alkalmas a különböző szerkezeti vagy anyagi összetételű kőzetek, ásványi anyagok elkülönítésére.
- Ipari nemroncsoló tesztelés: Az ultrahangos és CT vizsgálatok segítségével műszaki létesítmények és szerkezetek (épületek, hidak, energiaszállító vezetékek, járművek, stb.)

belsejének állapota mérhető fel úgy, hogy közben maga az objektumot nem károsodik. A vizsgálat választ adhat arra, hogy kell-e és ha igen, akkor milyen beavatkozást kell végrehajtani az adott objektum élettartamának megnöveléséhez, vagy hogy éppenséggel az adott objektum alkalmas-e még egyáltalán funkciójának betöltésére.

## 7. fejezet

# A diszkrét tomográfia alapjai

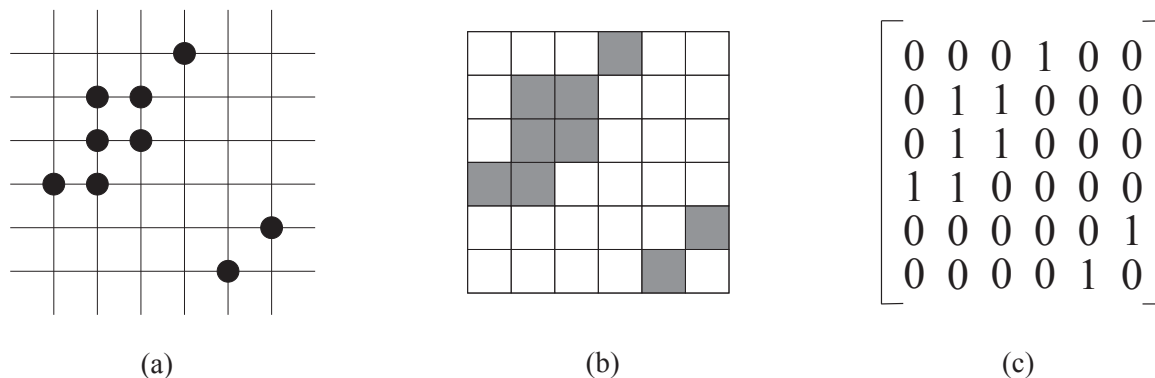
### 7.1. A diszkrét tomográfia szerepe

A folytonos rekonstrukciós technikák, mint a szűrt visszavetítés vagy az algebrai rekonstrukció általában több száz vetületet igényelnek a megfelelő minőségű kép előállításához. A hagyományos CT berendezések biztosítani tudják ezt a kellő számú vetületet, mégis egyes alkalmazások esetén nincs lehetőség ilyen sok vetület készítésére. Bizonyos esetekben a vizsgált anyagot jelentősen károsítja a vetületek alkotásához szükséges sugárzás, emellett a sok vetület kinyerése időigényes vagy költséges is lehet. Nyilvánvaló, hogy a hagyományos rekonstrukciós algoritmusok ilyenkor nem alkalmazhatók, gyakorlati szempontból nem adnak kielégítő minőségű képet, így valamilyen más technikára van szükség a képképzés kevés vetületből történő elvégzéséhez. Szerencsére számos alkalmazásnál gyakran feltételezhető, hogy a rekonstruálandó objektum csak néhány, előre ismert elnyelési együtthatójú anyagból áll, így a rekonstruálandó képen csak néhány, előre ismert szürkeintenzitási érték jelenhet meg. Erre a többlettudásra építve már kidolgozhatóak olyan rekonstrukciós algoritmusok, melyek csak kevés vetületet használnak. Ez a technika a *diszkrét tomográfia* elnevezést kapta, melynek alapjait főként a 90-es évek elején fektették le, és mára önálló tudományterületté nőtte ki magát. Matematikai eszköztára a folytonos képrekonstrukciótól jelentősen eltér, főként mátrixelméleti, logikai, kombinatorikai és optimalizálási módszereket egyesít. A diszkrét tomográfia elméletéről és alkalmazásairól átfogó képet adnak a [28] és a [29] könyvek.

### 7.2. A bináris tomográfia alapjai

A diszkrét tomográfia egy szélsőséges eseteként jelenik meg a *bináris tomográfia*, amikor a rekonstruálandó kép bináris, azaz csak fekete és fehér pixeleket tartalmazhat. Ebben az esetben a képet ábrázolhatjuk fekete és fehér pixelekkel, bináris mátrixszal és úgynevezett diszkrét halmazzal is, azaz a  $\mathbb{Z}^2$  kétdimenziós egészrács egy véges részhalmaza segítségével. A konzisztencia megőrzése érdekében feltesszük, hogy a  $\mathbb{Z}^2$  kétdimenziós egészrács függőleges tengelye lefelé irányított és az  $F$  diszkrét halmazt befoglaló minimális téglalap bal felső sarka az  $(1, 1)$  pozícióban van. Ezzel a megállapodással az ismertett ábrázolási módok lényegében ekvivalensek. A 7.1 ábra ezeket a reprezentációs technikákat mutatja. Általában –

és ezen jegyzetben is – kényelmi szempontok döntik el, hogy melyik reprezentációt érdemes választani.



7.1. ábra. A bináris képek ábrázolási módjai. (a) diszkrét halmaz, (b) fekete és fehér pixelek, illetve (c) bináris mátrix.

Míg a folytonos rekonstrukció esetében a vetületképzést vonalintegrálok segítségével tudtuk számítani, úgy a diszkrét megközelítés esetén két lényegesen eltérő módszer közül választhatunk. *Folytonos vetületképzés* esetén a bináris kép reprezentációból indulunk ki, annak fekete pixeleit egységnyi oldalhosszúságú négyzetekként értelmezzük, melyek fölött a rekonstruálandó bináris függvény értéke 1, míg máshol 0. Így a rekonstruálandó bináris függvényünk már a teljes  $\mathbb{E}^2$  euklideszi tér felett értelmezve van, így a annak tetszőleges irányból vehetjük a folytonos vetületeit a megfelelő vonalmenti (vagy területi) integrálok segítségével pontosan úgy, ahogy azt a folytonos rekonstrukció esetében tettük. A *diszkrét vetületképzés* esetén a vetületeket egy adott rácsirány segítségével definiálhatjuk. Egy  $v$  rácsirányt egy  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  nem zéró vektorral adhatunk meg, ahol  $a$  és  $b$  relatív prímek. Egy  $v$  irányú rács egyenes az  $\mathbb{E}^2$  euklideszi tér egy olyan egyenese, amely párhuzamos  $v$ -vel és  $\mathbb{Z}^2$  legalább egy pontján áthalad. Jelöljük a  $v$  irányú rács egyenesek halmazát  $\mathcal{L}^{(v)}$ -vel. Akkor az  $F$  diszkrét halmaz  $v$  irányban vett vetületét a  $\mathcal{P}_F^{(v)} : \mathcal{L}^{(v)} \rightarrow \mathbb{N}_0$  függvénnyel definiálhatjuk, ahol  $\mathcal{P}_F^{(v)}(\ell) = |F \cap \ell|$  minden  $\ell \in \mathcal{L}^{(v)}$ -re. A két vetületképzési módszer közötti különbséget a 7.2 ábra szemlélteti. Ebben a jegyzetben túlnyomórészt csak a vízszintes és függőleges vetületekkel foglalkozunk, melyek értékei a folytonos és a diszkrét esetben megegyeznek, így a továbbiakban (hacsak ez külön nem indokolt) eltekintünk a két vetületképzési módszer közötti különbségektől.

A bináris tomográfia két fő feladatát fogjuk tárgyalni, speciálisan csak két vetület esetére. Mindkét vizsgálandó probléma esetén feltételezzük, hogy a  $\mathcal{G}$  bináris mátrixok (diszkrét halmazok) osztálya előre definiált, mely lehet akár az összes diszkrét halmazt tartalmazó osztály is. A vetületekre egy egyszerű jelölést vezetünk be.

**Definíció.** Az  $A$   $m \times n$  méretű bináris mátrix *horizontális és vertikális vetületei* (más néven *sor- és oszlopösszegei*) az  $R(A) = (r_1, \dots, r_m)$  és  $S(A) = (s_1, \dots, s_n)$  vektorokkal definiáltak, ahol

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad (i = 1, \dots, m)$$

és

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad (j = 1, \dots, n).$$

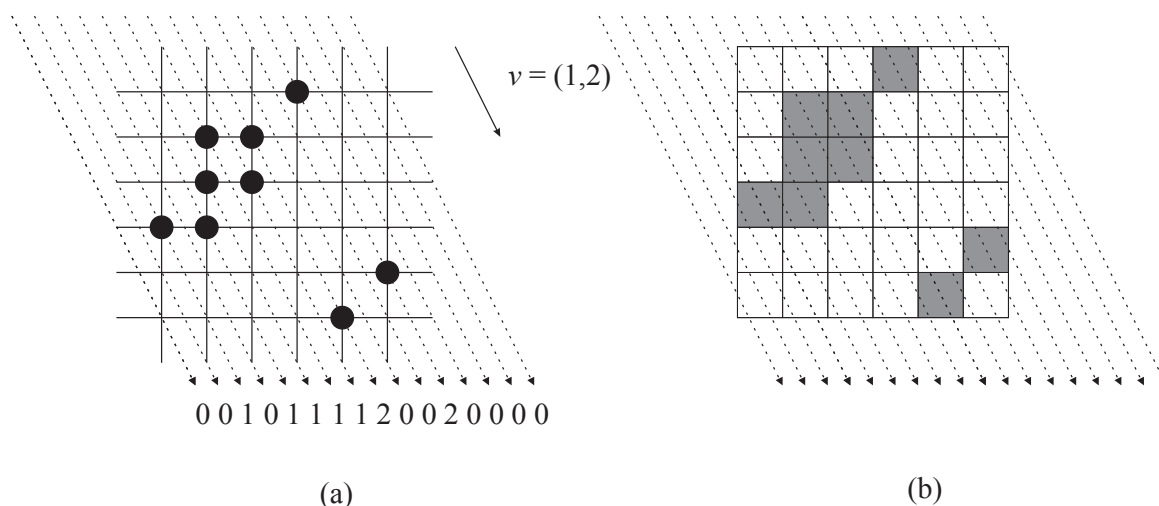
Az általunk vizsgálandó problémák az alábbiak.

- **REKONSTRUKCIÓ**( $\mathcal{G}$ ): Legyenek adottak az  $m, n \in \mathbb{N}$  egész számok és az  $R \in \mathbb{N}^m$  és  $S \in \mathbb{N}^n$  vektorok. Konstruáljunk egy olyan  $A \in \mathcal{G}$   $m \times n$  méretű bináris mátrixot, melyre  $R(A) = R$  és  $S(A) = S$ .
- **UNICITÁS**( $\mathcal{G}$ ): Legyenek adottak az  $m, n \in \mathbb{N}$  egész számok és egy  $A \in \mathcal{G}$   $m \times n$  méretű bináris mátrix. Létezik-e olyan  $A' \neq A$   $\mathcal{G}$ -beli bináris mátrix, melyre  $R(A') = R(A)$  és  $S(A') = S(A)$ .

### 7.3. Elemi bináris rekonstrukciós algoritmusok

A bináris rekonstrukció egyik legkorábban közölt eljárása az 1957-ből származó *Ryser algoritmus* [43], mely a vízszintes és függőleges vetületek felhasználásával rekonstruál egy az adott vetületeket kielégítő bináris mátrixot. Ahhoz, hogy ennek a rekonstrukciós feladatnak egyáltalán létezzen megoldása, szükségeszerű, hogy a  $R \in \mathbb{N}^m$  és  $S \in \mathbb{N}^n$  vektorok kielégítsék az alábbiakat:

- $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n s_j$ ,
- $r_i \leq n$  ( $i = 1, \dots, m$ ),
- $s_j \leq m$  ( $j = 1, \dots, n$ ).



7.2. ábra. A  $v = (1, 2)$  rácsirány által meghatározott diszkrét (a) és az annak megfelelő folytonos (b) vetületképzési módszerek. Utóbbi esetben a vetületek a szaggatott vonalak szürke pixeleken áthaladó részeinek összhosszáként definiálhatók.

Ekkor azt mondjuk, hogy az  $R$  és  $S$  vektorok *kompatibilisek*. Legyenek tehát adottak a kompatibilis  $R \in \mathbb{N}^m$  sorösszeg és az  $S \in \mathbb{N}^n$  oszlopösszeg vektorok. Először is ismerkedjünk meg a kanonikus mátrix fogalmával.

**Definíció.** Adott  $R \in \mathbb{N}^m$  sorvektor és rögzített  $n \in \mathbb{N}$  esetén az  $R$  által meghatározott *kanonikus mátrixon* azt az  $A^*$   $m \times n$  méretű mátrixot értjük, melynek elemeire

$$a_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{ha } j \leq r_i, \\ 0, & \text{ha } j > r_i \end{cases}$$

teljesül.

A Ryser algoritmus lépései a következők.

1. Rendezzük az  $S$  vektor oszlopait (elemeit) nemnövekvő módon, és jelölje az így kapott vektort  $S'$  (tehát  $s'_1 \geq s'_2 \geq \dots \geq s'_n$ ), míg az átrendezést biztosító egy ilyen permutációt  $\pi$ .
2. Hozzuk létre az  $R$  sorösszegek alapján balról jobbra feltöltve a megfelelő  $A^*$  kanonikus mátrixot és legyen  $S^* = S(A^*)$ .
3. Minden  $k = n, \dots, 2$ -re hajtsuk végre a következőt: ha  $s_k^* < s'_k$ , akkor az  $A^*$  első  $(n - 1)$  oszlopából álló mátrix legjobboldali 1-eseket tartalmazó  $l$ -edik oszlopából toljunk át  $s_k^* - s'_k$  darab 1-est a  $k$ -adik oszlopba azokban a sorokban, ahol az  $l$ -edik oszlopban 1-es, a  $k$ -adikban pedig 0 áll. Amennyiben választhatunk, akkor a legfelsőbb sorokban lévő 1-eseket toljuk át. Amennyiben nincs  $s_k^* - s'_k$  darab 1-es ilyen pozícióban az  $l$ -edik oszlopban, akkor a hiányzó elemeket az  $l - 1, l - 2, \text{ stb.}$  oszlopokból toljuk át.
4. A rekonstruált mátrix oszlopait rendezzük át a  $\pi^{-1}$  permutáció segítségével.

Az algoritmus lépéseit az alábbi példán szemléltetjük. Legyen  $R = (2, 4, 3, 4, 1)$  és  $S = (3, 4, 3, 2, 1, 1)$ . Ekkor  $S' = (4, 3, 3, 2, 1, 1)$ , amit például a  $\pi = [2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$  permutáció alkalmazásával kaphatunk. Kiindulási mátrixunk az  $A^*$  kanonikus mátrix, ahol

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

és  $S^* = (5, 4, 3, 2, 0, 0)$ . Az algoritmus további lépései során a következő mátrixokat kapjuk (minden esetben kék színnel jelöljük azokat az elemeket, amelyeket jobbra mozgattunk, és piros színnel azokat, ahova mozgattuk őket az adott sorban).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Végezetül a kapott mátrix első és második oszlopának felcserélésével kapjuk az eredeti feladat megoldását:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

A [Ryser.html](#) oldalon elérhető egy interaktív segédeszköz, melynek segítségével az olvasó saját input megadásával figyelheti meg az eljárás egyes lépéseit. Az algoritmus helyességének bizonyításához a következőket kell megfontolnunk. Mivel az  $A^*$  kanonikus mátrix minden sorban pontosan az előírt sorösszeggel megegyező számú 1-est tartalmaz, így kezdetben a vízszintes vetületek kielégítettek. Ez a tulajdonság az 1-esek jobbra tolásával nem szűnik meg. Elegendő tehát az oszlopösszegeket vizsgálnunk.  $R$  és  $S$  kompatibilisek, azaz  $\sum_{i=1}^m r_i = \sum_{j=1}^n s_j$ . Jelölje ezt az összeget  $M$ . Mivel minden sorban a megfelelő számú elem van, így a mátrix pontosan  $M$  darab 1-est tartalmaz. Ebből adódik, hogy az oszlopokban összesen a hiányzó 1-esek száma meg kell, hogy egyezzen a többlet 1-esek számával. Az 1-eseket a nemnövekvő átrendezés miatt mindig elegendő balról jobbra tolni. Tehát a jobbra tologatások során az 1-esek hiányai pontosan kiegyenlíthetők, és így az oszlopösszegek is az előírtakkal egyeznek meg az algoritmus végén.

Az  $S$  oszlopösszeg vektor nemnövekvő átrendezése  $O(n \log n)$  időt vesz igénybe, például a gyorsrendezés algoritmusával. A kanonikus mátrix feltöltése és a legfeljebb  $O(mn)$  darab 1-es jobbra tologatása  $O(mn)$  idő alatt elvégezhető, így az algoritmus futási ideje legrosszabb esetben  $m \times n$ -es mátrixokra  $O(mn + n \log n)$ .

A példaként bemutatott rekonstrukciós feladat megoldása nem egyértelmű. Ahogy az az algoritmus leírásából is látszik az 1-esek jobbra csúsztatásakor előfordulhat, hogy döntési lehetőségünk van (mi most úgy döntöttünk, hogy a legfelsőbb sorokban csúsztatunk el elemeket). A már bemutatott megoldáson kívül egy másik megoldást kaphatunk, ha például a (7.1) mátrixának (2,4), (2,5), (4,4) és (4,5) pozícióiban lévő elemeket invertáljuk, így kapván a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

mátrixot.

Az alábbi *értékadás és behelyettesítés* elnevezésű eljárás [19] egyértelmű mátrixok gyors rekonstrukálására nyújt lehetőséget tetszőleges számú vetület esetén. Mi most csak a két vetületet használó változatot ismertetjük, az eljárás általánosítását az olvasó könnyen elvégezheti. Az

algoritmus egy  $Q$  halmazzal használ a rekonstruálandó mátrix azon (úgy nevezett tiltott) pozícióinak tárolására, ahova már nem tehető se 0, se 1. Ez a tömb az eljárás kezdetén lehet üres, de elképzelhető az is, hogy bizonyos pozíciók már eleve tiltva vannak. A nem tiltott pozíciókat *szabad pozícióknak* nevezzük. Az eljárás a primitív sorok és oszlopok fogalmán alapszik, melyet az következő definíciók adnak meg.

**Definíció.** Adott  $Q$  tiltott pozíciók halmaza,  $R$  sorösszeg- és  $S$  oszlopösszeg-vektorok esetén egy  $M$  bináris mátrix  $i$ -edik sorát *primitív sornak* nevezzük, ha abban a sorban a szabad pozíciók száma megegyezik  $r_i$ -vel vagy  $r_i = 0$ . Az  $M$  mátrix  $j$ -edik oszlopát *primitív oszlopnak* nevezzük, ha abban az oszlopban a szabad pozíciók száma megegyezik  $s_j$ -vel vagy  $s_j = 0$ .

Az algoritmus lépései az alábbiak:

1. Ha a rekonstruálandó  $M$  mátrix nem tartalmaz szabad pozíciót, akkor VÉGE, egyébként ugorjunk a 2. lépésre.
2. Keressünk primitív sort (oszlopot) és annak szabad pozícióit töltsük fel 1-esekkel, ha az előírt sorösszeg (oszlopösszeg) pozitív vagy 0-kkal, ha az előírt sorösszeg (oszlopösszeg) 0. Az értékkel feltöltött pozíciókat tiltsuk le.
3. Módosítsuk a sor és oszlopösszegeket a beírtaknak megfelelően, majd ugorjunk az 1. lépésre.

Az eljárás helyessége azon észrevétel alapján bizonyítható, hogy egy egyértelmű mátrix vagy nem tartalmaz szabad pozíciót vagy tartalmaz primitív sort illetve oszlopot. Ebből adódik az is, hogy a rekonstrukció  $O(mn)$  időben elvégezhető.

Példaként tekintsük a következőt. Legyen a tiltott pozíciók halmaza  $Q = \{(1,1), (2,2), (2,5), (3,4), (5,2), (5,5)\}$ , valamint  $R = (2,2,4,1,2)$  és  $S = (1,2,5,2,1)$ . Ekkor a mátrixban az eredetileg tiltott pozíciókat  $\times$ -szel jelölve, valamint bal oldalon az aktuális sor- és alul az aktuális oszlopösszegeket feltüntetve

$$\begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{pmatrix} \times & & & & \\ & \times & & & \times \\ & & & \times & \\ & & & & \\ & \times & & & \times \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

A 3. oszlop primitív, így ezt kitölthetjük

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \times & & 1 & & \\ & \times & 1 & & \times \\ & & 1 & \times & \\ & & 1 & & \\ & \times & 1 & & \times \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Időközben a 3. sor is primitívvé vált, ennek kitöltésével folytatjuk

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \times & & 1 & & \\ & \times & 1 & & \times \\ 1 & 1 & 1 & \times & 1 \\ & & 1 & & \\ & \times & 1 & & \times \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Ezek után a 4. sor, valamint az 1. és 5. oszlopok primitívek (csak 0-t tartalmazhatnak). Ezeket kitöltve kapjuk

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} \times & & 1 & & 0 \\ 0 & \times & 1 & & \times \\ 1 & 1 & 1 & \times & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 1 & & \times \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \end{array}$$

Most a 2. és 5. sorok válnak primitívvé, ezeket kitöltve

$$\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{pmatrix} \times & & 1 & & 0 \\ 0 & \times & 1 & 1 & \times \\ 1 & 1 & 1 & \times & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 1 & 1 & \times \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

A 2. oszlop és 4. oszlop kitöltésével kapjuk a végső megoldást:

$$\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{pmatrix} \times & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 1 & 1 & \times \\ 1 & 1 & 1 & \times & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 1 & 1 & \times \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

## 7.4. Kapcsoló komponensek és unicitás

Ahogy azt már a Ryser algoritmus példája után is megemlítettük, egy adott rekonstrukciós feladat megoldása nem minden esetben egyértelmű. Így természetes módon merül fel az a kérdés, hogy mi biztosítja a megoldás egyértelműségét. Ennek eldöntéséhez bevezetjük a kapcsoló komponensek fogalmát.

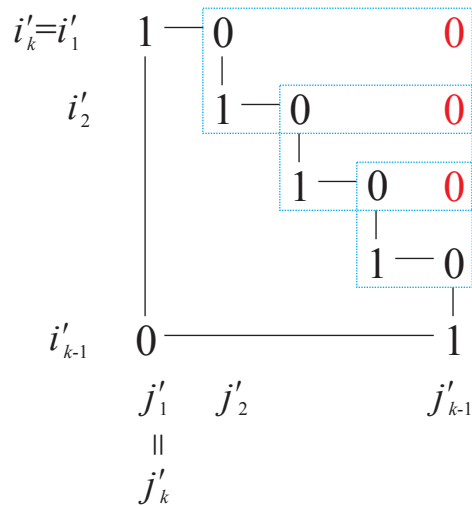
**Definíció.** Egy bináris mátrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  részmátrixait *kapcsoló komponenseknek* nevezzük.

Példaként tekintsük a (7.2)-ban már feltüntetett mátrixot, melyen pirossal illetve kékkel egy-egy kapcsoló komponens elemeit jelöltük meg. Természetesen könnyen találhatunk további kapcsoló komponenseket is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Most már kimondhatjuk az egyértelműség szükséges és elégséges feltételét biztosító tételt.

**Tétel.** Egy bináris mátrix akkor és csak akkor egyértelmű az adott horizontális és vertikális vetületeire nézve, ha nem tartalmaz kapcsoló komponenset.



7.3. ábra. A kapcsoló komponensek jelenlétének szükségessége nemegyértelmű mátrixok esetén. A mátrixban szükségszerűen létezik egy olyan sokszög, melynek csúcsaiban váltakozva 0-k és 1-esek helyezkednek el. A feltevés szerint a mátrix nem tartalmaz kapcsoló komponenset, így a pirossal jelzett pozíciókban alulról fölfelé haladva kizárólag 0 értékek jelenhetnek meg (ellenkező esetben a kék téglalapok kapcsoló komponenseket határoznának meg). A jobb felső sarokba így 0 érték kerül, ekkor azonban az  $(i'_1, j'_1)$ ,  $(i'_{k-1}, j'_1)$ ,  $(i'_{k-1}, j'_{k-1})$  és  $(i'_1, j'_{k-1})$  pozíciók kapcsoló komponenset alkotnak, ami ellentmondás.

**Bizonyítás.** A bizonyítás szükséges iránya triviális. Ha a mátrix tartalmaz kapcsoló komponenset, akkor annak elemeit invertálva a vetületek nem változnak. Az elégséges irány bizonyításához indirekt módon tegyük fel, hogy létezik két  $A \neq \tilde{A}$  mátrix úgy, hogy  $R(A) = R(\tilde{A})$ ,  $S(A) = S(\tilde{A})$  és  $A$  nem tartalmaz kapcsoló komponenset. Mivel  $A \neq \tilde{A}$  ezért létezik olyan  $(i_1, j_1)$  pozíció, hogy  $a_{i_1, j_1} \neq \tilde{a}_{i_1, j_1}$ . Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy például  $a_{i_1, j_1} = 1$  és  $\tilde{a}_{i_1, j_1} = 0$ . Mivel a sorösszegek mindkét mátrix esetében megegyeznek, ezért szükségszerűen az  $i_1$ -edik sorban valahol létezik egy másik elem is, mely mindkét mátrixban különböző (mondjuk a  $j_2$ -dik oszlopban), mégpedig amire  $a_{i_1, j_2} = 0$  és  $\tilde{a}_{i_1, j_2} = 1$ . Az oszlopösszegek egyezéséből adódóan viszont a  $j_2$ -dik oszlopban kell

valahol lennie (mondjuk az  $i_2$ -sorban) egy elemnek, amire  $a_{i_2, j_2} = 1$  és  $\tilde{a}_{i_2, j_2} = 1$ . A gondolatmenetet felváltva a sorokra és az oszlopokra folytathatjuk. Mivel csak véges számú elem található a mátrixban, így ez a lánc egy idő után bezárul, azaz egy olyan sorozatot kapunk, hogy  $(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), \dots, (i_t, j_t), \dots, (i_t, j_t)$ . Sorszámozzuk át most a sorozatnak azon tagjait, melyek az  $(i_t, j_t), \dots, (i_t, j_t)$  láncban vannak. Jelölje ezt a sorozatot  $(i'_1, j'_1), (i'_1, j'_2), \dots, (i'_k, j'_k) = (i'_1, j'_1)$ . A technikai egyszerűség kedvéért tegyük fel azt is, hogy  $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{k-1}$  és  $j'_1 < j'_2 < \dots < j'_{k-1}$ . Ezzel az általánosságot nem szorítjuk meg, a bizonyítás hátralevő része azonban a 7.3 ábrán nyomon követhető. Ekkor ugyanis  $a_{i'_{k-3}, j'_{k-1}} = 0$ , ellenkező esetben az  $(i'_{k-2}, j'_{k-2}), (i'_{k-2}, j'_{k-1}), (i'_{k-3}, j'_{k-2})$  és  $(i'_{k-3}, j'_{k-1})$  pozíciók kapcsoló komponenst alkotnának. Ezt a gondolatmenetet folytatva adódik, hogy szükségszerűen  $a_{i'_2, j'_{k-1}} = 0$  és  $a_{i'_1, j'_{k-1}} = 0$  is teljesül. Ekkor azonban az  $(i'_1, j'_1), (i'_1, j'_{k-1}), (i'_{k-1}, j'_1)$  és  $(i'_{k-1}, j'_{k-1})$  pozíciók kapcsoló komponenst alkotnak, ami ellentmond az eredeti feltételezésnek.

## 8. fejezet

# Speciális geometriai tulajdonságú képek rekonstruálása

Ahogy azt az előző fejezet végén láttuk, a kapcsoló komponensek jelenléte a rekonstrukciót bizonytalaná teszi, ami nyilvánvalóan gyakorlati szempontból hátrányos. Alapvetően kétféle stratégia kínálkozik a kialakult bizonytalanság csökkentésére. Az egyik az, hogy további vetületeket veszünk egyéb rácsirányok mentén. Ezzel a megközelítéssel kapcsolatban azonban kiderült, hogy a kapcsoló komponensek fogalma általánosítható, aminek következtében tetszőleges véges sok rácsirány esetén is megadható két különböző diszkrét halmaz, melyek vetületei ugyanazok az adott rácsirányok mentén. További negatív eredményként az is megállapítást nyert, hogy mind az egyértelműségi, mind a rekonstrukciós probléma NP-nehéz már három vetület esetén is, azaz nem várhatunk olyan hatékony rekonstrukciós algoritmusokat, mint amilyen például Ryser algoritmus [25].

A bizonytalanság csökkentésére irányuló másik elképzelés az, hogy feltételezzük, hogy a rekonstruálandó halmaznak ki kell elégítenie valamilyen geometriai tulajdonságot, és ezáltal szűkítjük a lehetséges megoldások terét.

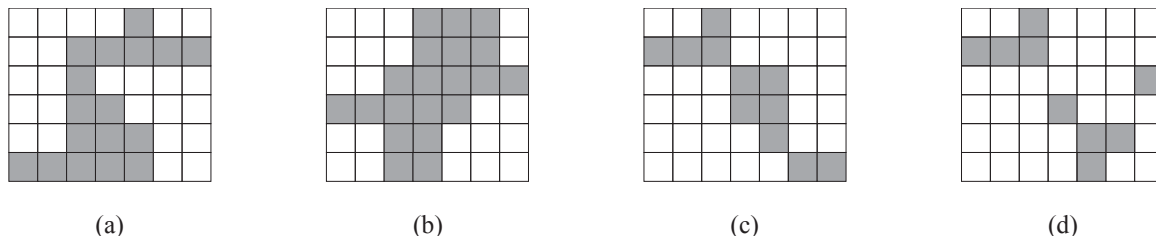
A továbbiakban ilyen speciális geometriai tulajdonsággal rendelkező osztályokban vizsgáljuk meg a rekonstrukciós feladatot. A jegyzet terjedelmének megszorításai miatt csak a legalapvetőbb algoritmusokkal fogunk foglalkozni. Az érdeklődő olvasó a [4] publikációban részletes leírást talál a geometriai tulajdonságokon alapuló rekonstrukció elméletéről. Először bevezetjük a szükséges definíciókat.

**Definíció:** Egy  $F$  diszkrét halmaz két pontja,  $P = (p_1, p_2)$  és  $Q = (q_1, q_2)$  *4-szomszéd*, ha  $|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| = 1$ . A  $P$  és  $Q$  pontok *8-szomszédok*, ha 4-szomszédok vagy ( $|p_1 - q_1| = 1$  és  $|p_2 - q_2| = 1$ ). A  $P_0, \dots, P_k$  különböző pontokból álló sorozat *4-út* (*8-út*) a  $P_0$  pontból a  $P_k$  pontba egy  $F$  diszkrét halmazban, ha a sorozat minden pontja  $F$ -ben van és  $P_l$  és  $P_{l-1}$  4-szomszédok (8-szomszédok) minden  $l = 1, \dots, k$  esetén. Egy  $F$  diszkrét halmaz *4-összefüggő* (*8-összefüggő*) ha  $F$  bármely két pontja között van  $F$ -beli 4-út (8-út). A 4-összefüggő halmazokat *poliominóknak* is hívják.

Ha egy diszkrét halmaz nem 4-összefüggő, akkor több poliominóból áll.  $F$  maximális 4-összefüggő részhalmazai  $F$  egyértelműen meghatározott particionálását adják.  $F$  egy maximális 4-összefüggő részhalmazát  $F$  egy *komponensének* nevezzük.

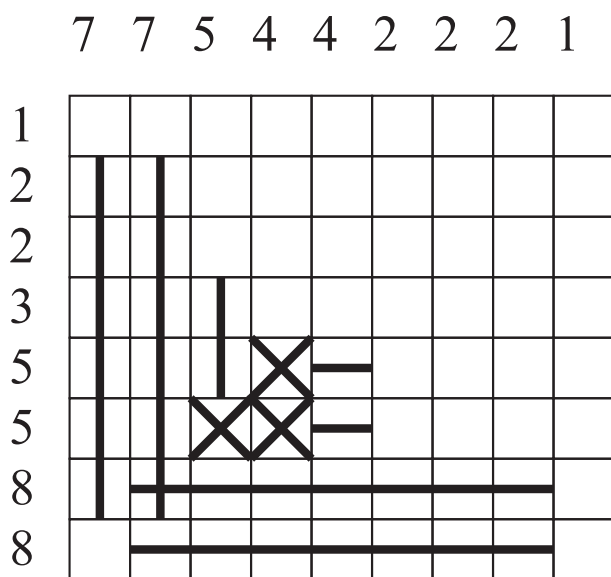
**Definíció.** Egy  $F$  diszkrét halmaz *horizontálisan konvex* (röviden *h-konvex*), ha minden sora 4-összefüggő. Egy  $F$  diszkrét halmaz *vertikálisan konvex* (röviden *v-konvex*), ha minden oszlopa 4-összefüggő. Ha egy diszkrét halmaz horizontálisan és vertikálisan is konvex, akkor *hv-konvexnek* nevezzük.

A fenti fogalmakat a 8.1 ábra szemlélteti.



8.1. ábra. (a) Egy poliomino. (b) Egy hv-konvex poliomino. (c) Egy hv-konvex 8- de nem 4-összefüggő diszkrét halmaz 3 komponenssel. (d) Egy általános hv-konvex diszkrét halmaz 4 komponenssel.

### 8.1. A mag-burok algoritmus



8.2. ábra. A mag-burok algoritmus mag konstrukciós operátorai által képzett halmazok egy példán.

A legelső geometriai tulajdonságot is kihasználó eljárás a [35] cikkben megjelent hv-konvex halmazokat rekonstruáló úgy nevezett *mag-burok algoritmus*. A módszer az  $F$  diszkrét halmazt a  $C$  fokozatosan növekvő és a  $B$  fokozatosan csökkenő halmaz segítségével két irányból iteratíván közelíti. A  $C$  halmaz a *mag*, melyre az eljárás során folyamatosan teljesül, hogy  $C \subseteq F$ , a  $B$  halmaz a *burok*, melyre pedig  $F \subseteq B$  teljesül. Kezdetben (a 0. iterációban)  $C_0 = \emptyset$

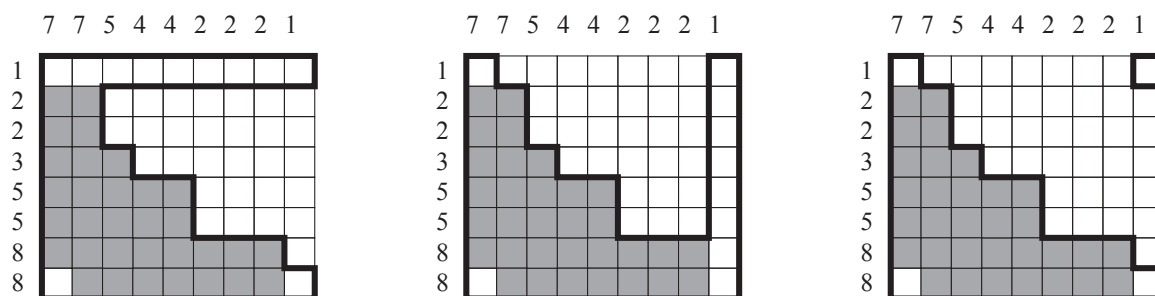
és  $B_0 = T$ , ahol  $T$  az  $F$  halmazt befoglaló legkisebb téglalap. Az algoritmus az  $R$  és  $S$  sor- illetve oszlopösszegek segítségével képez mindig új magot, illetve burkot, megállapítva, hogy hol lehet biztosan eleme az  $F$  halmaznak és hol nincs biztosan.

Az eljárás általános megadása előtt a mag- és burokképző operátorokat egy konkrét példán mutatjuk be. Tegyük fel, hogy  $R = (1, 2, 2, 3, 5, 5, 8, 8)$  és  $S = (7, 7, 5, 4, 4, 2, 2, 2, 1)$ . A  $c(B_0, R)$  operátor, a  $B_0$  (teljes befoglaló legkisebb téglalappal egyenlő) burok azon részeit választja ki, melyek az  $R$  vetület alapján mindenképpen a halmazba esnek. A kiválasztás alapja a következő. Mivel  $r_5 = 5$  és a rekonstruálandó halmaz horizontálisan konvex, így az 5. sorba ötféleképpen tudunk letenni egy 5 egység hosszúságú csíkot, vagy legbaloldalt kezdve azt, vagy eggyel jobbra csúsztatva, és így tovább. Az utolsó lehetőség az, hogy legjobbra toljuk el ezt a csíkot. Bárhogy is tesszük le azonban ezt a csíkot, a sor középső, ötödik eleme mindenképpen bele kell, hogy kerüljön az  $F$  halmazba. A 6. sorra teljesen ugyanilyen megállapítást tehetünk. A 7. sor esetében  $r_7 = 8$ , így itt csak kétféleképpen tehető le egy 8 egység hosszúságú csík. Mindkét esetben a sor másodiktól hetedikig terjedő elemei az  $F$  megoldáshalmaz részét fogják képezni. Ugyanez mondható el az utolsó sorról is. A  $c(B_0, S)$  operátor szerepe hasonló, csak az oszlopösszegekkel és a vertikális konvexitás alapján dolgozik. A  $c(B_0, R)$  és a  $c(B_0, S)$  operátorok által képzett halmazok elemeit a 8.2. ábrán láthatjuk, vízszintes illetve függőleges vonalakkal jelölve. Világos tehát, hogy  $c(B_0, R) \cup c(B_0, S)$  része lesz az  $F$  halmaznak. Azonban még ennél is tovább mehetünk, ugyanis az  $F$  halmaz mindkét irányból konvex kell, hogy legyen. Vehetjük tehát a  $C_1 = J(c(B_0, R) \cup c(B_0, S))$  halmazt, mint következő magot, ahol a  $J(X)$  azt a legkisebb mindkét irányban konvex halmazt adja vissza, amely  $X$ -et tartalmazza. A  $J$  operátor által a maghoz adott elemeket a 8.2 ábrán  $\times$ -szel jelöltük.

A következő lépésben az aktuális mag alapján szűkítjük a burkot, vízszintesen a  $b(C_1, R)$ , függőlegesen pedig a  $b(C_1, S)$  operátorok segítségével. A  $C_1$  halmaz az első és utolsó sor kivételével minden sorösszeget, és az első és utolsó oszlop kivételével minden oszlopösszeget kielégíti, így ezekben a sorokban és oszlopokban a burok összébb húzható. Mivel a burok  $F$  minden elemét biztosan tartalmazza, így a vízszintesen és függőlegesen kialakult burkok metszetét kell vennünk az új burok létrehozásához, azaz az új burok definiálható a  $B_1 = b(C_1, R) \cap b(C_1, S)$  metszettel. A burokképzés lépéseit a 8.3 ábra szemlélteti.

Ezután, az eljárás folytatódik a következő iterációval, mindig az aktuális mag segítségével alakítjuk ki az új burkot, és az aktuális burok alapján bővítjük a magot. Ezt egészen addig folytatjuk, amíg a mag egyenlő nem lesz a burokkal, és ebben az esetben megtaláljuk az adott feladat egy megoldását. Előfordulhat azonban az is, hogy a következő lépésben nem változik a burok és a mag sem, holott még nem találtuk meg a megoldást. Az olvasó könnyűszerrel ellenőrizheti, hogy jelenlegi példánk következő iterációjában is ez a helyzet. Ekkor egy próbálkozásokon alapuló visszalépéses keresést hajtunk végre. Eltároljuk egy veremmemóriában az aktuális magot és burkot, majd választunk egy olyan elemet, mely a burokban benne van, de a magban nincs. Ezt hozzáadjuk a maghoz és így folytatjuk az eljárást. Ugyanígy járunk el, akkor is, ha újból döntési helyzetbe kerülnénk. Lényegében visszalépéses megoldás keresés segítségével járjuk be a keresési teret. Ha olyan elemet töröltünk a burokból, mely a megoldásnak mindenképpen része kell, hogy legyen, akkor ez előbb-utóbb arra fog vezetni, hogy a  $C \subseteq B$  reláció nem fog teljesülni, és ekkor egy lépést visszalépünk.





8.3. ábra. A mag-burok algoritmus burok konstrukciós operátorai által képzett halmazok egy példán. A sorösszegek (balra) és oszlopösszegek (középen) által meghatározott burok, és a kettő metszete (jobbra).

Az algoritmus azon változatát adjuk meg, amely egy megoldás megtalálására szorítkozik, az összes megoldás megtalálása csak egy apró, az olvasó által is könnyen elvégezhető módosítást kíván meg. Az eljárás lépései a következők

1. Legyen  $S$  egy üres verem,  $k = 0$ ;  $C_0 = \emptyset$ ;  $B_0 = T$ .
2.  $B := B_k \cap b(C_k, R) \cap b(C_k, S)$ .
3.  $C := J((c(B_k, R) \cup c(B_k, S)))$ .
4. Ha  $C = C_k$ , akkor  $\{ (C, B, (i, j) \rightarrow S); C := C \cup \{(i, j)\} \}$ .
5.  $C_{k+1} := C$ ;  $B_{k+1} := B$ ;  $k := k + 1$ .
6. Ha  $C_k \subset B_k$ , akkor 2. lépés.
7. Ha  $C_k = B_k$ , akkor megtaláltuk a megoldást, ürítsük ki az  $S$  vermet, írjuk ki a megoldást és VÉGE.
8. Ha  $C_k \not\subset B_k$  és  $S$  üres, akkor nincs megoldás és VÉGE az eljárásnak, egyébként 9.
9.  $S \rightarrow (C, B, (i, j))$ ,  $C_{k+1} := C$ ,  $B_{k+1} := B \setminus \{(i, j)\}$ ;  $k := k - 1$  és lépünk a 2.-re.

## 8.2. A hv-konvex poliominók rekonstrukciója

A mag-burok algoritmus futási ideje legrosszabb esetben exponenciális, lévén bizonyos esetekben egy sima visszalépéses kereséssé redukálódik. Ráadásul nem is várhatunk sokkal hatékonyabb algoritmust erre a feladatra, a [48] cikkben ugyanis bizonyítást nyert, hogy a hv-konvex halmazok rekonstruálása NP-teljes probléma. Megindult hát a teljes problémakör feltérképezése, hogy milyen tulajdonságok együttes megléte biztosíthat polinomiális futási időt. Önmagában a horizontális vagy vertikális konvexitás NP-teljes rekonstrukcióra vezet, még abban az esetben is, ha a rekonstruálandó halmazról azt is feltételezzük, hogy összefüggő [7].

Ugyanez derült ki az általános 4-összefüggő halmazok rekonstruálásáról is [48]. Az egyetlen pozitív eredményt a hv-konvex és 4-összefüggő (vagy 8-összefüggő) halmazok rekonstruálásának vizsgálata hozta. Erre az osztályra azonban két lényegesen eltérő algoritmus is született, érdemes mindkettővel megismerkednünk. A továbbiakban a szakirodalomból átvett jelölésekkel összhangban a  $H = (h_1, \dots, h_m)$  vektor jelöli a diszkrét halmaz horizontális, a  $V = (v_1, \dots, v_n)$  pedig a vertikális vetületét. Feltételezzük továbbá, hogy a  $H$  és  $V$  vektorok kompatibilisek. Emellett bevezetjük a

$$T = \sum_{i=1}^m h_i = \sum_{j=1}^n v_j$$

jelölést is.

### 8.2.1. Mag-burok algoritmus hv-konvex poliominókra

Az eljárás alapötlete hasonló a korábban már ismertett mag-burok algoritmuséhoz [8]. Kiindulunk egy olyan halmazból, mely biztos része a megoldásnak és ezt a halmazt próbáljuk növelni, míg másrésztől folyamatosan zárunk ki elemeket a megoldásból a burok szűkítésével. Az eljárás bevezetéséhez szükségünk lesz néhány újabb fogalomra.

**Definíció.** Egy diszkrét halmaz horizontális és vertikális *kumulált vektorain* a  $\tilde{H} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_m)$  és  $\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  vektorokat értjük, ahol

$$\tilde{h}_i = \sum_{l=1}^i h_l \quad (i = 1, \dots, m)$$

és

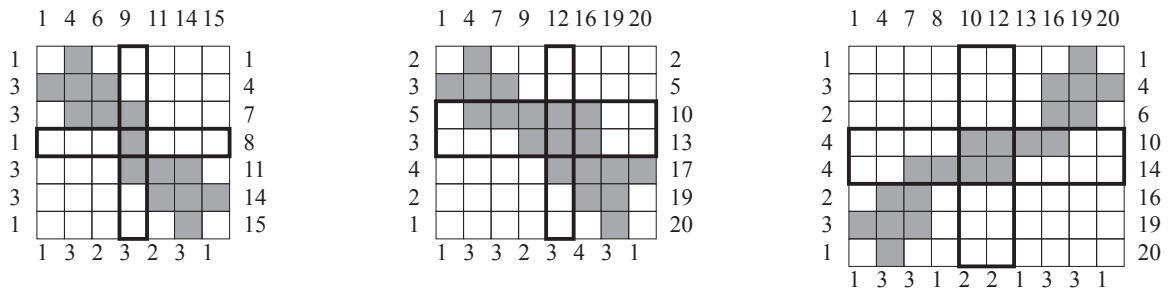
$$\tilde{v}_j = \sum_{l=1}^j v_l \quad (j = 1, \dots, n).$$

**Definíció.** Egy diszkrét halmaz  $i$ -edik sorát *medián sornak* nevezzük, ha  $\tilde{h}_{i-1} \leq T/2 \leq \tilde{h}_i$ . A halmaz  $j$ -edik oszlopát *medián oszlopnak* nevezzük, ha  $\tilde{v}_{j-1} \leq T/2 \leq \tilde{v}_j$ . A diszkrét halmaz *mediánjának* a medián sorainak és oszlopainak metszetét nevezzük.

Belátható, hogy a hv-konvex poliominók esetén a medián mindig belesik a diszkrét halmazba, azaz használható kiindulási magnak. A medián azonban 1, 2 vagy 4 elemű lehet csak (lásd 8.4. ábra). Az eljárás felgyorsítása érdekében ezért egy ennél lényegesen nagyobb magból szoktak kiindulni.

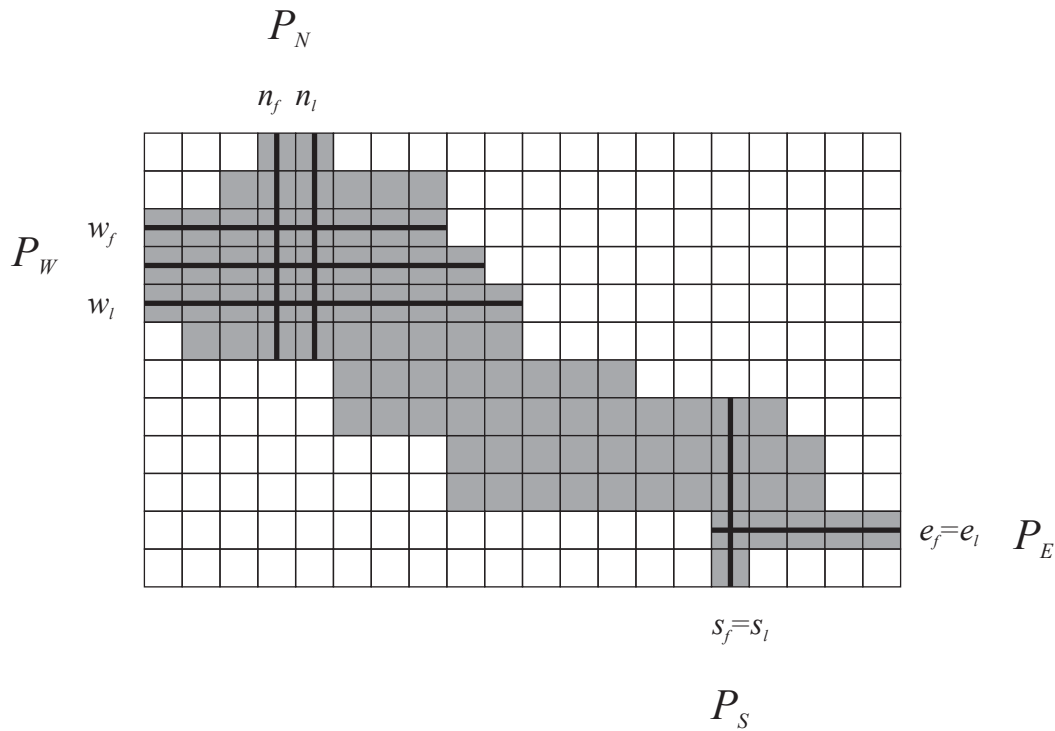
**Definíció.** Egy hv-konvex poliominó *északi (déli, keleti, nyugati) talpán* a poliominó azon pontjait értjük, melyek a befoglaló téglalap felső (alsó, bal, illetve jobb) oldalát érintik, ebben a sorrendben. Az északi talp legjobboldalibb és legbaloldallibb pozícióját  $n_f$  és  $n_l$  jelöli ebben a sorrendben. Hasonló jelöléseket alkalmazunk a déli talp legjobboldalibb és legbaloldallibb ( $s_f$  illetve  $s_l$ ), a keleti és nyugati talpak legfelső ( $e_f$  illetve  $w_f$ ) és legalsó pozícióira ( $e_l$  illetve  $w_l$ ). A poliominó *északi lábán* a

$$P_N = \bigcup_{i=n_f}^{n_l} \{(i, j) | j = 1, \dots, v_i\}$$



8.4. ábra. Példák hv-konvex poliominók mediánjára (a medián sorok és oszlopok vastaggal jelölve).

pozíciók halmazát értjük. A  $P_S$  déli,  $P_E$  keleti és  $P_W$  nyugati lábakat hasonlóan definiáljuk. A talpak és lábak definícióját szemléletesen a 8.5 ábra mutatja.

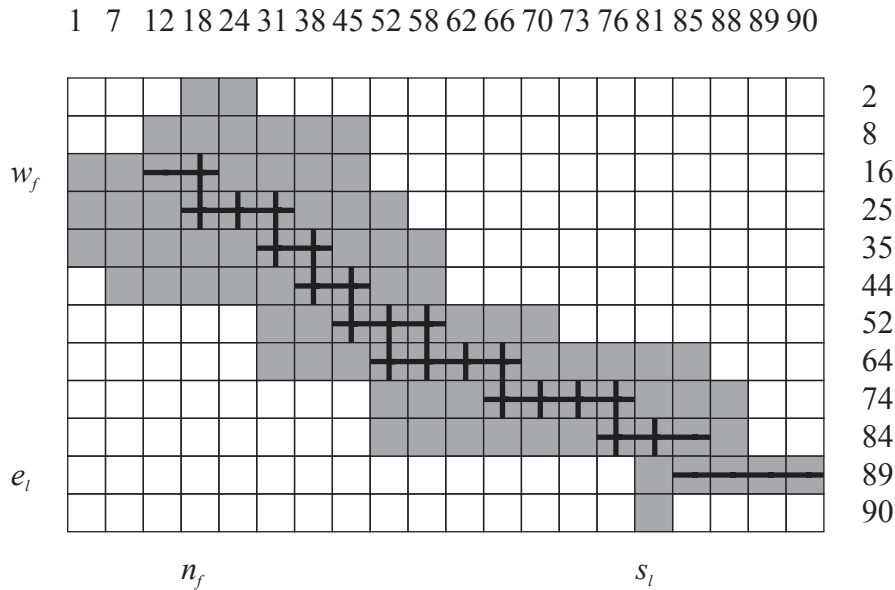


8.5. ábra. A talpak és a lábak fogalma (a lábak elemei vonalakkal jelölve).

**Definíció.** Egy  $F$  hv-konvex poliominó gerincén a  $\mathcal{G}(F) = NS \cup WE$  halmazt értjük, ahol  $NS = \{(i, j) | n_f \leq j \leq s_l, \tilde{v}_j \geq \tilde{h}_{i-1}, \tilde{h}_i \geq \tilde{v}_{j-1}\} \cup \{(i, j) | s_f \leq j \leq n_l, T - \tilde{v}_{j-1} \geq \tilde{h}_{i-1}, \tilde{h}_i \geq T - \tilde{v}_j\}$  és  $WE = \{(i, j) | w_f \leq j \leq e_l, \tilde{v}_j \geq h_{i-1}, \tilde{h}_i \geq \tilde{v}_{j-1}\} \cup \{(i, j) | e_f \leq j \leq w_l, T - \tilde{v}_{j-1} \geq \tilde{h}_{i-1}, \tilde{h}_i \geq T - \tilde{v}_j\}$ .

A gerinc fogalmát a 8.6 ábra szemlélteti.

Könnyen beláthatjuk, hogy a hv-konvex poliominók gerince mindig része magának a poliominónak. A definíció alapján az is világos továbbá, hogy a lábak is a poliominón belül helyezkednek el. Ennél kicsit erősebb állítást is megfogalmazhatunk, melynek bizonyítására itt



8.6. ábra. A gerinc fogalma. Az  $NS$  és  $WE$  halmazok elemei függőleges, illetve vízszintes vonalakkal jelezve.

nem térünk ki. Mégpedig azt, hogy a  $P_N \cup P_S \cup NS$  halmaz 4-összefüggő és minden sorban van eleme, és hasonlóan a  $P_E \cup P_W \cup WE$  halmaz is 4-összefüggő és minden oszlopban van eleme. Ezek a halmazok már megfelelően nagyok ahhoz, hogy őket kiindulási magként használva már gyors rekonstrukcióhoz jussunk. A rekonstrukálás során ismét a magot növeljük és a burkot csökkentjük úgynevezett *feltöltő operátorok* segítségével, melyek hasonlóak a magburok algoritmusban használt műveletekhez. Ezek az operátorok az alábbiak (az ismeretlen értékeket '?' jelöli,  $k, l, k_1, k_2, k_3$  pedig nemnegatív egész számok):

- Mag kiterjesztés konvexitás alapján: Tetszőleges  $[1?^k 1]$  sorozat átírható  $[11^k 1]$  sorozattá.
- Mag kiterjesztés koherencia alapján: Ha egy sor (oszlop) vetületi értéke  $l$  és a sor (oszlop) hossza  $k$ , akkor az adott sor (oszlop)  $[1, \dots, l] \cap [k - l + 1, \dots, k]$  halmazba eső indexű elemei 1-re állíthatók.
- Burok csökkentés konvexitás alapján: Tetszőleges  $[10?^k]$  sorozat átírható  $[100^k]$  sorozattá. Tetszőleges  $[?^k 01]$  sorozat átírható  $[0^k 01]$  sorozattá.
- Burok csökkentés koherencia alapján: Tetszőleges  $[?^{k_1} 1^{k_2} ?^{k_3}]$  sorozat átírható  $[0^{k_1 - (l - k_2)} ?^{l - k_2} 1^{k_2} ?^{l - k_2} 0^{k_3 - (l - k_2)}]$  sorozattá, ahol  $l$  az adott sor vagy oszlop vetületi értéke. Továbbá tetszőleges  $[0?^l 0]$  sorozat átírható  $[00^l 0]$  sorozattá, ha  $l < k$  (ahol  $l$  az adott sor vagy oszlop vetületi értéke).

A feltöltő operátorokat sorokra és oszlopokra egyaránt alkalmazhatjuk. Segítségükkel az alábbi rekonstrukciós algoritmust adhatjuk meg (itt is csak at egy megoldást megtaláló változatot ismertetjük). Az eljárás során minden lehetséges  $(P_N, P_S)$  lábpozíció-párra az alábbi lépéseket kell végrehajtanunk

1. Számítsuk ki  $NS$ -t.
2. A  $PN \cup PS \cup NS$  halmaz elemeit állítsuk 1-es értékűre.
3. Alkalmazzuk a feltöltő operátorokat, amíg lehet.
4. Ha minden pozíció értéket kapott, akkor megoldást találtunk és VÉGE.
5. Ha  $K \subset S$ , akkor 2SAT kifejezéssel keressük a megoldást.

Az 5. lépést terjedelmi okokból nem részletezzük, annak kifejtése megtalálható a [8] publikációban. Az eljárás legrosszabb esetben  $O(mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$  idő alatt fut le.

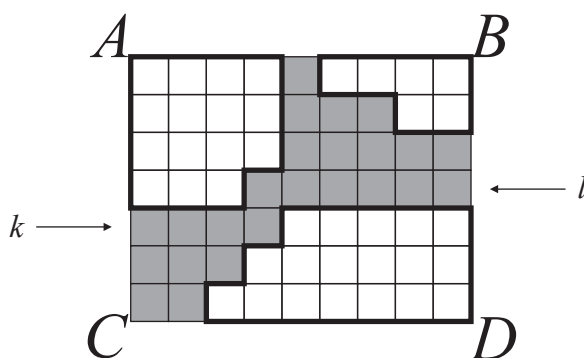
### 8.2.2. Rekonstrukció 2SAT kifejezésként

Az alábbiakban egy olyan általánosan is alkalmazható módszert ismertetünk, mely a rekonstrukciós feladatot logikai formulák kielégíthetőségére vezeti vissza. Az eljárást konkrétan a hv-konvex poliominók esetére mutatjuk be, ahogy az [20] cikkben is történt. Ennek érdekében felelevenítünk néhány ítéletkalkulusbeli fogalmat. Az ítéletkalkulusban egy logikai változót vagy annak negáltját *literálnak* hívjuk. A 2SAT kifejezésen diszjunkciók olyan konjunkcióját értjük, ahol minden tag 2 literálból áll. Például a  $(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$  formula egy 2SAT kifejezés, melyben  $x_1, x_2$  és  $x_3$  a logikai változók. A 2SAT probléma annak eldöntését jelenti, hogy egy adott 2SAT kifejezésnek van-e olyan kiértékelése, melyre a formula igaz. Ez a probléma a változók számában lineáris időben megoldható, ahogy ez például a [2] cikkből is ismert.

A rekonstrukció azon az észrevételen alapszik, hogy hv-konvex poliominók esetén a befoglaló téglalap bal-felső, jobb-felső, bal-alsó és jobb-alsó részei olyan diszjunkt, de egyenként 4-összefüggő (esetleg üres) régiókat tartalmaznak, melyekben a poliominónak nincsen eleme. Ezeket a régiókat rendre  $A, B, C$  és  $D$  betűkkel jelöljük (lásd a 8.7 ábrát). A rekonstrukciós eljárás során minden  $(i, j)$  pozícióhoz négy logikai változót rendelünk hozzá, melyeket  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$  és  $d_{ij}$  jelöl. Az  $a_{ij}$  változó akkor és csak akkor vesz fel igaz értéket, ha az  $(i, j)$  pozíció eleme az  $A$  régiónak, a többi változó értéke hasonlóan adódik. Egy további fontos észrevétel az, hogy a poliominó érinti a befoglaló téglalapját. Azt mondjuk, hogy az  $F$  poliominó  $(k, l)$ -nél érinti a befoglaló téglalapját, ha  $(k, 1) \in F$  és  $(l, n) \in F$  (lásd újra a 8.7 ábrát).

A bevezetett változók között különböző kapcsolatok állnak fenn, amelyeket logikai formulákkal fejezhetünk ki. Ezek az alábbiak

- Régiók diszjunkttsága:  $Dis = \bigwedge_{ij} \{x_{ij} \rightarrow \bar{y}_{ij} \mid x, y \in \{a, b, c, d\}, x\}$ .
- Régiók összefüggősége:  $Cor = \bigwedge_{ij} (a_{ij} \rightarrow a_{i-1,j} \wedge a_{ij} \rightarrow a_{i,j-1}) \wedge \bigwedge_{ij} (b_{ij} \rightarrow b_{i-1,j} \wedge b_{ij} \rightarrow b_{i,j+1}) \wedge \bigwedge_{ij} (c_{ij} \rightarrow c_{i+1,j} \wedge c_{ij} \rightarrow c_{i,j-1}) \wedge \bigwedge_{ij} (d_{ij} \rightarrow d_{i+1,j} \wedge d_{ij} \rightarrow d_{i,j+1})$ .
- Érintés:  $Anc = \overline{a_{k,1}} \wedge \overline{b_{k,1}} \wedge \overline{c_{k,1}} \wedge \overline{d_{k,1}} \wedge \overline{a_{l,n}} \wedge \overline{b_{l,n}} \wedge \overline{c_{l,n}} \wedge \overline{d_{l,n}}$ .
- Alsó korlátok oszlopokra:  $LBC = \bigwedge_{ij} (a_{ij} \rightarrow \overline{c_{i+v_j,j}} \wedge a_{ij} \rightarrow \overline{d_{i+v_j,j}}) \wedge \bigwedge_{ij} (b_{ij} \rightarrow \overline{c_{i+v_j,j}} \wedge b_{ij} \rightarrow \overline{d_{i+v_j,j}}) \wedge \bigwedge_j (\overline{c_{v_j,j}} \wedge \overline{d_{v_j,j}})$ .



8.7. ábra. A 2SAT alapú rekonstrukció során felügyelt területek és az érintés.

- Felső korlátok sorokra:  $UBR = \bigwedge_j (\bigwedge_{i \leq \min\{k,l\}} (\overline{a_{ij}} \rightarrow b_{i,j+h_i}) \wedge \bigwedge_{l \leq i \leq k} (\overline{a_{ij}} \rightarrow d_{i,j+h_i})) \wedge \bigwedge_j (\bigwedge_{k \leq i \leq l} (\overline{c_{ij}} \rightarrow b_{i,j+h_i}) \wedge \bigwedge_{\max\{k,l\} \leq i} (\overline{c_{ij}} \rightarrow d_{i,j+h_i}))$
- Összefüggőség:  $Con = \bigwedge_{ij} (a_{ij} \rightarrow \overline{d_{i+1,j+1}} \wedge b_{ij} \rightarrow \overline{c_{i+1,j-1}})$ .

Adott  $(k, l)$  érintés és  $H$  horizontális és  $V$  vertikális vetületek esetén legyen

$$F_{k,l}(H, V) = Cor \wedge Dis \wedge Anc \wedge LBC \wedge UBR \wedge Con, \quad (8.1)$$

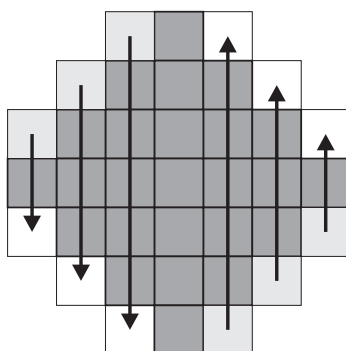
ami egy 2SAT kifejezés. Az eljárás helyességét az alábbi tétel adja.

**Tétel.** A (8.1)-ben definiált  $F_{k,l}(H, V)$  formula akkor és csak akkor kielégíthető, ha van olyan  $F$  poliominó, ami a befoglaló téglalapot  $(k, l)$ -nél érinti és vetületei éppen a  $H$  és  $V$  vektorokkal egyeznek meg.

Ez alapján a rekonstrukciós algoritmus csupán annyiból áll, hogy minden  $(k, l)$  párra ellenőrizzük, hogy  $F_{k,l}(H, V)$  kielégíthető-e, és ha igen, akkor outputként adjuk az  $F = \overline{A \cup B \cup C \cup D}$  halmazt. Az eljárás futási ideje legrosszabb esetben  $O(mn \cdot \log mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$ , ami rosszabb, mint a mag-burok algoritmus hv-konvex poliominókra vonatkozó változatáé. A kísérleti eredmények azonban azt mutatták, hogy átlagos esetben a 2SAT formulán alapuló algoritmus teljesít jobban [6].

### 8.2.3. Egyértelműségi eredmények, irányított halmazok

Azt már láttuk, hogy általános esetben a kapcsoló komponensek jelenlétének következtében akár exponenciálisan sok olyan bináris mátrix is lehet, melyeknek horizontális és a vertikális vetületeik megegyeznek. Érdeemes megvizsgálunk, hogy a hv-konvex poliominók esetén mit mondhatunk az egyértelműség szempontjából. A választ a [21] cikkből kapjuk meg, ahol bizonyítást nyert, hogy ebben a sokkal szűkebb halmazosztályban is még mindig exponenciálisan sok lehet a megoldások száma, adott  $H$  és  $V$  vektorok esetén. A bizonyítás a kapcsoló komponensek egy speciális hv-konvex poliominón való ügyes elhelyezésén alapszik, ahogyan ezt a 8.8 ábra is mutatja. Mivel a kapcsoló komponensek a hv-konvex poliominó szélén helyezkednek el, így átkapcsolásuk során a megfelelő geometriai tulajdonságok megőrződnek. A komponensek egymástól függetlenül válthatók át, így  $k$  darab kapcsoló komponens elhelyezése legalább  $2^k$  darab különböző megoldást biztosít.

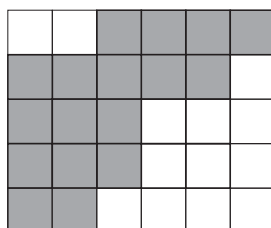


8.8. ábra. Kapcsoló komponensek elhelyezése egy hv-konvex poliominón. Az exponenciálisan sok megoldás létezésének bizonyítása a  $k = 3$  esetre.

Létezik azonban a hv-konvex poliominóknak egy olyan részosztálya, ahol az egyértelmű rekonstrukció már garantált.

**Definíció.** Egy  $F$  poliominót *irányított*nak nevezzük, ha az  $(m, 1)$  pontjából a halmaz bármely más pontja elérhető 4-úton keresztül.

A 8.9 ábra egy irányított hv-konvex poliominót mutat. Ezt az osztályt a [21] cikkben vezették be, a vonatkozó rekonstrukciós algoritmust pedig a [36] publikációban közölték.



8.9. ábra. Egy irányított hv-konvex poliominó.

**Tétel.** Bármely hv-konvex irányított  $m \times n$  méretű poliominó egyértelműen rekonstruálható a horizontális és vertikális vetületeiből  $O(mn)$  időben.

Az eredmény igazolásához az alábbi két lemmát használjuk fel, melyeket bizonyítás nélkül közlünk.

**8.1. Lemma.** Legyen  $F$  egy hv-konvex irányított poliominó a  $H = (h_1, \dots, h_m)$  és  $V = (v_1, \dots, v_n)$  vetületekkel. Akkor  $(m, j) \in F$  akkor és csak akkor, ha  $1 \leq j \leq h_m$ , és  $(i, 1) \in F$  akkor és csak akkor, ha  $m - v_1 < i \leq m$ .

**8.2. Lemma.** Legyen  $F$  egy irányított hv-konvex poliominó,  $D \subset F$  és  $(i, j) \in \{1, \dots, m - 1\} \times \{2, \dots, n\}$  egy olyan pozíció, hogy minden  $(i', j') \neq (i, j)$ -re ha  $i' \geq i$  és  $j' \leq j$ , akkor  $(i', j') \in F \Leftrightarrow (i', j') \in D$ . Ekkor  $\sum_{t=i+1}^n d_{tj} < v_j$  és  $\sum_{t=1}^{j-1} d_{it} < h_i$  szükséges és elegendő ahhoz, hogy  $(i, j) \in F$  teljesüljön.

Azaz ha  $F$  egy irányított hv-konvex poliominó, akkor a 8.1. Lemma alapján  $F$  első oszlopa és utolsó sora egyértelműen meghatározott  $v_1$  és  $h_m$  által, tehát az  $F$  poliominó egy  $D$  részhalmaza megtalálható (mely  $F$  első oszlopából és utolsó sorából áll). Ekkor az  $(m - 1, 2)$

pozícióra a 8.2. Lemma feltételei teljesülnek. Ezért ezen lemma alkalmazásával megállapítható, hogy az  $(m - 1, 2)$  pozíció  $F$ -hez tartozik-e, és ha igen, akkor ez hozzávehető  $F$ -hez, azaz  $F = F \cup \{(m - 1, 2)\}$  lesz. A pozíciókon a bal alsóból a jobb felső felé sorfolytonosan haladva az aktuális  $D$  részhalmaz mindig teljesíteni fogja a 8.2. Lemma feltételeit, így a fenti eljárás mindig megismételhető. Az eljárás befejeztével adódik, hogy  $F = D$ . Mivel a mátrixon csak egyszer kell sorfolytonosan végighaladni, így a futási idő  $O(mn)$ , a konstrukció pedig az egyértelműséget is garantálja.

### 8.3. A hv-konvex 8-összefüggő halmazok rekonstrukciója

Az előző fejezetben megismert hv-konvex polimonókat rekonstruáló eljárások apróbb, az idő-bonyolultságot nem befolyásoló módosításokkal kiterjeszthetők az általánosabb hv-konvex 8-összefüggő halmazok osztályára is. A mag-burok megoldás esetén a gerinc definíciójában az egyenlőségeket nem megengedve a  $P_N \cup P_S \cup NS$  ezúttal 8-összefüggő és minden sorban elemet tartalmazó halmaz lehet a kiindulási mag. Értelemszerűen, a  $P_E \cup P_W \cup WE$  halmaz ekkor 8-összefüggő és minden oszlopban van eleme. Ez a módosított eljárás a [16]-ben került közlésre. A 2SAT formulán alapuló rekonstrukció során a kiterjesztéshez csupán a 4-összefüggőséget biztosító *Con* formulát kell elhagyni az  $F_{k,l}(H, V)$  formula összeállításakor. Végezetül megemlítjük, hogy a 8- de nem 4-összefüggő hv-konvex halmazok rekonstruálására ismert egy az előzőeknél gyorsabb,  $O(mn \cdot \min\{m, n\})$  futási idejű algoritmus is [5].



## 9. fejezet

# A bináris rekonstrukció, mint optimalizálási feladat

### 9.1. A rekonstrukciós feladat átírása optimalizálási problémára

Ahogy a folytonos rekonstrukció esetében, úgy a bináris tomográfiában is lehetőségünk van a vetületek és a vetületi geometria ismeretében egy egyenletrendszer megoldására visszavezetni a feladatot. A kép  $m \times n$  méretű befoglaló téglalapján belül a kétdimenziós egészsrács pontjaihoz egy-egy változót ( $x_1, x_2, \text{stb.}$ ) hozzárendelve (a rekonstruálandó kép befoglaló téglalapján belül) egy

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (9.1)$$

alakú egyenlethez jutunk, ahol  $A$  a vetítésugarak és a pixelek közötti kapcsolatot leíró mátrix,  $\mathbf{b}$  a mért vetületi értékeket tartalmazó vektor,  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{mn}$  pedig a megoldást leíró (ismeretlen) bináris vektor. Például, ha a rekonstruálandó halmaz horizontális vetülete  $(3, 1, 2)$ , a vertikális vetülete pedig  $(2, 3, 1)$ , akkor a 9.1 ábrán látható változók bevezetésével a feladatunk egy olyan bináris  $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_9)$  vektor megtalálása, mely kielégíti a (9.1) egyenletrendszert, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és  $\mathbf{b}^T = (3, 1, 2, 2, 3, 1)$ .

A (9.1) egyenletrendszer megoldása azonban még nehezebb feladat elé állít minket, mint a folytonos esetben. Egyrészt a folytonos esethez hasonlóan a vetületeken jelentkező mérési hibák következtében itt is elképzelhető, hogy a egyáltalán nincs is megoldás. Nagyobb problémát jelent azonban, hogy a rendelkezésre álló kevés vetület következtében az egyenletrendszer általában erősen alulhatározott, azaz a változók száma lényegesen nagyobb, mint az egyenletek száma. Emellett meg kell birkóznunk azzal a feladattal is, hogy kizárólag bináris

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	3
	$x_4$	$x_5$	$x_6$	1
	$x_7$	$x_8$	$x_9$	2
	2	3	1	

9.1. ábra. Diszkrét rekonstrukciós feladat átírása egyenletrendszerre.

megoldásokat fogadunk el. Így a 3. fejezetben megismert algebrai rekonstrukciós technikákat közvetlen formájukban ritkán használjuk a bináris tomográfiában. Egy kifejezetten a bináris tomográfiára kidolgozott algebrai rekonstrukciós módszer az úgynevezett DART (Discrete Algebraic Reconstruction Technique, diszkrét algebrai rekonstrukciós technika), melynek tárgyalása azonban a jegyzet keretein kívül esik. Erről részletesebben az olvasó a [12] cikkben. Más megközelítéshez kell fordulnunk tehát. Az egyenletrendszer megoldása helyett áttérünk egy optimalizálási feladatra, ahol célunk a

$$C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \gamma \cdot \Phi(\mathbf{x}) \quad (9.2)$$

függvény minimalizálása a lehetséges bináris megoldások halmazán. A (9.2) jobboldalának első tagja biztosítja, hogy a megoldás vetületei megközelítőleg megegyeznek az előírtakkal. Ezzel elkerülhetők az inkonzisztenciából adódó problémák is. A második tag segítségével építhetjük be a rekonstruálandó képről előzetesen rendelkezésre álló információt. A  $\Phi(\mathbf{x}) : \{0,1\}^m \rightarrow \mathbb{R}$  függvény mérheti például az adott megoldás simaságát, vagy egy  $\mathbf{x}_{\text{mod}}$  modellképhez való hasonlóságot. Végül  $\gamma \geq 0$  egy alkalmasan választott súly, melynek segítségével kifejezhető, hogy a vetületi vagy az a-priori információt tartjuk megbízhatóbbnak. A (9.2) optimalizálási feladat megoldására általában valamilyen numerikus módszert (leggyakrabban a [44] cikkben közölt dc programozást) szoktak választani, vagy a kombinatorikus optimalizálás eszköztárához fordulnak. A továbbiakban a megoldásra két általánosan elterjedt optimalizálási technikát, a szimulált hűtést és a evolúciós programozást fogjuk ismertetni.

## 9.2. Bináris rekonstrukció szimulált hűtéssel

### 9.2.1. A szimulált hűtés

A hagyományos gradiens-alapú keresőalgoritmusok a célfüggvény optimalizálása során csak egyre csökkenő értékű megoldásokat fogadnak el, így könnyen lokális optimumba ragad-

hatnak. Ahhoz, hogy nagyobb esélyünk legyen a globális optimumot megtalálni, meg kell engednünk a keresés során azt, hogy az aktuális megoldásénál nagyobb célfüggvényérték irányába is elmozdulhassunk. Természetesen az ilyen lépéseket csak körültekintő módon lehet megtenni, hogy maga a folyamat az optimumhoz közeli eredménnyel záruljon. A fenti ötlet egy megvalósítása a *szimulált hűtés*, melyet a [41] cikkben ismertettek először. Az eljárás azt a fizikai folyamatot imitálja, amikor egy folyékony fém a fokozatos hűtés során megdermed. A termikus zajnak köszönhetően a folyékony fém energiája a hűtés során néha növekszik, de a hűtési hőmérsékletet megfelelően szabályozva a fém végül minimális energiájú kristályrácsban dermed meg. A szimulált hűtés a fenti észrevételre alapuló, általánosan alkalmazható véletlen keresési technika, mely a következő lépésekből áll.

1. Jelölje  $\mathbf{x}$  a kezdeti megoldást,  $T$  pedig a kezdőhőmérsékletet.  $\mathbf{x}_{act} := \mathbf{x}$ .
2. Módosítsuk az  $\mathbf{x}_{act}$  aktuális megoldást véletlenszerűen. Jelölje az így kapott megoldást  $\mathbf{x}'$ .
3. Ha  $C(\mathbf{x}') < C(\mathbf{x})$  akkor  $\mathbf{x}_{act} := \mathbf{x}'$  és ugorjunk az 5. lépésre.
4. Legyen  $r \in [0, 1]$  egy véletlen szám és legyen  $\mathbf{x}_{act} := \mathbf{x}'$  ha  $r < e^{-\frac{C(\mathbf{x}') - C(\mathbf{x})}{T}}$  (ellenkező esetben ne változtassunk az aktuális megoldáson).
5. Ha a leállási feltétel teljesül, akkor VÉGE, egyébként csökkentjük a  $T$  hőmérsékletet és ugorjunk a 2. lépésre.

Az eljárás előnye, hogy széleskörűen alkalmazható és megfelelő (végtelen sokáig tartó) hőmérsékletcsökkentés esetén bizonyítottan 1 valószínűséggel megtalálja a globális optimumot. Hátránya azonban, hogy sok paramétere van, melyeknek az adott optimalizálási problémára történő finomhangolása nehézkes. Kezdeti megoldásként általában egy véletlenszerű vagy egy minden változójában azonos megoldást szokás választani. A kezdőhőmérséklet gondos megválasztása mellett fontos szerepe van a hűtési karakterisztika megadásának, azaz annak, hogy a hőmérséklet hogyan csökken az iterációk során. Általában az aktuális hőmérsékletet valamilyen 1-nél kisebb, de ahhoz közeli értékkel szorozzák. Ez az érték az iterációk során dinamikusan változhat is az eltelt iterációk számának függvényében. A leállási feltétel lehet például adott számú iteráció lefutása vagy az, ha már adott számú iteráció óta nem változik az addig talált legjobb megoldás értéke. Mindezek a paraméterek azonban jelentősen befolyásolják az eljárás sikerességét.

### 9.2.2. Pixel és objektum alapú megközelítések

A szimulált hűtési algoritmus 2. lépésében az aktuális megoldást véletlenszerűen változtatjuk meg. Az eljárás diszkrét rekonstrukcióra való alkalmazása során kétféle megközelítéssel járhatunk el. Ha a képet bináris mátrix (vagy vektor) alakban keressük, akkor a legkézenfekvőbb módszer az aktuális megoldás megváltoztatására az, hogy egy véletlenszerűen választott pixelt invertálunk a képen. Ez a megközelítés könnyen kódolható és gyors algoritmust eredményez, hátránya azonban, hogy a képről esetlegesen meglévő strukturális információt

nem veszi figyelembe. A másik megközelítésben a képet úgy fogjuk fel, mint geometriai objektumok egy halmazát. Ha például ismert, hogy a képen diszjunkt körlapok helyezkednek el, akkor érdemes ezeket az objektumokat geometriai paramétereikkel reprezentálnunk, azaz egy  $\langle (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2), \dots, (x_n, y_n, r_n) \rangle$  listával, ahol  $n$  a körlapok számát,  $(x_i, y_i)$  az  $i$ -edik körlap középpontját,  $r_i$  pedig annak sugarát jelöli. Ekkor az aktuális megoldás megváltoztatása egy adott (véletlenszerűen választott) körlap sugarának véletlenszerű mértékben való növelését vagy csökkentését, vagy a középpontjának véletlenszerű elmozgatását jelenti. A paraméterekkel megadott objektumokat azonban minden iterációban rá kell „vetítenünk” a pixelrácsra ahhoz, hogy a diszjunkságot ellenőrizni tudjuk és a vetületeket számíthassuk, ami időigényes feladat. Így ez a megközelítés általában lassabb, mint a pixel alapú eljárások. Előnye viszont, hogy ki tudja használni a strukturális előzetes információt, de épp ez szabja meg alkalmazhatóságának korlátait is, hiszen csak olyan esetben használható, ha a megfelelő információ rendelkezésre áll.

## 9.3. Bináris rekonstrukció genetikus algoritmussal

### 9.3.1. Genetikus algoritmusok

A szimulált hűtés nehéz paramétereizhetősége mellett általában annak lassúságát szokták hátrányként megemlíteni. Emellett adódhatnak más problémák is. Előfordulhat, hogy egy adott rekonstrukciós feladatnak sok lokális optimuma van, és ezek között nagy, a célfüggvény értékét növelő lépéseket kell tenni. Ezekben az esetekben szükség lenne a nagy változtatást biztosító lépésekre is. A szimulált hűtés azonban jellegéből adódóan csak kis lépéseket enged meg. A problémára megoldást nyújthatnak a *genetikus algoritmusok*. Ahogyan a szimulált hűtés, úgy a genetikus algoritmusok is véletlenszerű keresési technikák, a szimulált hűtéssel szemben azonban itt nem egy szálon folyik a keresés, hanem egyszerre számos irányban. Ezek az eljárások az evolúciós folyamatot próbálják mesterségesen utánozni. Ennek lényege az, hogy egy rendszer egyedei folyamatos átalakuláson mennek keresztül és az életképebb egyedek nagyobb valószínűséggel tudják tulajdonságaikat a következő generáció egyedeire átörökíteni.

A genetikus algoritmusoknak igen kiterjedt a szakirodalma, mi most csak a legegyszerűbbekre fogunk szorítkozni. A technika iránt érdeklődő olvasónak a [3] könyvet ajánljuk. A folyamat során az alábbiak modellezésére van szükségünk.

- Egyedek: a probléma lehetséges megoldásai.
- Kiindulási populáció: a kezdetben rendelkezésre álló egyedek.
- Fitness-függvény: minden egyedhez hozzárendel egy valós értéket, mely az optimális megoldástól való távolságát jelzi.
- Szelekció: a populációból a legjobb fitness-értékű egyedek kiválasztása.
- Rekombináció (keresztezés): képezzünk két kiválasztott egyedből új egyedeket a keresztezés operátor segítségével.

- Mutáció: a mutációs operátor segítségével módosítsunk néhány egyedet.

Az egyedek reprezentálására a következő fejezetekben fogunk kitérni, itt is alkalmazhatjuk a pixel és az objektum alapú megközelítést is. A kiindulási populáció általában véletlenszerűen legenerált egyedekből áll. A fitness-függvény egy adott egyed optimális megoldástól való távolságát jelzi. Noha az optimális megoldás értelemeszerűen nem ismert, fitness-függvényként minden további nélkül használhatjuk a célfüggvény értékét. Így a kisebb fitness-értékű egyedek számítanak jobbnak. A szelekció során a rosszabb (esetünkben nagyobb) fitness-értékű egyedeket eldobjuk és csak a legjobb  $N$  darab egyedet tartjuk meg, ahol  $N$  a populáció előre meghatározott számossága. A mutációs operátor segítségével egy egyedből egy új egyedet képzünk, annak bizonyos tulajdonságainak módosításával. A rekombinációs (más néven crossover) operátorral két egyedből képzünk egy vagy két újat az ősök tulajdonságainak keverésével. A genetikus algoritmusok főbb lépései az alábbiak:

1. Kiindulási populáció létrehozása.
2. Populáció kiértékelése.
3. Ha a leállási feltétel teljesül, akkor VÉGE, egyébként hajtsuk végre a rekombinációs, mutációs és szelekciós operátorokat és ugorjunk a 2. lépésre.

A kiindulási populáció egyedeit egyéb ismeret hiányában előállíthatjuk véletlenszerűen is. A populáció kiértékelése annyit tesz, hogy minden egyedre meghatározzuk annak fitness-értékét. A leállási feltétel itt is, mint a szimulált hűtésnél, lehet adott számú iteráció lefutása, vagy az, ha már adott iteráció óta, nem változik az addig talált legjobb fitness-értékű megoldás értéke. Az, hogy egy adott egyed mekkora valószínűséggel érintett a mutáció által, valamint hogy mekkora valószínűséggel vesz részt új egyedek rekombinációval való létrehozásában függ az egyed fitness-értékétől (például a jobb fitness-értékű egyedek nagyobb valószínűséggel kereszteződhetnek), valamint az  $N_m$  és  $N_r$  globális paramétereiktől is, melyek rendre azt mondják meg, hogy hány egyedden hajtsunk végre mutációt és hány új egyedet hozunk létre keresztezéssel. Ezek a globális paraméterek lehetnek állandóak a folyamat során, de időben változhatnak is.

A genetikus algoritmusok előnyei közé szokás sorolni többek között egyszerű kódolhatóságukat és széleskörű alkalmazhatóságukat (nagy keresési térben is működnek és kevés információt igényelnek a célfüggvényről). Hátrányuk, hogy lokális optimumba ragadhatnak és bizonyos esetekben nehéz a probléma reprezentálása (ahogy ezt majd a következő fejezetben is látni fogjuk). Emellett a paraméterezésük is nehéz lehet.

### 9.3.2. Mutációs és rekombinációs operátorok a pixel alapú megközelítésben

A pixel alapú megközelítés esetén a képet egy bináris mátrixként (vagy annak pozícióit sorfolytonosan felírva bináris vektorként) értelmezzük. A mutációs operátor megegyezik a szimulált hűtés végrehajtása során már megismert módosítással; a mátrix egy adott pozícióját invertáljuk. Kézenfekvő lenne a keresztezési operátort naív módon úgy definiálnunk, hogy az

két mátrixból ( $A$ -ból és  $B$ -ből) úgy hozzon létre egy harmadikat, hogy annak elemeit véletlenszerűen hol az  $A$  hol a  $B$  megfelelő pozícióban lévő elemével tölti fel. Ez a módszer azonban a diszkrét képrekonstrukció szempontjából nem vezet kielégítő eredményre. A probléma az, hogy a véletlenszerű másolgatás következtében az eredményül kapott mátrixban elvész a két-dimenziós információ, a szülők jó tulajdonságait legtöbbször nem örökli az új egyed, így a fitness-értéke is rosszabb lesz, mint a szülöké. Hogy ezt jobban megértsük, vessünk egy pillantást a 9.2 ábrára. Célunk egy  $6 \times 6$ -os méretű kép rekonstruálása, melynek vetületei mind horizontális mind vertikális irányból a  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$  vektorral adhatók meg. Ilyen kép sok van, de mi azt a megoldást keressük, ahol a kép lehetőleg sima, azaz ahol az összes 4-szomszédos pontpárt tekintve a pontok lehetőleg minél több esetben azonos színűek. Ez utóbbi igényünk rovására akár hajlandóak vagyunk a vetületektől némileg eltérni is (amivel azt fejezzük ki, hogy a mért vetületek nem feltétlenül teljesen pontosak). Tekintsük a következő minimalizálendő célfüggvényt

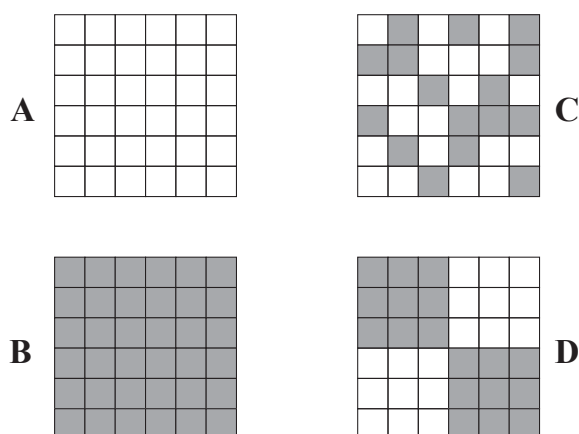
$$C(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^6 \left( \sum_{j=1}^6 x_{ij} - 3 \right)^2 + \sum_{j=1}^6 \left( \sum_{i=1}^6 x_{ij} - 3 \right)^2 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^6 \sum_{l \in N_4(j)} |x_j - x_l|,$$

ahol  $N_4(j)$  a  $j$ -edik pixel 4-szomszédainak halmazát jelöli. A képlet első két tagja a horizontális illetve a vertikális vetületi eltérést méri. A harmadik tag a simasáért felelős. Mind a 36 pixel esetében megvizsgáljuk azt, hogy az adott pixel és a vele 4-szomszédosak azonos értéket vesznek-e fel, ha nem akkor minden egyes eltérő értékű pixelpár esetén az összeg értéke 1-gyel növekszik. Tehát minél több 4-szomszédos pixel-pár értéke különbözik, annál nagyobb lesz a harmadik tag értéke. A  $3/2$ -es szorzóval az elvárt simaságra és a vetületek kielégítésére vonatkozó igényeink fontosságát paraméterezzük.

Van már két megoldási javaslatunk ( $A$  és  $B$ ), amelyeknek jó a fitness-értékük ( $C(A) = 54 + 54 + 0 = 108$  és hasonlóan  $C(B) = 108$ ), ugyanis megfelelően simák, de a vetületeket még nem elégték ki. Ha most  $A$ -t és  $B$ -t naív módon keresztezzük, akkor nagy valószínűséggel valamilyen a  $C$ -hez hasonló eredményképet kapunk, ami az előírt vetületeket sem elégíti ki kellőképpen és ugyanakkor a szülők simaságát sem őrizte meg. Ráadásul az utód fitness-értéke, mindkét szülő fitness-értékénél rosszabb ( $C(C) = 4 + 4 + 1,5 \cdot 78 = 125$ ). Sokkal eredményesebb lenne a rekombinációs operátort úgy definiálni, hogy az nagy összefüggő területeket tudjon másolni és a vetületeket se rontsa el eközben. Így esélyünk lenne egy a  $D$ -hez hasonló ( $C(D) = 0 + 0 + 1,5 \cdot 24 = 36$  fitness-értékű) ideális vagy ahhoz nagyon közeli képet kapnunk a keresztezés után.

Egy ilyen megközelítés került ismertetésre J. Batenburg által a [11] cikkben, melyet most röviden mi is bemutatunk (a mutációs és rekombinációs operátorokra egy másik trükkös megoldást láthat az olvasó a [22] munkában). Az operátorok bemutatása előtt egy rövid kitérőt kell tennünk. Arra keressük a választ, hogy hogyan rekonstruálható egy olyan  $m \times n$  méretű  $A$  bináris mátrix, melynek sorösszegvektora  $R$ , oszlopösszegvektora  $S$  és amely egy megadott  $M$  mátrixhoz a leginkább hasonló, tehát a lehető legtöbb pozícióban megegyezik  $A$  és  $M$ . Azaz amelyre

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} - m_{ij}|$$



9.2. ábra. Egy példa arra, hogy a pixel-alapú megközelítés esetén a naív keresztezési operátor miért alkalmatlan.

minimális. A kétvetületes bináris rekonstrukciós probléma megfogalmazható a gráfelmélet nyelvén is [24]. Tekintsünk egy olyan  $G(V, E)$  gráfot, melynek pontjai

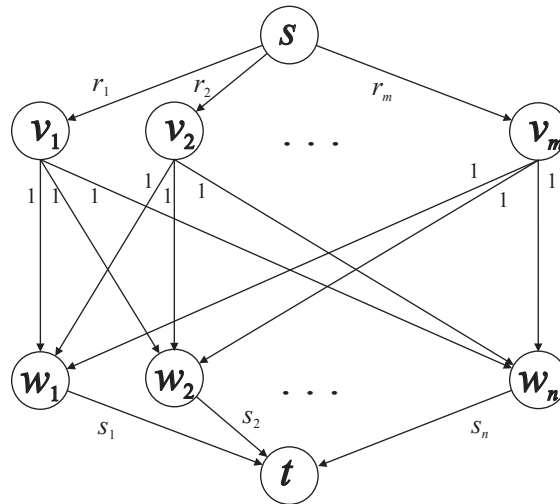
$$V = \{s, t, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n\},$$

élhalmaza pedig az  $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$  halmaz, ahol

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(s, v_i) | i = 1, \dots, m\} \\ E_2 &= \{(w_j, t) | j = 1, \dots, n\} \\ E_3 &= \{(v_i, w_j) | i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Legyen továbbá adott a  $c : E \rightarrow N$  kapacitásfüggvény úgy, hogy  $c(s, v_i) = r_i$  minden  $E_1$ -beli élre,  $c(w_j, t) = s_j$  minden  $E_2$ -beli élre, valamint  $c(e) = 1$  minden  $E_3$ -beli él esetén. Ez a konstrukció a gráfon az  $s$  forrással és a  $t$  nyelővel egy hálózatot definiál, melyet a 9.3 ábra mutat. Belátható, hogy a hálózaton egy maximális folyam mindig megfelel egy a vetületeket kielégítő rekonstrukciónak oly módon, hogy a mátrixban az  $(i, j)$  pozíció értéke akkor és csak akkor 1, ha a maximális folyamban a  $(v_i, w_j)$  él értéke 1. Ilyen folyam (rekonstrukció) persze több is lehet. Legyen most továbbá adott a  $p : E \rightarrow \{0, -1\}$  költségfüggvény is úgy, hogy  $p(s, v_i) = 0$  minden  $E_1$ -beli élre,  $p(w_j, t) = 0$  minden  $E_2$ -beli élre és  $c(v_i, w_j) = -m_{ij}$  minden  $E_3$ -beli élre. Az is bizonyítható, hogy az ezzel a költségfüggvénnyel ellátott gráfon egy minimális költségű maximális folyam éppen egy az adott vetületepárt kielégítő és  $M$ -mel legtöbb közös 1-est tartalmazó (azaz  $M$ -hez leginkább hasonló) rekonstrukció. Ez a folyam ráadásul hatékonyan is számítható [1]. Kezünkben van tehát egy eszköz arra, hogy olyan mátrixokat konstruáljunk, melyek kielégítenek egy adott vetületepárt, és a lehető legjobban hasonlítanak egy előre megadott mátrixhoz. Ezt az eszközt fogjuk használni az újfajta mutációs és rekombinációs operátorok megtervezéséhez.

A keresztezési operátor lépéseit egy konkrét példán a 9.4 ábrán követhetjük nyomon. Kezdetben egy üres képből indulunk ki, ezt négy (lehetőleg) megegyező méretű kvadránsra osztjuk. Ezután mind a négy kvadránsban véletlenszerűen elhelyezünk egy-egy pontot, kettőt az első szülőhöz tartozóként, kettőt pedig a másodikhoz tartozóként megjelölve. Ezek a kiindulási

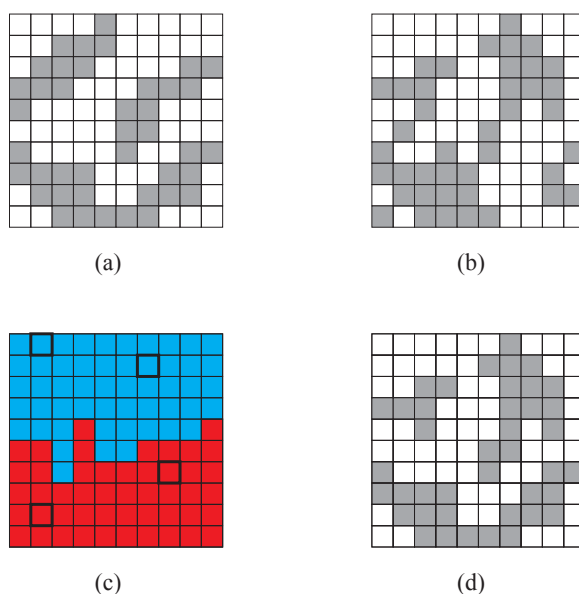


9.3. ábra. A rekonstrukciós probléma hálózati folyamként. Az  $s$ -ből kifutó élek kapacitásai rendre az  $r_1, r_2, \dots, r_m$  sorösszegekkel definiáltak, a  $t$ -be befutó élek kapacitásai pedig az  $s_1, s_2, \dots, s_n$  oszlopösszegekkel adottak. A  $v$  és  $w$  jelzésű pontok teljes páros gráfot alkotnak, melyben az élek kapacitása 1. Célunk egy maximális folyam megtalálása az  $s$ -ből  $t$ -be.

pontok alkotják kezdetben a határpontok halmazát. A határpont olyan pont, mely valamelyik szülőhöz tartozónak már meg lett jelölve, de van legalább egy olyan 4-szomszédja, mely még jelöletlen. A következő lépésben a kezdeti egy pontból álló régiók növelését hajtjuk végre. Véletlenszerűen választunk egyet a határpontok közül és annak minden jelöletlen 4-szomszédját megjelöljük a határponttal azonosra. Ezután frissítjük a határpontok halmazát (az újonnan megjelölt pontok közül azokat, melyeknek van még jelöletlen 4-szomszédjuk felvesszük a határpontok listájára, valamint töröljük a listából a most kiválasztott határpontot és azokat, melyeknek 4-szomszédjai mind jelöltté váltak). A frissítési művelet lokálisan (a kiválasztott határpont, mint középpont körüli  $7 \times 7$ -es ablakban) elvégezhető. Az eljárást egészen addig folytatjuk, amíg van határpont, azaz amíg a teljes kép jelöltté nem válik az egyik vagy másik szülő által. Így kapjuk az úgy nevezett *rekombinációs maszkot*, melyet úgy kell értelmezni, hogy a kép adott pozíciójába annak a szülőnek a megfelelő pozíciójában lévő értékét másoljuk be, mely által a pozíció jelölve van. Az eredményül kapott kép a két szülő strukturális jó tulajdonságait megőrzi (hiszen nagy összefüggő területeket másolunk át az utód képre). A vetületei azonban jelentősen eltérhetnek a megkívántaktól. Ezt korrigálendő az eredményképet még nem tekintjük a végleges utódnak, hanem úgy fogjuk fel, mint egy modellképet, melyhez minél hasonlóbbat keresünk, de olyat, mely a vetületeket is kielégíti. Azt azonban az előbb már ismertettük, hogy ez könnyen megtehető egy minimális költségű maximális folyam keresésére visszavezetve egy alkalmasan megkonstruált gráfon. Az eredményül kapott folyam által meghatározott kép már kielégíti a vetületeket is, és a szülők strukturális információjából is a lehető legtöbbet megőrzi, így ezt tekintjük a keresztezés során létrejövő utódnak.

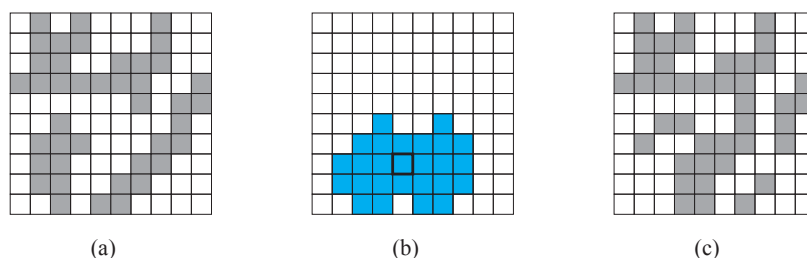
A mutációs operátor elgondolása hasonló (példaként lásd a 9.5 ábrát). Kiindulunk egy véletlenszerűen választott mezőből, melyet megjelölünk. Ezután  $k$ -szor végrehajtjuk a régió növelését (ahol  $k$  egy előre meghatározott  $[k_{min}, k_{max}]$  intervallumba eső véletlen szám), mindig egy véletlenszerűen választott határpont mentén. Az eredményül kapott régió határozza meg a





9.4. ábra. A Batenburg-féle rekombinációs operátor. (a) Az első szülő. (b) A második szülő. (c) A létrehozott keresztezési maszk. Vastaggal jelölve a véletlenszerűen választott kiindulási pozíciók, pirossal az első, kékkel a második szülőhöz tartozó pozíciók. (d) A létrejött modellkép, melynek segítségével az utód már megkonstruálható.

*mutációs maszkot.* Az utód egyedét úgy alakítjuk ki, hogy a maszkon jelöletlen pozíciók értékeit egyszerűen átmásoljuk egy (kezdetben üres) képre, a maszkon jelölt pozíciókban pedig az invertált értékeket másoljuk át. Az így kapott kép a szülővel egy nagy területen megegyezik, csupán egy kisebb területen invertáljuk a szülő értékeit. Így a szülő strukturális tulajdonságai túlnyomó részt öröklődnek, a vetületek azonban általában távolabb esnek a megkívántaktól, mint a szülőben (ahol pontosan megegyeznek az előírtakkal). Így ismét a folyamaton alapuló korrekcióhoz nyúlunk. Azaz a végső utód úgy alakul ki, hogy ezt a kapott képet modellképként felhasználva megkeressük azt a képet, mely a modellképhez leginkább hasonló és a vetületei is megfelelőek.



9.5. ábra. A Batenburg-féle mutációs operátor. (a) A kiindulási egyed. (b) A mutációs maszk. Vastaggal jelölve a véletlenszerűen választott kiindulási pozíció, kékkel az invertálandó terület. (c) A létrejött modellkép, melynek segítségével az utód már megkonstruálható.

### 9.3.3. Mutációs és rekombinációs operátorok az objektum alapú megközelítésben

Amennyiben a kép előre ismert geometriai objektumokat tartalmaz, akkor a genetikus algoritmusok esetén is választhatjuk az objektum alapú megközelítést. Vegyük ismét azt a példát, amikor a képen diszjunkt körlapok helyezkednek el, melyek egy  $\langle (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2), \dots, (x_n, y_n, r_n) \rangle$  listával reprezentálhatók, ahol  $n$  a körlapok számát jelöli,  $x_i$  és  $y_i$  az  $i$ -edik körlap középpontjának  $x$  illetve  $y$  koordinátáját,  $r_i$  pedig annak sugarát. A mutációs operátor ebben az esetben megegyezik a szimulált hűtésnél már ismertetett változtatással: egy véletlenszerűen választott körlap sugarát véletlenszerű mértékben növelhetjük vagy csökkenthetjük, vagy a középpontját véletlenszerűen elmozgathatjuk. Amennyiben a körlapok száma előre nem rögzített, úgy mutációként szóba jöhet továbbá egy körlap listából való törlése vagy egy új körlap paramétereinek hozzáfűzése az aktuális listához. A keresztezés során két szülő adott kezdetben, melyeket a  $\langle (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2), \dots, (x_n, y_n, r_n) \rangle$  és  $\langle (x'_1, y'_1, r'_1), (x'_2, y'_2, r'_2), \dots, (x'_m, y'_m, r'_m) \rangle$  listák reprezentálnak. A két lista nem feltétlenül azonos hosszúságú, ha a körlapok száma nem rögzített az eljárás során. A keresztezéshez ki kell választanunk véletlenszerűen egy  $k$  pozíciót az első és egy  $l$  pozíciót a második listából. Ezen pozíciók mentén „szétvágjuk” a két listát, majd a szétvágott részeket összeillesztjük, így két listát kapunk, az egyik

$$\langle (x_1, y_1, r_1), (x_2, y_2, r_2), \dots, (x_k, y_k, r_k), (x'_{l+1}, y'_{l+1}, r'_{l+1}), \dots, (x'_m, y'_m, r'_m) \rangle,$$

a másik pedig

$$\langle (x'_1, y'_1, r'_1), (x'_2, y'_2, r'_2), \dots, (x'_l, y'_l, r'_l), (x_{k+1}, y_{k+1}, r_{k+1}), \dots, (x_n, y_n, r_n) \rangle.$$

Ha olyan utód keletkezne, amelyben a körlapok nem diszjunktak, akkor azt életképtelennek nyilvánítjuk és a következő generációban már nem szerepeltetjük. Az objektum alapú megközelítés előnyei és hátrányai ugyanazok, mint a szimulált hűtés esetében.

# 10. fejezet

## Emissziós diszkrét tomográfia

### 10.1. Az emissziós diszkrét tomográfia alapjai

Ahogy azt már a korábbiakban többször is említettük, emissziós tomográfia esetén a sugárzás nem kívülről érkezik a vizsgált objektumba, hanem az objektum belsejéből indul. Amennyiben feltételezzük, hogy a tér homogén anyaggal van kitöltve, akkor a rekonstrukcióra alkalmazhatók a diszkrét (még pontosabban a bináris) tomográfia eszközei. Emlékeztetőül, egy  $I_0$  intenzitással sugárzó pont esetében a ponttól  $x$  távolságra lévő detektor által mért intenzitás a

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu x}$$

összefüggéssel fejezhető ki, ahol  $\mu \geq 0$  a homogén anyag abszorpciója. Vezessük most be a  $\beta = e^\mu$  jelölést. Értelmszerűen  $\beta \geq 1$ .

**Definíció:** Legyen adott egy  $A$   $m \times n$  méretű bináris mátrix és egy  $\beta \geq 1$  valós szám. Az  $A$  mátrix  $\beta$  abszorpciójú (baloldali) sor- és (felső) oszlopösszegeinek az  $R_\beta(A) = (r_1, \dots, r_m)$  és  $S_\beta(A) = (s_1, \dots, s_n)$  vektorokat nevezzük, ahol

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta^{-j}, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (10.1)$$

és

$$s_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \beta^{-i}, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (10.2)$$

A definícióban a „baloldali” és „felső” szavakkal a detektorok elhelyezésére utalunk. Emissziós tomográfia esetén ugyanis a detektor és a sugárforrás közötti távolság is szerepel az intenzitás meghatározásának képletében, ebből adódóan általában nem ugyanakkora intenzitást detektálhatunk az objektum jobb illetve bal, valamint felső illetve alsó oldalán. A jobboldali és alsó vetületeket a (10.1) és (10.2) képletekhez hasonlóan adhatjuk meg. Vegyük észre továbbá, hogy  $\beta = 1$  azaz  $\mu = 0$  esetén az abszorpciómentes esetet, azaz az egyszerű sor- és oszlopösszegek fogalmát kapjuk vissza. Az abszorpció rekonstrukciós problémát valamint az egyértelműség (unicitás) eldöntésének feladatát a vízszintes és függőleges vetületek esetén a következőképpen fogalmazhatjuk meg (ahogy az abszorpciómentes esetben, úgy most is feltételezzük, hogy  $\mathcal{G}$  egy előre adott mátrixosztály).

- **REKONSTRUKCIÓ**( $\mathcal{G}$ ): Legyenek adottak az  $m, n \in \mathbb{N}$  egész számok, a  $\beta \geq 1$  valós érték és az  $R \in \mathbb{R}^m$  és  $S \in \mathbb{R}^n$  vektorok. Konstruáljunk egy olyan  $A \in \mathcal{G}$   $m \times n$  méretű bináris mátrixot, melyre  $R_\beta(A) = R$  és  $S_\beta(A) = S$ .
- **UNICITÁS**( $\mathcal{G}$ ): Legyenek adottak az  $m, n \in \mathbb{N}$  egész számok, a  $\beta \geq 1$  valós érték és egy  $A \in \mathcal{G}$   $m \times n$  méretű bináris mátrix. Létezik-e olyan  $A' \neq A$   $\mathcal{G}$ -beli bináris mátrix, melyre  $R_\beta(A') = R_\beta(A)$  és  $S_\beta(A') = S_\beta(A)$ .

A fenti problémák  $\beta$  különböző értékei mellett különböző nehézségűek. A fejezet további részében először néhány egyszerű általános megállapítást teszünk, majd külön foglalkozunk egy speciális  $\beta$  érték mellett a hv-konvex diszkrét halmazok rekonstrukciójával. Végezetül érintjük azt az esetet is, amikor két szembenlévő oldali vetülete adott a vizsgált objektumnak.

## 10.2. Az általános eset

Az abszorpciós esetben néha már a sorvetületek is elegendőek ahhoz, hogy a bináris mátrixot egyértelműen rekonstruálhassuk. Tegyük fel, hogy egy  $m \times n$  méretű bináris mátrix rekonstruálása a feladatunk egy olyan  $\beta$  abszorpciós érték mellett, mely tetszőleges  $t$  és  $z$  pozitív egészek és  $1 \leq p_1 < \dots < p_t \leq n$  valamint  $1 \leq q_1 < \dots < q_z \leq n$  esetén teljesíti, hogy valahányszor  $\beta^{-p_1} + \dots + \beta^{-p_t} = \beta^{-q_1} + \dots + \beta^{-q_z}$  mindannyiszor  $t = z$  és  $p_1 = q_1, \dots, p_t = q_t$  is teljesül. Ekkor a bináris mátrix minden sora, és így maga a mátrix is egyértelműen meghatározott az  $R_\beta(A)$  vektor által. Ez a feltétel például minden  $\beta \geq 2$  és  $n \geq 1$  esetén teljesül. Így az igazán érdekesek azok az esetek, amikor  $\beta < 2$ . Ezen esetek közül is az egyik leggyakrabban vizsgált abszorpciós együttható a  $\beta^{-1} = \beta^{-2} + \beta^{-3}$  egyenletet kielégítő pozitív gyök, azaz a  $\beta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  érték (az egyenlet  $\beta_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  másik gyöke az abszorpciós együtthatóra vonatkozó  $\beta > 0$  feltételt nem teljesíti). Ebben az esetben sikerült egy polinomiális idejű algoritmust adni a horizontális és vertikális vetületeket használó rekonstrukciós feladat megoldására [9]. Emellett az egyértelműség is eldönthető polinomiális időben. Ennek az alapját egy a kapcsoló komponensekéhez hasonló, de annál technikailag lényegesen összetettebb konstrukció képezi [38, 39]. Ráadásul a kapott eredmények kézenfekvő módon általánosíthatók minden olyan  $\beta$  elnyelődési együtthatóra, amikor

$$\beta^{-1} = \beta^{-2} + \dots + \beta^{-z} \quad (10.3)$$

teljesül valamely  $z > 3$  esetén. A következő fejezetben bemutatásra kerülő eredmények is az elnyelési együtthatók (10.3) egyenlettel definiált egész családjára érvényesek.

## 10.3. A hv-konvex mátrixok rekonstruálása abszorpciós esetben

Azt már korábban, a 8. fejezetben láttuk, hogy az általános hv-konvex mátrixok rekonstruálása a transzmissziós esetben NP-nehéz. Most arra keressük a választ, hogy mit mondhatunk ugyanerről a problémáról az emissziós esetben. Az ide vonatkozó meglepő eredményeket a [37] cikk alapján ismertetjük.

### 10.3.1. A $\beta_0$ -reprezentáció

A továbbiakban is a

$$\beta^{-1} = \beta^{-2} + \beta^{-3} \quad (10.4)$$

egyenletet kielégítő pozitív gyökre, azaz a  $\beta_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  esetre szorítkozunk. A számrendszerkről megismertek alapján a (10.1) felhasználásával mondhatjuk, hogy az  $a_{i1} \dots a_{in}$  szó egy (véges)  $\beta_0$ -alapú számrendszerben vett reprezentációja az  $r_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) számnak (vagy röviden, annak  $\beta_0$ -reprezentációja). Teljesen hasonlóan kaphatjuk a (10.2) egyenletből az  $s_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) oszlopösszegek, mint számok  $a_{1j} \dots a_{mj}$   $\beta_0$ -reprezentációját. Egy további tulajdonságot is bevezetünk.

**Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy szám  $\beta_0$ -reprezentációja teljesíti az *összefüggő 1-es tulajdonságot*, ha nincs benne két 1-es értékű pozíció között sehol 0-s értékű pozíció.

Általában egy szám  $\beta_0$ -reprezentációja nem egyértelműen meghatározott. Például az 100 és a 011 szavak is a  $\beta^{-1}$  értéket reprezentálják, hiszen a (10.4) egyenlet alapján  $1 \cdot \beta^{-1} + 0 \cdot \beta^{-2} + 0 \cdot \beta^{-3} = 0 \cdot \beta^{-1} + 1 \cdot \beta^{-2} + 1 \cdot \beta^{-3}$ . Egy erősebb állítás is megfogalmazható, melyet most bizonyítás nélkül közlünk.

**10.1. Lemma.** Legyenek  $a_1 \dots a_k$  és  $b_1 \dots b_k$  ugyanannak a számnak két különböző  $k$ -számjegyű  $\beta_0$ -reprezentációi. Akkor  $b_1 \dots b_k$  megkapható  $a_1 \dots a_k$ -ból úgy, hogy azon véges számú 1D-s kapcsolást végzünk, melyek az  $a_1 \dots a_k$  reprezentációban egy három egymás mellett álló számjegy alkotta 011 sorozatot 100 sorozatra cserélnék (vagy fordítva) vagy egy  $01x_21x_41 \dots x_{2l}11$  sorozatot  $10x_20x_40 \dots x_{2l}00$  ( $l \geq 1$ ) sorozatra cserélnék (vagy fordítva), ahol a két reprezentációban az  $x_2, x_4, \dots, x_{2l}$  számjegyek megegyeznek. Az előbbi esetre  $011 \longleftrightarrow 100$  kapcsolásként, az utóbbira pedig  $01x_21x_41 \dots x_{2l}11 \longleftrightarrow 10x_20x_40 \dots x_{2l}00$  kapcsolásként hivatkozunk.

**Definíció.** Az  $r$  szám lexikografikus rendezés szerinti legnagyobb  $\beta_0$ -reprezentációját  $r$   $\beta_0$ -*expanziójának* nevezzük és  $\langle r \rangle$ -rel jelöljük.

Egy adott szám  $\beta_0$ -expanziója a számon végrehajtott maradékos osztási algoritmus segítségével igen egyszerűen meghatározható. Jelölje az  $r$  szám  $k$ -hosszú összefüggő 1-es tulajdonságú  $\beta_0$ -reprezentációinak halmazát  $r_k^{(c)}$ . Például  $r = \beta^{-1}$  esetén

$$r_5^{(c)} = \{10000, 01100\}, \text{ valamint } \langle r \rangle = 10000. \quad (10.5)$$

A következő lemma a  $\beta_0$ -reprezentációk számáról ad információt.

**10.2. Lemma.** Tetszőleges  $r$  valós számnak legfeljebb 2 darab olyan  $k$ -hosszú  $\beta_0$ -reprezentációja lehet, mely teljesíti az összefüggő 1-es tulajdonságot.

**Bizonyítás.** Tekintsünk egy tetszőleges  $r \neq 0$  számot, melynek egy  $k$  hosszú  $\beta_0$ -reprezentációja teljesíti az összefüggő 1-es tulajdonságot, azaz

$$r = 00 \dots 0011 \dots 1100 \dots 00 \quad (10.6)$$

alakú, ahol az 1-esek sorozata a  $j_1$ -edik pozíción kezdődik és a  $j_2$ -edik pozíción ér véget ( $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq k$ ). A 10.1. Lemma alapján, ha létezik egy másik  $\beta_0$ -reprezentációja  $r$ -nek, akkor az vagy  $011 \longleftrightarrow 100$  alakú, vagy  $01x_21x_41 \dots x_{2l}11 \longleftrightarrow 10x_20x_40 \dots x_{2l}00$  ( $l \geq 1$ ) alakú

kapcsolással megkapható (10.6)-ból. Könnyen ellenőrizhető, hogy két  $k$ -hosszú összefüggő 1-es tulajdonságot kielégítő  $\beta_0$ -reprezentáció esetén csak a  $011 \longleftrightarrow 100$  kapcsolás fordulhat elő, amiből már adódik, hogy  $r_k^{(c)} = \{00 \dots 010000 \dots 0, 00 \dots 001100 \dots 0\}$ . Minden más esetben a  $r_k^{(c)}$  halmaz csak egyelemű (vagy ha az adott számnak nem létezik  $\beta_0$ -reprezentációja, akkor üres).

A továbbiakban legyen  $r$  egy tetszőleges  $\beta_0$ -reprezentációval rendelkező valós szám. Ekkor az  $r_k^{(c)}$  halmaz elemeinek pozícióit a 10.2. Lemma alapján úgynevezett *variáns* és *invariáns* pozíciókra tudjuk osztani.

**Definíció.** Az  $i$ -edik pozíció ( $1 \leq i \leq k$ ) *variáns* az  $r_k^{(c)}$  osztályban, ha  $r$ -nek két különböző  $r_k^{(c)}$ -beli  $\beta_0$ -reprezentációja van, melyek az  $i$ -dik pozícióban különböznek. Az  $i$ -dik pozíció *0-invariáns* (*1-invariáns*) az  $r_k^{(c)}$  osztályban, ha az  $i$ -dik pozícióban 0 (1) áll  $r$  mindegyik  $r_k^{(c)}$ -beli  $\beta_0$ -reprezentációjában.

A (10.5) példára visszatérve az  $r_5^{(c)}$  osztályban az 1, 2, 3 pozíciók variánsak, míg a 4 és 5 pozíciók 0-invariánsak. A 10.2. Lemma alapján általában is igaz, hogy legfeljebb három invariáns pozíció lehet az  $r_k^{(c)}$  osztályban. Ha  $\langle r \rangle$ -ben pontosan egy darab 1-es van (mondjuk a  $j < k - 1$ -edik pozícióban), akkor a  $j$ -edik,  $(j+1)$ -edik és  $(j+2)$ -edik pozíciók variánsak, míg  $r_k^{(c)}$  minden más pozíciója 0-invariáns. Minden más esetben  $r_k^{(c)}$ -nek csak egy  $\beta_0$ -reprezentációja van (vagy nincs ilyen reprezentációja), így minden pozíciója 0-invariáns vagy 1-invariáns. A variáns és invariáns pozíciók polinomiális időben könnyen meghatározhatók.

### 10.3.2. A hv-konvex bináris mátrixok egyértelműsége és rekonstrukciója abszorpciós esetben

A hv-konvex bináris mátrixok egyértelműségére vonatkozó eredményének bizonyításához az 1D-s kapcsolások fogalmát kell 2D-re általánosítanunk. Tekintsük a következő mátrixokat

$$E^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{valamint} \quad E^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

melyeket 2D-s *elemi kapcsolásoknak* nevezünk. Abszorpciós esetben ezek a mátrixok képezik az alapját az általános (nem feltétlenül hv-konvex) mátrixok egyértelműségi eredményének is, mi azonban most csak a szűkebb mátrixosztályra fogalmazzuk meg az állítást.  $E_{(i,j)}^{(0)}$ -vel és  $E_{(i,j)}^{(1)}$ -vel fogjuk jelölni, ha a megfelelő 2D-s elemi kapcsolat egy mátrixban úgy fordul elő, hogy a  $3 \times 3$ -mas kapcsolási mátrix bal felső pozíciója az  $(i, j)$  pozícióval esik egybe.

**Tétel.** Egy hv-konvex bináris mátrix az adott mátrixosztályban akkor és csak akkor nem egyértelműen meghatározott az abszorpciós sor- és oszlopösszegei által, ha tartalmazza valamely  $(i, j) \in \{1, \dots, m-2\} \times \{1, \dots, n-2\}$  pozícióban az  $E_{(i,j)}^{(0)}$  vagy az  $E_{(i,j)}^{(1)}$  elemi kapcsolást úgy, hogy a mátrix minden más eleme az  $i, i+1, i+2$  sorokban és a  $j, j+1, j+2$  oszlopokban azonosan 0.

**Bizonyítás.** A bizonyítás szükséges része egyszerű. Ha egy hv-konvex  $A$  mátrix tartalmazza mondjuk az  $E_{(i,j)}^{(0)}$  elemi kapcsolást, akkor azt az  $E_{(i,j)}^{(1)}$  elemi kapcsolásra kicserélve egy új  $A' \neq A$  hv-konvex mátrixot kapunk, melynek vetületei  $A$ -val megegyezőek. A hv-konvexitás az  $i, i+1, i+2$  sorok és a  $j, j+1, j+2$  oszlopok azonosan 0 elemei miatt biztosan érvényben marad.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy  $A \neq A'$  két hv-konvex mátrix ugyanazokkal az abszorpciós sor- és oszlopösszegekkel. Tegyük fel továbbá, hogy  $(i, j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m$ ) a legfelső sor legbaloldalibb olyan eleme, melyben már  $A$  és  $A'$  különböznek. Az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy  $a_{ij} = 0$  és  $a'_{ij} = 1$ . Akkor a 10.2. Lemmának köszönhetően  $a_{ij}$  és  $a'_{ij}$  az első pozíciói a  $01x_21x_41 \cdots x_{2l}11$  és  $10x_20x_40 \cdots x_{2l}00$  ( $l \geq 0$ ) különbözőségi sorozatoknak az adott sorban. A hv-konvexitás miatt azonban csak  $l = 0$  állhat fenn, így adódik, hogy  $a_{ij}a_{i,j+1}a_{i,j+2} = 011$  és  $a'_{ij}a'_{i,j+1}a'_{i,j+2} = 100$ . Ezek után az oszlopokra alkalmazva ugyanezt az ötletet kapjuk, hogy

$$a_{i+1,j}a_{i+1,j+1}a_{i+1,j+2} = 100 \quad \text{és} \quad a'_{i+1,j}a'_{i+1,j+1}a'_{i+1,j+2} = 011,$$

valamint

$$a_{i+2,j}a_{i+2,j+1}a_{i+2,j+2} = 100 \quad \text{és} \quad a'_{i+2,j}a'_{i+2,j+1}a'_{i+2,j+2} = 011.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az  $(i, j)$  pozícióban  $A$ -ban szerepel az  $E_{(i,j)}^{(0)}$  elemi kapcsolás, míg az  $A'$ -ben az  $E_{(i,j)}^{(1)}$  elemi kapcsolás. A hv-konvexitás miatt  $A$  és  $A'$  adott soraiban biztos, hogy további 1-esek már nem szerepelnek.

Ez alapján az egyértelműségi eredmény alapján most már meg tudunk adni egy egyszerű rekonstrukciós algoritmust is, mely egy  $m \times n$  méretű  $X$  mátrixot használ a variáns és invariáns pozíciók (és így lényegében az összes megoldás) reprezentálására.

1. Töltsük fel az  $X$  mátrixot szabad értékekkel.
2. Írjuk be  $X$  soraiba az invariáns 0-kat és 1-eseket a 10.2. Lemma alapján.
3. Írjuk be  $X$  oszlopaiba az invariáns 0-kat és 1-eseket a 10.2. Lemma alapján. Ha egy pozíció ellentétes értékeket kapna a 2. és 3. lépésben, akkor NINCS MEGOLDÁS és leállunk.
4. Az előző lépés után már csak legfeljebb 3 szabad pozíció maradt mindegyik sorban és oszlopban. Ha ezek a szabad pozíciók egy  $3 \times 3$ -mas almátrixot alkotnak, akkor invariáns pozíciók. Ellenkező esetben a pozíciók értékei meghatározhatók a  $3 \times 3$ -mas környezetükben található 0-kból és 1-esekből.

Az algoritmus minden lépése, így maga a teljes algoritmus is  $O(mn)$  időben végrehajtható, azaz az a meglepő eredményt adódik, hogy míg abszorpciómentes esetben a hv-konvex mátrixok rekonstrukciója NP-teljes, addig abszorpció esetén (legalábbis a vizsgált  $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  értékre) a feladat már polinomiális időben megoldható.

Végezetül bemutatjuk egy példán az eljárás működését. Legyenek adva az  $R = (r_1, \dots, r_9)$  és az  $S = (s_1, \dots, s_{10})$  vektorok, ahol

$$\langle r_1 \rangle = \langle r_2 \rangle = 0000001000,$$

$$\begin{aligned}\langle r_3 \rangle &= 0000000100, \\ \langle r_4 \rangle = \langle r_5 \rangle = \langle r_6 \rangle &= 0001000000, \\ \langle r_7 \rangle = \langle r_8 \rangle = \langle r_9 \rangle &= 1000000000,\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle = \langle s_3 \rangle &= 000000100, \\ \langle s_4 \rangle = \langle s_5 \rangle = \langle s_6 \rangle &= 000100000, \\ \langle s_7 \rangle &= 100000000, \\ \langle s_8 \rangle &= 011000000, \\ \langle s_9 \rangle &= 010000000, \\ \langle s_{10} \rangle &= 000000000.\end{aligned}$$

Az algoritmus 2. és 3. lépése után állapotot sorra az alábbi két mátrix írja le (a szabad pozíciókat pont jelzi).

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

A 4. lépés után pedig az alábbi mátrixhoz jutunk

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

melyben a szabad pozíciók a variáns pozícióknak felelnek meg, ahova tetszőlegesen, egymástól függetlenül írhatjuk be az  $E^{(0)}$  és  $E^{(1)}$  elemi kapcsolásokat. Ebből kapjuk, hogy az adott feladatnak 4 különböző megoldása lehetséges.

## 10.4. Rekonstrukció szemközti oldali vetületekből

Az abszorpciómentes esetben nincs értelme azzal foglalkozni, hogy a vetületeket jobboldalon vagy baloldalon mérjük. Az emissziós diszkrét tomográfia esetében azonban új eredményeket



kaphatunk, ha feltételezzük, hogy a rekonstrukció során nem egy függőleges és egy vízszintes vetület adott, hanem mondjuk a két szembenlévő oldali vízszintes vetület. A [10] cikkben bizonyítás nyert, hogy az előzőekben bemutatott eredmények kiterjeszthetők erre az esetre is. Végezetül ismertetjük a [40] cikk egy idevonatkozó érdekes eredményét is. Tegyük fel, hogy az abszorpciós együttható a  $\gamma^4 - \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma + 1 = 0$  egyenlet egyetlen olyan valós gyöke, melyre  $0 < \gamma < 1$  teljesül, azaz

$$\gamma = \frac{1}{4} \left( \sqrt{13} + 1 - \sqrt{2\sqrt{13} - 2} \right).$$

Tekintsük most az  $r_1 = \langle 1000110001 \rangle$  és az  $r_2 = \langle 0111001110 \rangle$  vektorokat. Ekkor a baloldali vetület értéke  $R_\gamma^l(r_1) = \gamma + \gamma^5 + \gamma^6 + \gamma^{10} = (\gamma + \gamma^6)(1 + \gamma^4) = (\gamma + \gamma^6)(\gamma + \gamma^2 + \gamma^3) = \gamma^2 + \gamma^3 + \gamma^4 + \gamma^7 + \gamma^8 + \gamma^9$ , ami pontosan az  $R_\gamma^l(r_2)$  baloldali vetülettel egyezik meg. Mivel  $r_1$  és  $r_2$  szimmetrikusak, így a jobboldali vetületek egyenlősége is adódik, azaz ebben az esetben, a két különböző vektort is meg tudunk adni ugyanazokkal a jobb és baloldali vetületekkel, tehát nem áll fenn egyértelműség. Az abszorpciós eset általános tárgyalásánál (10.2 alfejezet) már láttuk, hogy bizonyos esetekben egy vetület is elég az egyértelműséghez. A  $\gamma$  értékkel adott abszorpció esetében azonban még két szemközti oldali detektor segítségével sem mindig garantálható az egyértelműség. Érdekes kérdés, hogy milyen előzetes (geometriai) információval lenne ez biztosítható. Erre a válasz jelenleg nem ismert. Mint ahogy arra sem, hogy pontosan melyek azok az elnyelési együtthatók, amelyek esetében fennáll a szemközti vetületek által meghatározott egyértelműség. Úgy tűnik, hogy ezen kérdések megválaszolása a terület mélyebb elemzését igényli.

# 11. fejezet

## A diszkrét tomográfia alkalmazásai

A diszkrét tomográfia számos alkalmazása ismert, ezekről jó áttekintést nyújtanak a [28] és [29] könyvek. A módszerrel a legjelentősebb eredményeket természetesen azokon a területeken lehet elérni, ahol a vizsgált objektumról megalkotható vetületek száma rendkívül korlátozott, így a hagyományos folytonos képrekonstrukciós eljárások alkalmatlanok megfelelő minőségű keresztmetszeti képek előállítására. Nyilvánvalóan a megszorítás, hogy a rekonstruálandó keresztmetszeti kép csak kevés (esetenként csak kettő) és előre ismert szürkeárnyalatot tartalmazhat, megszabja a módszer alkalmazásának kereteit is. Ebben a fejezetben a diszkrét tomográfia három sikeres, különböző tudományterületről származó alkalmazását mutatjuk be, ezzel is érzékeltetve a diszkrét képrekonstrukció általános hatékonyságát.

### 11.1. Angiográfia

A *digitális szubsztrakciós (kivonásos) angiográfia* (DSA, Digital Substraction Angiography) egy orvosi képalkotási eljárás, melynek segítségével a szív kamrái és a vérerek (ritkábban a légutak vagy a bélcsatorna) szerkezete vizsgálható jelentősebb fizikai behatás nélkül. A fő cél a különböző kóros szűkületek, elzáródások felfedezése, lokalizálása. Az eljárás során nagy elnyelési együtthatójú kontrasztanyagot juttatnak a vizsgálandó testrészebe. Ez történhet az anyag befecskendezésével, belélegzésével, vagy akár annak lenyelésével is. Ezután Röntgen-felvételt készítenek a betegről, melyen a felhalmozódott kontrasztanyag jól kirajzolódik, szemben azokkal a területekkel ahová – például elzáródás miatt – nem jut el a kontrasztanyag. A vizsgált személyről még a kontrasztanyag bejuttatása előtt ugyanabból a pozícióból készítenek egy másik felvételt is. Ha a kontrasztanyag bevitele után készített képből digitális módon kivonják a kontrasztanyagmentes képet, azaz minden képpontban veszik a szürkeintenzitások különbségét, akkor egy olyan képhez jutnak, mely lényegében csak a kontrasztanyag jelenlétét vagy hiányát mutatja a megfelelő képpontokban. Maga a tomográfia ott kap szerepet, hogy a páciensről nem egy hanem általában két merőleges irányból készítik el a Röntgen-felvételeket, ami két vetületnek felel meg. E két képről az információ a megfelelő algoritmus segítségével már összekombinálható úgy, hogy teljes keresztmetszeti képet kapjunk. A keresztmetszeti képek egyes egymás után illesztése pedig kiadja a 3D-s struktúrát is, aminek a segítségével a vizsgált szervről sokkal több információ nyerhető, mint egy vetület esetén. Az eljárás bináris jellegét az adja, hogy a kivonás miatt a rekonstruálandó képen némi

hibától eltekintve csak a kontrasztanyagnak megfelelő intenzitású pontok lesznek jelen. Teljesül a diszkrét tomográfia alkalmazhatóságának másik feltétele is, ugyanis a kontrasztanyag elnyelési együtthatója (megközelítőleg) előre ismert. Ugyanakkor sok vetület készítésére nincs lehetőség, ha a gyorsabb folyamatokat (például a szívverést) is le akarjuk képezni. Másrésről a páciens által elszenvedett sugárdózis mennyiségét is célszerű minél alacsonyabban tartani, ami szintén csökkenti a elkészíthető vetületek számát.

Nyilvánvaló, hogy ilyen kevés vetület esetén számos különböző megoldása lehet az adott rekonstrukciós feladatnak. Természetesen az orvosi alkalmazás megköveteli azt, hogy a rekonstruált kép elenyészően kis hibával meg tudja közelíteni a valós szituációt. A bizonytalanság csökkentésére azonban itt kiváló a priori információ áll rendelkezésre, mégpedig az, hogy a rekonstruálandó objektum térben (vagy amennyiben ugyanannak a szeletnek az időbeli változását vizsgálják, akkor időben) egymásután következő szeletei anatómiai okokból kifolyólag hasonlítanak egymásra. A rekonstrukciót optimalizálási problémaként felírva, a cél a

$$C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x'_{ij}$$

érték minimalizálása a  $\{0,1\}^{mn}$  halmaz felett, ahol a jobboldal első tagja szokásos módon a vetületektől vett eltérést méri, a szomszédos szeletek hasonlóságát pedig a  $C$  úgynevezett *távolságmátrix* segítségével tudjuk kifejezni, melyet úgy célszerű megadni, hogy az minél kisebb értéket vegyen fel ott, ahol az előző keresztmetszeti képen 1-es szerepelt. Amennyiben az előző szelet például az

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixszal volt megadva, akkor a távolságmátrix lehet például a

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 4 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 2 & 2 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 4 & 5 & 8 \\ 9 & 9 & 7 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix. A mátrix nem feltétlenül rendel azonos súlyt minden képponthez, ebben az esetben például előnyben részesítjük azt, hogy a kép belsejéhez közelebb eső képpontok legyenek inkább 1-es értékűek a következő keresztmetszeti képen is, ami szintén egy praktikus megfontolás, hiszen a vérerek is várhatóan az érfaltól kezdenek szűkülni.

A bináris tomográfia angiográfiában való alkalmazhatóságának lehetőségét a [18] és a [42] cikkek tárgyalják részletesebben.

## 11.2. Elektrontomográfia

### 11.2.1. Nanostrukturák meghatározása

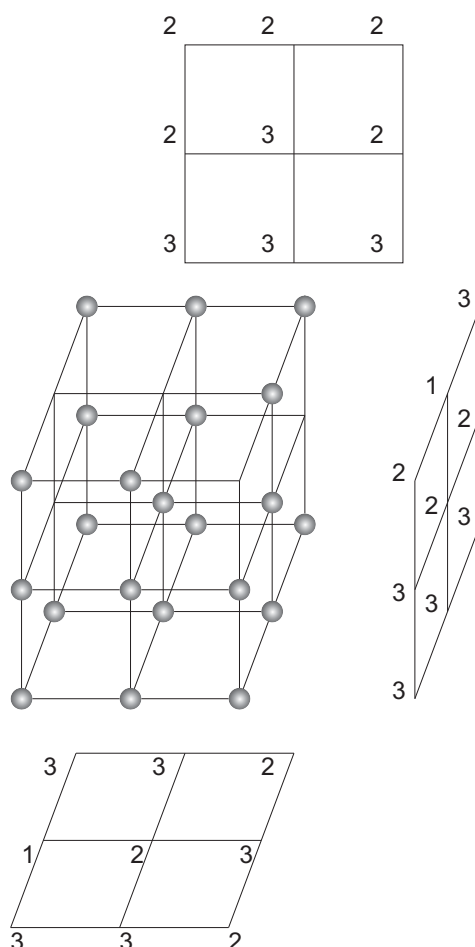
A diszkrét tomográfia alkalmazásának lehetőségeit az anyagvizsgálat területén már a 90-es évek elején felvetették, amikor kidolgozták az a technikát, melynek segítségével mennyiségi információt lehetett kinyerni a transzmissziós elektronmikroszkóp által készített felvételekből. Az eljárást az angol elnevezésének rövidítése alapján QUANTITEM-nek nevezték el [34, 45]. A technika azon az ötleten nyugszik, hogy amennyiben lehetőség van egy kristály atomrácsán átmenő bizonyos egyenesek mentén megszámolni az egyenesen elhelyezkedő atomok számát, akkor megfelelő számú irányból véve ezt az információt a teljes kristályrács szerkezete meghatározható. Ekkortájt a rendelkezésre álló fizikai eszközök még nem voltak alkalmasak az atomi szintű felbontás eléréséhez. A nagyfelbontású transzmissziós elektronmikroszkópok megjelenése óta azonban az elektrontomográfia a diszkrét tomográfia napjaink egyik legdinamikusabban fejlődő és legígéretesebb alkalmazási területe lett [13, 31, 46].

Az elektrontomográfias képalkotás segítségével különböző nanorészecskék alakja és belső szerkezetének atomi szintű vizsgálata válik lehetővé. A probléma diszkrét (legtöbbször) bináris jellege könnyen megérthető. A kristályrács általában csak egyetlen (vagy néhány) típusú atomot tartalmaz, és így egy adott rácspozícióban vagy megtalálható az az atom vagy sem. Az eljárás kitűnően alkalmas felületi vagy belső kristályhibák felderítésére. Segítségével meghatározható, hogy esetleg hiányzik-e atom a rács felületén vagy valahol a belső részen, valamint az is (amennyiben nem csak két intenzitásértékkel dolgozunk), hogy található-e a kristályban helyettesítő (a rácsot alkotó atomoktól eltérő) atom. Természetesen, ha a kristályrácsban több előre ismert típusú atom található, akkor a bináris modell nem megfelelő, de a probléma még mindig kezelhető a diszkrét tomográfia eszközeivel. A kristályok atomi szintű szerkezetéről gyűjtött információk az anyagtudósok számára felbecsülhetetlen értékkel bírnak. Segítségükkel megérthetők bizonyos fizikai folyamatok, de vizsgálható az is, hogy egy adott VLSI lapon megfelelően szabályos-e a szilikon és a szilikon-dioxid határfelület, azaz az adott nyomtatott áramkör teljesíti-e a minőségi elvárásokat.

A vetületeket ezekben a vizsgálatokban alapvetően kétféle módon képezhetik. Az elektronmikroszkópba behelyezett anyagot kis szöggel (1-2 fokonként) megdöntve nyerhetünk újabb és újabb vetületeket. Általában azonban ez a döntési szög erősen korlátozott, ami azt eredményezi, hogy csak kevés számú vetület lesz. Egy másik módszer az, hogy a rácsirányokkal párhuzamosan képezik a vetületeket, itt viszont a rendelkezésre álló rácsirányok száma szab erős korlátot a vetületek kinyerésére. A probléma ideális a diszkrét tomográfia szempontjából: a rendelkezésre álló vetületek száma kevés, azonban a feladat bináris jellege megkönnyíti a rekonstrukciót.

Végezetül kiemelünk egy eltérést is az eddigiekben bemutatottakhoz képest. Míg a korábbi esetekben a 3D-s képet kétdimenziós szeletek sorozataként állítottuk elő, addig itt a rácsirányokra támaszkodó vetületképzés esetén közvetlenül adódik egy direkt 3D-s rekonstrukciós módszer (a vetületeink sem 1-dimenziósak, hanem lényegében 2D-s képek). Erre a modellre mutatunk egy példát a 11.1 ábrán. Szerencsés módon a 9. fejezetben bemutatott optimalizáláson alapuló diszkrét rekonstrukciós technikákat könnyen általánosíthatjuk 3D-s közvetlen

rekonstrukcióra, de a korábban már említett DART algoritmust is alkalmazhatjuk ezen feladatok megoldására [12].



11.1. ábra. Egy 3D-s kristályrács néhány hiányzó atommal és annak a rácsirányokkal párhuzamos három 2D-s vetülete.

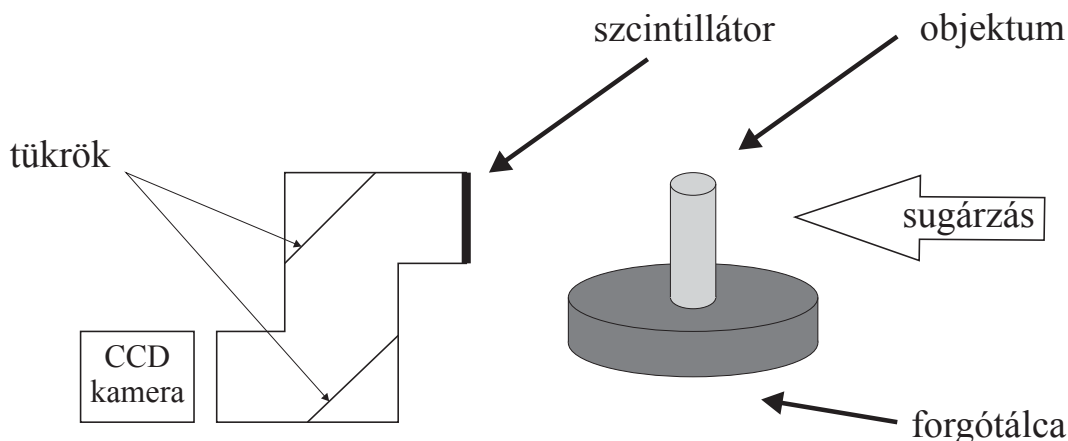
### 11.2.2. Makromolekulák vizsgálata

Az elektrontomográfia egy másik alkalmazása a biológiából származik. A biológiai makromolekulákról transzmissziós elektrontomográffal szintén készíthetők vetületek. Az elérhető vetületek száma itt nem csak azért korlátozott, mert a felvételek készítése során a döntési szöveget csak bizonyos határok között lehet változtatni. Egy másik fontos akadály az, hogy a makromolekulán áthaladó elektronnyaláb roncsolja magát az anyagot, így néhány felvétel (vetület) elkészítése után az anyag szerkezete megváltozik. Ekkor további vetületek a kezdeti objektumról már nem vehetők. A makromolekulák általában jégből, proteinekből és RNS-ből állnak, így a rekonstrukciós probléma ugyan nem bináris, de a rekonstruálandó kép értékészlete elegendően megszorított ahhoz, hogy diszkrét tomográfiával jó eredményeket lehessen elérni [17].

## 11.3. Nemroncsoló anyagvizsgálat

### 11.3.1. A nemroncsoló anyagvizsgálat berendezése és elve

Számos ipari alkalmazásnál felmerül az igény, hogy egy objektum belsejét nemroncsoló módon vizsgálni lehessen, ezt az eljárást hívják *nemroncsoló tesztelésnek* (NDT, Nondestructive Testing). Ha a vizsgált tárgy valamilyen homogén anyagból készült fémöntvény, akkor az NDT segítségével felderíthetők például az öntvény belsejében a gyártás során keletkezett légbuborékok, repedések. Ugyanezzel a módszerrel sikeresen kimutathatók nagyobb ipari tárgyak (például motorblokkok, turbinalapátok) kopásai, károsodásai. Egy újabb alkalmazás lehet fémcsövek belső lerakódásainak, korróziójának, hajszálrepedéseinek felderítése. Az esetek döntő többségében a vizsgált anyagok homogének, vagy csak nagyon kevés számú különböző anyagból tevődnek össze. Mivel általában az is ismert, hogy az objektum milyen anyag(ok)ból készült, így a diszkrét tomográfia alkalmazhatóságának azon feltétele is teljesül, hogy az elnyelési együtthatók értékei előre ismertek kell legyenek. A nemroncsoló tesztelés kiváló alkalmazási területe a diszkrét tomográfiának. Ahhoz azonban, hogy ezekről az ipari alkatrészekről a rekonstrukcióhoz használható vetületeket lehessen gyűjteni számos problémát kell leküzdeni. A továbbiakban ezek a problémák és megoldásaik kerülnek tárgyalásra.



11.2. ábra. A nemroncsoló teszteléshez használt berendezés elve.

A vizsgálatokhoz használt berendezés elve a 11.2 ábrán követhető nyomon. A nemroncsoló vizsgálat során az objektumot egy forgótálcára helyezzük. A tálca egy számítógép által vezérelhető léptetőmotorral van összekapcsolva, melynek segítségével elérhető, hogy a vetületi sugarak a megfelelő irányból haladjanak át az objektumon. Itt egy a klinikai CT-kkel kapcsolatos fontos különbséget azonnal ki is emelünk, melynek még a továbbiakban jelentősége lesz. Nevezetesen azt a tényt, hogy itt a vizsgálandó objektumot forgatjuk, szemben az orvosi alkalmazásokkal, ahol a páciens fix pozícióban van és körülötte forog a vetületképző berendezés. Mivel a vizsgált objektumok legtöbbször fémből vagy egyéb nagy elnyelési együtthatójú anyagokból állnak, így a tesztelés során a Röntgen-sugárzás helyett gyakran neutron-sugárzást használunk, melynek energiája lényegesen nagyobb, így át tud hatolni olyan elnyelési együtthatójú anyagokon is, melyeken a Röntgen-sugárzás már nem. Az objektum másik oldalán egy szcintillátor segítségével az áthatolt sugárzást látható fényvé alakítjuk,

melyet egy CCD kamera segítségével rögzítünk számítógépen. Mivel a kamera a közvetlen sugárzástól sérülhet, ezért egy tükörrendszer segítségével juttatjuk a fényt a kamerába. Az objektumról lényegében tetszőlegesen sok irányból vehetnénk vetületeket, azonban ezen vetületek kinyerése (főként a neutrontomográfias esetben) rendkívül költséges és időigényes, így a vetületek számát általában igyekszünk minél inkább redukálni. Még ha az előbbieket nem is szabnának korlátot a vetületképzésre vonatkozóan, előfordulhat, hogy a vizsgált objektum nagy méretű, és csak egy része fér be a képalkotó berendezésbe, illetve csak adott határok közötti szöggel lehet elforgatni azt a berendezésben. Egy hasonló érdekes eset előfordulhat akkor is, ha az objektum bizonyos irányból oly mértékben elnyúlt, hogy az azzal az iránnyal párhuzamosan érkező sugárzás teljesen elnyelődik az objektumban, így nem jutunk vetületi képhez (bizonyos szögekből). Ezek mind-mind újabb érvek a kevés vetületet használó diszkrét tomográfia mellett. Magát a rekonstrukciós problémát általában (objektum- vagy pixel-alapú) optimalizálással szokás megoldani, azaz a

$$C(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \gamma \cdot \Phi(\mathbf{x})$$

függvényt minimalizáljuk a lehetséges bináris (vagy előre adott diszkrét értékű) megoldások halmazán. A  $\Phi(\mathbf{x})$  függvény gyakran a simaság mellett egy  $\mathbf{x}_{\text{mod}}$  modellképhez való hasonlóságot is mér egyben. Ipari alkalmazásoknál ugyanis nem ritka, hogy rendelkezésünkre áll egy hibátlan, ideális (más néven „blueprint”) objektum vagy annak a modellje és a célunk csak annak megállapítása, hogy a vizsgált objektum mennyire tér el ettől a blueprintről. Ha a hiba egy adott küszöb alatt marad, akkor az alkatrészt használhatónak minősíthetjük, ellenkező esetben selejtesnek. A diszkrét tomográfia NDT-ben való alkalmazásáról az olvasó egy jó összefoglalást kaphat a [14] könyvfejezetből.

### 11.3.2. A vetületi képek torzulása és korrekciója

Általában a nemroncsoló tesztelés során keletkező vetületi képek rendkívül zajosak és sok képalkotási artifaktumtól szenvednek. Ezek egy részéről és a lehetséges megoldásairól már volt szó a 4. fejezetben, itt most olyan további problémákat ismertetünk, melyek az NDT-re legjellemzőbbek.

- Vágás: A vetületi képek általában csak kis területen tartalmazzak a vizsgált objektumról információt (a kép jelentős része a háttér). Érdemes kivágni a vetületi képből azt a részt, mely számunkra valóban fontos és a továbbiakban ezt tekinteni vetületi képnek. Az így keletkezett kisebb méretű képekből a rekonstrukciót kisebb memóriaigénnyel és gyorsabban elvégezhetjük.
- Mozgáskorrekció: A képalkotó rendszer fizikai és szoftveres beállításainak legapróbb hibái is halmozottan jelentkezhetnek a vetületi képeken. Általában a különböző irányokból vett vetületi képek között eltolásbeli és forgatásbeli apróbb eltérések lehetnek. Például, ha az objektumot tartó tálca nem pontosan vízszintes helyzetben áll, akkor a tálca forgatásával az objektum kismértékben jobbra vagy balra dől az előző pozíciójához képest. A vetületi képek egymáshoz igazítása (úgynevezett regisztrációja) rendkívül összetett, sokszor nagyon nehéz feladat, melynek tárgyalása bőven a jegyzet keretein kívül esik. A terület iránt érdeklődő olvasónak a [15] bevezető irodalmat ajánljuk.

- Homogenitáskorrekció: Néha a detektorsík nem egyenletesen érzékeny a teljes felületén, így a vetületi képen világosabb vagy sötétebb átlagos intenzitású foltok jelenhetnek meg. Ezt a hatás könnyen javíthatjuk, ha rendelkezésünkre áll egy üres kép, azaz egy olyan vetületi kép, amit úgy készítünk, hogy semmilyen tárgyat nem helyezünk a berendezésbe. Ha a detektorok közel egyező érzékenységek, akkor ez a kép megközelítőleg konstans intenzitásértékkel bír. Ha nem ez a helyzet, akkor az üres képből egy egyszerű számítással megkapjuk, hogy a vetületi kép mely területein és mekkora faktoriall kell szorozni ahhoz, hogy a homogenitást helyreállíthassuk.
- Intenzitáskorrekció: Az NDT-ben a keletkezett vetületi képek nem ugyanolyan összingentitásúak (azaz a különböző irányból vett vetületek nem konzisztensek). Ennek oka lehet az, hogy a sugárzás a vetületek képzése során nem egyenletes, illetve a CCD kamera érzékenysége is némileg változhat időben. Az intenzitások korrigálására jó módszer, ha minden vetületi képen a szürkeintenzitásokat egy alkalmasan választott értékkel beszorozzuk úgy, hogy az eredményül kapott képek háttérpontjainak összingentitása már megközelítőleg megegyezzen. Ezt a folyamatot két lépésben végezhetjük el: először minden képen kiszámítjuk a háttér egy adott részére a korrekciós faktort, majd a korrekciós faktorokat összevetve minden képen egyenként (most már nem csak a háttérpontokon) elvégezzük a korrekciót.
- Izolált pontok kiszűrése: A képkalkotó berendezés hibái sokszor okoznak pontszerű zajhatást a vetületi képeken (például kiégett kameraelemek esetén). Ezeket az izolált pontokat könnyen felismerhetjük, hiszen a szomszédos pixelektől jelentősen eltérő intenzitásúak. Egy egyszerű küszöbölt mediánszűréssel ezeket a pontokat beállíthatjuk megközelítően helyes intenzitásértékre. Először minden  $P$  pixelre kiszámítjuk a (megválasztott szomszédosági környezettel definiált) szomszédjain vett intenzitások  $P_{med}$  mediánértékét, majd megvizsgáljuk, hogy  $P$  intenzitásának és a  $P_{med}$  értéknek a különbsége egy adott  $t$  küszöb alá esik-e. Ha igen, az azt jelenti, hogy a  $P$  pixel a szomszédjaival közel azonos intenzitású, így nem minősítjük hibás pontnak. Ellenkező esetben a  $P$  intenzitásértékét zajnak minősítjük és lecseréljük a  $P_{med}$  értékre.

### 11.3.3. Ismeretlen elnyelődési együtthatók kezelése

Végezetül egy olyan problémát vázolunk fel, mely először szintén a nemroncsoló tesztelési feladatok során képezte vizsgálatok tárgyát, de a diszkrét képrekonstrukció számos más gyakorlati alkalmazásnál is szembesülhetünk vele. A diszkrét tomográfia egyik alapfeltételezése az, hogy az elnyelési együtthatók előre ismertek. Sajnos ez a legtöbb gyakorlati alkalmazásnál nem teljesül, még akkor sem, ha tudjuk, hogy a vizsgált objektum milyen anyago(ka)t tartalmaz. Az elnyelési együtthatót ugyanis monokromatikus sugárzás esetére lehet megadni, a Röntgen-sugárzás pedig nem monokromatikus (lásd a 4. fejezet nyalábkeményedésre vonatkozó részét is). Egy viszonylag egyszerű megoldás lehet az, hogy első lépésben egy olyan képet rekonstruálunk, ami az elvártnál nagyságrendekkel több intenzitási értéket tartalmazhat (szélsőséges esetben akár a szűrt visszavetítéssel vagy algebrai módszerrel kapott folytonos rekonstrukció eredményét is felhasználhatjuk). Ezek után a kapott kép hisztogramjának lokális maximumait (az első annyit, ahány anyagból áll az objektum) tekintjük a valós elnyelési



együtthathóknak és ezekkel hajtunk végre egy újabb diszkrét rekonstrukciót. Az eljárás sok esetben ad jó megoldást, ennek ellenére sajnos nem ismert olyan általános módszer, mellyel az elnyelési együtthathók minden esetben pontosan meghatározhatók lennének. A problémakör ma is a diszkrét tomográfia egyik nagy kihívást jelentő kutatási területe.



# Irodalomjegyzék

- [1] Ahuja, R.K., Magnanti, T.L., Orlin, J.B.: Network flows: Theory, Algorithms and Applications. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- [2] B. Aspvall, M.F. Plass, R.E. Tarjan, A linear time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas, *Inform. Process. Lett.* **8 (3)** (1979) 121–123.
- [3] Bäck, Th., Fogel, D.B., Michalewicz, T. (eds.): Evolutionary Computation 1. Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 2000.
- [4] P. Balázs, Binary tomography using geometrical priors: Uniqueness and reconstruction results, PhD dissertation at the University of Szeged, Hungary (2007).
- [5] P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, Reconstruction of 8-connected but not 4-connected  $h\nu$ -convex discrete sets, *Disc. Appl. Math.* **147** (2005) 149–168.
- [6] E. Balogh, A. Kuba, Cs. Dévényi, A. Del Lungo, Comparison of algorithms for reconstructing  $h\nu$ -convex discrete sets, *Lin. Alg. Appl.* **339** (2001) 23–35.
- [7] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections, *Theor. Comput. Sci.* **155** (1996) 321–347.
- [8] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, Medians of polyominoes: A property for the reconstruction, *Int. J. Imaging Systems and Techn.* **9** (1998) 69–77.
- [9] E. Barcucci, A. Frosini, A. Kuba, A. Nagy, S. Rinaldi, M. Samal, S. Zopf, Emission Discrete Tomography, In [29], pp. 333–366, 2007.
- [10] E. Barcucci, A. Frosini, S. Rinaldi, An algorithm for the reconstruction of discrete sets from two projections in presence of absorption, *Discrete Appl. Math.* **151** (2005) 21–35.
- [11] K.J. Batenburg, An evolutionary algorithm for discrete tomography, *Discrete Appl. Math.* **151** (2005) 36–54.
- [12] K.J. Batenburg, J. Sijbers, DART: A fast heuristic algebraic reconstruction algorithm for discrete tomography, *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), San Antonio, Texas, USA* **4** (2007) 133–136.
- [13] K.J. Batenburg, S. Bals, J. Sijbers, C. Kuebel, P.A. Midgley, J.C. Hernandez, U. Kaiser, E.R. Encina, E.A. Coronado, G. Van Tendeloo, 3D imaging of nanomaterials by discrete tomography, *Ultramicroscopy* **109(6)** (2009) 730–740.

- [14] J. Baumann, Z. Kiss, S. Krimmel, A. Kuba, A. Nagy, L. Rodek, B. Schillinger, J. Stephan, Discrete Tomography Methods for Nondestructive Testing, In [29], pp. 303–332, 2007.
- [15] L.G. Brown, A survey of image registration techniques, *ACM Computing Surveys* **24** (1992) 325–376.
- [16] S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A. Kuba, M. Nivat, Reconstruction of 4- and 8-connected convex discrete sets from row and column projections, *Linear Algebra and its Applications* **339** (2001) 37–57.
- [17] J.M. Carazo, C.O. Sorzano, E. Rietzel, R. Schröder, R. Marabini, Discrete tomography in electron microscopy, In [28], pp. 405–416, 1999.
- [18] B.M. Carvalho, G.T. Herman, S. Matej, C. Salzberg., E. Vardi, Binary tomography for triplane cardiography, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **1613** (1999) 29–41.
- [19] S.-K. Chang, The reconstruction of binary patterns from their projections, *Commun. ACM* **14:1** (1971) 21–25.
- [20] M. Chrobak, Ch. Dürr, Reconstructing  $h\nu$ -convex polyominoes from orthogonal projections, *Inform. Process. Lett.* **69(6)** (1999) 283–289.
- [21] A. Del Lungo, Polyominoes defined by two vectors, *Theor. Comput. Sci.* **127** (1994) 187–198.
- [22] V. Di Gesu, G. Lo Bosco, F. Millonzi, C. Valenti, A memetic algorithm for binary image reconstruction, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **4958** (2008) 384–395.
- [23] Divós Péter, Divós Ferenc, Akusztikus tomográfia élő fák vizsgálatára, *Faipar 2005/1* (2005) 3–8.
- [24] D. Gale, A theorem on flows in networks, *Pac. J. Math.* **7** (1957) 1073–1082.
- [25] R.J. Gardner, P. Gritzmann, Uniqueness and complexity in discrete tomography, In [28], pp. 85–113, 1999.
- [26] R. Gordon, R. Bender, G. T. Herman: Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography. *Journal of Theoretical Biology* **29** (1970) 471-481.
- [27] Herman, G.T.: Fundamentals of Computerized Tomography, Academic Press, 2nd edition, 2010.
- [28] Herman, G.T., A. Kuba, A. (eds.): Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [29] Herman, G.T., A. Kuba, A. (eds.): Advances in Discrete Tomography and its Applications, Birkhäuser, Boston, 2007.

- [30] Hsieh, J.: *Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts and Recent Advances*, SPIE Publications, 2nd edition, 2009.
- [31] J.R. Jinschek, K.J. Batenburg, H.A. Calderon, R. Kilaas, V. Radmilovic, C. Kisielowski, 3-D reconstruction of the atomic positions in a simulated gold nanocrystal based on discrete tomography: prospects of atomic resolution electron tomography, *Ultramicroscopy* **108(6)** (2008) 589–604.
- [32] S. Kaczmarz, Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen, *Bulletin International de l'Academie Polonaise des Sciences et des Lettres*, series A **35** (1937) 335–357.
- [33] Kak, A.C., Slaney, M.: *Principles of computerized tomographic imaging*, IEEE Service Center, Piscataway, NJ., 1988.
- [34] C. Kisielowski, P. Schwander, F.H. Baumann, M. Seibt, Y. Kim, A. Ourmazd, An approach to quantitative high-resolution transmission electron microscopy of crystalline materials, *Ultramicroscopy* **58** (1995) 131–155.
- [35] A. Kuba, The reconstruction of two-directionally connected binary patterns from their two orthogonal projections, *Comp. Vision, Graphics, and Image Proc.* **27** (1984) 249–265.
- [36] A. Kuba, E. Balogh, Reconstruction of convex 2D discrete sets in polynomial time, *Theor. Comput. Sci.* **283** (2002) 223–242.
- [37] A. Kuba, A. Nagy, E. Balogh, Reconstruction of  $h\nu$ -convex binary matrices from their absorbed projections, *Disc. Appl. Math.* **139** (2004) 137–148.
- [38] A. Kuba, M. Nivat, Reconstruction of discrete sets with absorption, *Lin. Algebra Appl.* **339** (2001) 171–194.
- [39] A. Kuba, M. Nivat, A sufficient condition for non-uniqueness in binary tomography with absorption, *Discrete Appl. Math.* **346** (2005) 335–357.
- [40] A. Kuba, G.W. Woeginger, Two remarks on reconstructing binary vectors from their absorbed projections, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **3429** (2005) 148–152.
- [41] N. Metropolis, A. Rosenbluth, A T. Rosenbluth., E. Teller, Equation of state calculation by fast computing machines, *Journal of Chem. Phys.* **21** (1953) 1087–1092.
- [42] D.G.W. Onnasch, G.M.P. Prause Heart Chamber Reconstruction from Biplane Angiography, In [28], pp. 385–403, 1999.
- [43] H.J. Ryser, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, *Canad. J. Math.* **9** (1957) 371–377.
- [44] T. Schüle, C. Schnörr, S. Weber, J. Hornegger, Discrete tomography by convex-concave regularization and D.C. programming, *Disc. Appl. Math.* **151** (2005) 229–243.

- [45] P. Schwander, C. Kisielowski, M. Seibt, F.H. Baumann, Y. Kim, A. Ourmazd, Mapping projected potential, interfacial roughness, and composition in general crystalline solids by quantitative transmission electron microscopy, *Physical Review Letters* **71** (1993) 4150–4153.
- [46] S. Van Aert, K.J. Batenburg, M.D. Rossell, R. Erni, G. Van Tendeloo, *Three-dimensional atomic imaging of crystalline nanoparticles*, *Nature* **470** (2011) 374–377.
- [47] Weninger Csaba, Moró Zsuzsa, A CT nem orvosi alkalmazása, *IME VII. évfolyam 5. szám* (2008) 43–46.
- [48] G.W. Woeginger, The reconstruction of polyominoes from their orthogonal projections, *Inform. Process. Lett.* **77** (2001) 225–229.