

Írta:
GYŐRI ISTVÁN
PITUK MIHÁLY

KALKULUS

INFORMATIKUSOKNAK II.

Egyetemi tananyag



2011

COPYRIGHT: © 2011–2016, Dr. Győri István, Dr. Pituk Mihály, Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar Matematika Tanszék

LEKTORÁLTA: Dr. Molnárka Győző, Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kar Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.



SZÉCHENYI TERV



ISBN 978-963-279-505-8

KÉSZÜLT: a **Typotex Kiadó** gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: **Votisky Zsuzsa**

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: **Juhász Lehel**

KULCSSZAVAK:

végtelen sor, hatványsor, többváltozós függvény, folytonosság, határérték, differenciál, területi integrál, közönséges differenciálegyenlet, z -transzformált

ÖSSZEFOGLALÁS:

A jegyzet a *Kalkulus informatikusoknak II.* c. jegyzet folytatása, a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán oktatott Matematikai analízis II. kurzus anyagának összefoglalása informatikus és villamosmérnök hallgatók részére. Az olvasó megismerkedhet a végtelen sorok és hatványsorok fogalmával, a többváltozós függvények differenciálszámításával, a területi integrállal és közönséges differenciálegyenletek néhány egyszerűbb típusával. Egy információátviteli probléma kapcsán ismertetésre kerül a z -transzformált fogalma és fontosabb tulajdonságai.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Végtelen sorok	6
1.1. Végtelen sorok konvergenciája	6
1.2. A geometriai sor	7
1.3. Műveletek konvergens sorokkal	8
1.4. A konvergencia szükséges feltétele	8
1.5. Abszolút és feltételes konvergencia	9
1.6. Konvergenciakritériumok	9
1.7. Hatványsorok	13
1.8. Az összegfüggvény tulajdonságai	16
1.9. Taylor-sor, Taylor-polinom	17
1.10. Taylor tétele	18
1.11. Nevezetes hatványsorok	19
1.12. Komplex hatványsorok	20
2. Egy információátviteli probléma	22
2.1. Jelsorozatok átvitele	22
2.2. A z -transzformált fogalma	23
2.3. A z -transzformált tulajdonságai	24
2.4. A jelátviteli probléma vizsgálata	25
3. Többváltozós függvények differenciálszámítása	28
3.1. Az p -dimenziós euklideszi tér	28
3.2. Ponsorozat konvergenciája	29
3.3. Környezetek, pontozott környezetek	29
3.4. Nyílt, zárt és korlátos ponthalmazok	29
3.5. Többváltozós függvények	31
3.6. Határérték és folytonosság	31
3.7. Differenciálhatóság	33
3.8. Az irány menti derivált, parciális deriváltak	34
3.9. A láncszabály	37
3.10. Közéértéktétel	38
3.11. Schwarz tétele	38

3.12. Abszolút és lokális szélsőérték helyek	39
4. Területi integrál	42
4.1. A terület fogalma	42
4.2. A területi integrál fogalma	45
4.3. A területi integrál tulajdonságai	46
4.4. A területi integrál kiszámítása	47
5. Differenciálegyenletek	51
5.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet	51
5.2. Szeparábilis differenciálegyenlet	53
5.3. Másodrendű lineáris homogén egyenlet	54
5.4. Másodrendű lineáris inhomogén egyenlet	55
Irodalomjegyzék	59

Bevezetés

Ez a jegyzet a „Kalkulus informatikusoknak I.” című jegyzetünk folytatása, és a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A program keretében készült. A Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán éveken át tartott „Matematikai analízis II.” kurzusunk anyagát foglaltuk össze benne. Ezzel szertnének segíteni az informatikus és villamosmérnök hallgatókat a sikeres vizsgára való felkészülésben. A jegyzetben tárgyaljuk a végtelen számsorok és hatványsorok fontosabb tulajdonságait, a többváltozós függvények differenciálszámítását, a területi integrált és skaláris differenciálegyenletek néhány egyszerűbb típusát. Külön hangsúlyt fektettünk a z -transzformált fogalmára, amely egy információátviteli probléma kapcsán nyer alkalmazást.

A jegyzet nem tartalmaz bizonyításokat. Célunk a szakmai tárgyakban előforduló matematikai fogalmak és azok fontosabb tulajdonságainak összefoglalása volt. A tárgyhoz külön gyakorlatok vannak előírva, amelyekhez feladatgyűjtemény is készült. Ez az oka annak, hogy a jegyzet csak mintapéldákat tartalmaz, gyakorló feladatokat nem. A vizsgára való sikeres felkészüléshez és a tananyag jobb megértéséhez elengedhetetlennek tartjuk az előadások látogatását, ahol további példákat és egyszerűbb bizonyításokat is bemutatunk. A kihagyott bizonyítások és további alkalmazások iránt érdeklődő hallgatóknak az irodalomjegyzékben szereplő tankönyveket ajánljuk. Ismételten kifejezzük köszönetünket Hartung Ferenc kollégánknak a jegyzet megírása során nyújtott segítségéért.

Veszprém, 2011. január 31.

Győri István és Pituk Mihály

1. fejezet

Végtelen sorok

1.1. Végtelen sorok konvergenciája

Legyen \mathbb{N} a nemnegatív egész számok halmaza, \mathbb{N}^+ pedig a pozitív egészek halmaza. A valós számok halmazát az \mathbb{R} , a komplex számok halmazát pedig a \mathbb{C} szimbólummal jelöljük.

1.1.1. Definíció. Legyen adva egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

végtelen összeget *végtelen sornak* nevezzük. Az

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

összeget a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor n -edik *részletösszegének* mondjuk. Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ végtelen sort is *konvergensnek* mondjuk, az

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

véges határértéket pedig a *sor összegének* nevezzük, és ugyancsak a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

szimbólummal jelöljük. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k.$$

Ha az $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat divergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sort is *divergensnek* mondjuk.

Ha $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, akkor a részletösszegek $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ sorozata monoton növekedő. Tehát egy nemnegatív tagú sor éppen akkor konvergens, ha az $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ sorozat felülről korlátos.

Legyen $m \in \mathbb{N}^+$ és $\{b_i\}_{i=m}^\infty$ egy valós sorozat. A

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = b_m + b_{m+1} + b_{m+2} + \dots$$

végtelen sor azonos az \mathbb{N} -en indexelt

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m}$$

sorral, és összege:

$$\sum_{i=m}^{\infty} b_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n b_i,$$

feltéve, hogy a limesz létezik és véges.

1.1.2. Példa.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

1.1.3. Példa. A $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ sor divergens, mert a részletösszegek

$$s_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

sorozata divergens.

1.2. A geometriai sor

1.2.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $q \in \mathbb{R}$ adott. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

sort *geometriai (mértani) sornak* nevezzük. Az a szám a sor első tagja, a q szám pedig a sor *kvóciense (hányadosa)*.

A

$$\sum_{k=0}^n aq^k = \begin{cases} a \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{ha } q \neq 1 \text{ és } n \in \mathbb{N}, \\ (n+1)a, & \text{ha } q = 1 \text{ és } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

reláció, valamint a $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ geometriai sorozat konvergenciatulajdonságaiból adódik a következő:

1.2.2. Tétel (A geometriai sor konvergenciája). *Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $q \in \mathbb{R}$. A $\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$ geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és konvergencia esetén összege $\frac{a}{1-q}$.*

1.3. Műveletek konvergens sorokkal

1.3.1. Tétel. *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok konvergensek és összegük s illetve t , α és β pedig valós számok, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ sor is konvergens, és összege $\alpha s + \beta t$, azaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

1.3.2. Példa. Az előző tételből és a geometriai sor konvergenciatulajdonságaiból következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}.$$

1.4. A konvergencia szükséges feltétele

1.4.1. Tétel (A konvergencia szükséges feltétele). *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

1.4.2. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

sor divergens, mert

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1} \longrightarrow 1 \neq 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

1.4.3. Definíció. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

sor *harmonikus sornak* nevezzük.

Be fogjuk látni, hogy a harmonikus sor divergens annak ellenére, hogy $\frac{1}{n} \rightarrow 0$. Tehát a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ feltétel szükséges, de nem elegendő feltétele a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciájának.

1.5. Abszolút és feltételes konvergencia

1.5.1. Definíció. A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sort *abszolút konvergensnek* mondjuk, ha a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

sor konvergens.

Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor *feltételesen konvergensnek* nevezzük.

A konvergens és abszolút konvergens sorok között a következő a kapcsolat.

1.5.2. Tétel. *Ha egy sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

A tétel megfordítása nem igaz. Be fogjuk látni, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens, de mivel

$$\left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^+,$$

és a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor divergens, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ sor nem abszolút konvergens. Tehát a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ sor feltételesen konvergens.

1.6. Konvergenciakritériumok

Elegendő feltételeket adunk végtelen sorok konvergenciájára vagy divergenciájára. Megfogalmazásukhoz szükségünk van a következő fogalmakra.

1.6.1. Definíció. A $t \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ számot az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat *torlódási pontjának* nevezzük, ha az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak van olyan $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ részsorozata, amelyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = t.$$

Be lehet bizonyítani a következő tulajdonságot.

1.6.2. Tétel. *Bármely valós $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjai között $\overline{\mathbb{R}}$ -ban van legnagyobb és legkisebb is.*

1.6.3. Példa. A $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat legnagyobb torlódási pontja 1, legkisebb torlódási pontja pedig -1 .

A $\{(-1)^n n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat legnagyobb torlódási pontja $+\infty$, legkisebb torlódási pontja pedig $-\infty$.

1.6.4. Definíció. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat legnagyobb (legkisebb) torlódási pontját a sorozat *limesz superiorának* (*limesz inferiorának*) nevezzük, és a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$$

szimbólummal jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Azt is be lehet látni, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pontosan akkor létezik $\overline{\mathbb{R}}$ -ban, ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Az ígért konvergenciakritériumok a következők:

1.6.5. Tétel (Hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy $|a_n| > 0$ véges számú kivétellel. Ha*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens.

Ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens.

Speciálisan, ha az

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

határérték (véges vagy végtelen) létezik, akkor $L < 1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens, $L > 1$ esetén pedig divergens.

Hangsúlyozzuk, hogy ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciatulajdonságainak meghatározására a hányadoskritérium nem használható.

1.6.6. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$$

sor divergens, mert

$$\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{(n+1)} n!}{n^n (n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \longrightarrow e > 1, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

1.6.7. Tétel (Gyökkritérium). *Ha*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens.

Ha

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor divergens.

Speciálisan, ha az

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

határérték (véges vagy végtelen) létezik, akkor $L < 1$ esetén a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens, $L > 1$ esetén pedig divergens.

Ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor konvergenciatulajdonságainak meghatározására a gyökkritérium nem használható.

1.6.8. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

sor konvergens, mert

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

1.6.9. Tétel (Integrálkritérium). *Legyen $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ folytonos, monoton csökkenő és pozitív. Ekkor a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$$

sor akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_0^{\infty} f$ improprius integrál konvergens.

Az állítás igaz marad akkor is, ha a 0 számot tetszőleges $m \in \mathbb{N}^+$ számra cseréljük.

1.6.10. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonikus sor divergens, mert

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Ugyancsak az integrálkritérium segítségével látható be:

1.6.11. Tétel. Ha $\alpha > 1$, akkor a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

sor konvergens, ha pedig $\alpha \leq 1$, akkor divergens.

1.6.12. Definíció. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1) \cup (1, \infty)$$

sor *hiperharmonikus sornak* nevezzük.

1.6.13. Tétel (Összehasonlító kritérium). Ha

$$|a_k| \leq b_k \quad \text{véges számú kivétellel,}$$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor konvergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor abszolút konvergens.

Ha

$$a_k \geq b_k \geq 0 \quad \text{véges számú kivétellel,}$$

és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sor divergens, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor is divergens.

Az összehasonlító kritériumból könnyen levezethető az alábbi:

1.6.14. Tétel. Ha $b_k > 0$ véges számú kivétellel és valamely $L \in (0, \infty)$ számra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sorok közül vagy mindkettő konvergens, vagy pedig mindkettő divergens.

1.6.15. Példa. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+2}{k^2+2k+5}$$

sor divergens, mert

$$\frac{\frac{k+2}{k^2+2k+5}}{\frac{1}{k}} = \frac{k(k+2)}{k^2+2k+5} \rightarrow 1, \quad \text{ha } k \rightarrow \infty,$$

és a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

(harmonikus) sor divergens.

1.6.16. Definíció. Legyen $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ egy pozitív tagú sorozat. Ekkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

sorokat *váltakozó előjelű soroknak* nevezzük.

Elegendő csak az első sort vizsgálni, mert a második az elsőnek -1 -szerese.

A váltakozó előjelű sorok konvergenciájáról szól a következő:

1.6.17. Tétel (Leibniz-féle kritérium). Ha $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ pozitív tagú, monoton csökkenő sorozat, és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

váltakozó előjelű sor konvergens.

1.6.18. Példa. A Leibniz-kritériumból az $a_k = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbb{N}^+$) választással kapjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens. Később be fogjuk látni, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln 2.$$

1.7. Hatványsorok

1.7.1. Definíció. Legyen adva egy $x_0 \in \mathbb{R}$ szám és egy $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ valós sorozat. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

függvénysort x_0 körüli hatványsornak nevezzük. Az x_0 szám a hatványsor középpontja, x pedig a valós változó.

1.7.2. Definíció. A hatványsor konvergenciatartományán a

$$K = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} a_k (c - x_0)^k \text{ számsor konvergens} \right\}$$

halmazt értjük.

Nyilvánvaló, hogy $x_0 \in K$, tehát $K \neq \emptyset$. Célunk a konvergenciatartomány leírása. Ennek szempontjából alapvető fontosságú a következő:

1.7.3. Tétel (Abel-féle lemma). Ha valamely $c \neq x_0$ szám esetén a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (c - x_0)^k$$

számsor konvergens, akkor minden olyan d -re, amelyre $|d - x_0| < |c - x_0|$ a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (d - x_0)^k$$

számsor abszolút konvergens.

Az Abel-féle lemmából következik az alábbi:

1.7.4. Tétel. Legyen K a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya, és

$$r = \sup\{|c - x_0| \mid c \in K\} \in [0, \infty].$$

Ha $r = 0$, akkor $K = \{x_0\}$. Ha $r = +\infty$, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c - x_0)^k$$

sor abszolút konvergens, és így $K = \mathbb{R}$. Ha pedig $r \in (0, \infty)$, akkor minden olyan c -re, amelyre $|c - x_0| < r$ ($|c - x_0| > r$) a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(c - x_0)^k$$

sor abszolút konvergens (divergens), s ezért

$$(x_0 - r, x_0 + r) \subset K \subset [x_0 - r, x_0 + r].$$

Mivel a hatványsor konvergenciatartománya az $r = 0$ esettől eltekintve intervallum, a konvergenciatartomány helyett a *konvergenciaintervallum* elnevezés is használatos.

1.7.5. Definíció. Az előző tételben szereplő r számot a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor *konvergenciasugarának* nevezzük.

A konvergenciasugar meghatározása szolgál a következő:

1.7.6. Tétel (Cauchy–Hadamard-képlet). Legyen r a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor *konvergenciasugara*, és

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & \text{ha } \rho \in (0, \infty) . \\ +\infty, & \text{ha } \rho = 0 \end{cases}$$

1.7.7. Példa. A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}$$

–1 körüli hatványsor konvergenciasugara $r = 1$, mivel

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k}} = 1.$$

A hatványsor K konvergenciatartományára teljesül a

$$(-2, 0) \subset K \subset [-2, 0]$$

reláció. Mivel az $x = 0$ -ra adódó

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

sor divergens (harmonikus sor), és az $x = -2$ -re adódó

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$$

sor konvergens (a Leibniz-kritérium szerint), ezért

$$K = [-2, 0).$$

A hatványsor konvergenciatartományának meghatározására gyakran jól használható a következő:

1.7.8. Tétel. Legyen r a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara. Tegyük fel, hogy $a_k \neq 0$ véges számú kivétellel, és valamely $\lambda \in [0, \infty]$ számra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lambda.$$

Ekkor

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \lambda = +\infty \\ \frac{1}{\lambda}, & \text{ha } \lambda \in (0, \infty) \\ +\infty & \text{ha } \lambda = 0 \end{cases}.$$

1.7.9. Példa. A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

0 körüli hatványsor konvergenciasugara $r = +\infty$, mert

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Ezért a konvergenciatartomány $K = \mathbb{R}$.

1.8. Az összegfüggvény tulajdonságai

1.8.1. Definíció. Legyen K a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya. Az

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad x \in K,$$

képlettel definiált $s : K \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor *összegfüggvényének* mondjuk.

Az összegfüggvényt fontosabb tulajdonságait írják le a következő tételek.

1.8.2. Tétel (Az összegfüggvény folytonossága). *Ha egy hatványsor konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor összegfüggvénye folytonos a konvergenciaintervallumán.*

1.8.3. Tétel (Tagonkénti differenciálás). *Ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor r konvergenciasugara pozitív, akkor a hatványsor s összegfüggvénye akárhányszor differenciálható a konvergenciaintervallum belsejében, és n -edik deriváltja a hatványsor n -szeri tagonkénti differenciálásával kapható meg, azaz*

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (x - x_0)^{k-1}, \\ s''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) (x - x_0)^{k-2}, \\ &\vdots \\ s^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} a_k k(k-1) \dots (k-n+1) (x - x_0)^{k-n}, \end{aligned}$$

valahányszor $|x - x_0| < r$.

1.8.4. Példa. Korábban már beláttuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}$$

hatványsor konvergenciaintervalluma a $[-2, 0)$ intervallum. Ezért az

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k}, \quad x \in [-2, 0),$$

függvény differenciálható a $(-2, 0)$ -n, és itt

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x+1)^{k-1} = -\frac{1}{x},$$

a geometriai sor összegképlete alapján. Mivel $s(-1) = 0$, a Newton–Leibniz-szabály szerint minden $x \in (-2, 0)$ esetén

$$s(x) = s(-1) + \int_{-1}^x s'(t) dt = - \int_{-1}^x \frac{1}{t} dt = -[\ln |t|]_{-1}^x = -\ln |x|.$$

Az s függvény -2 -ben jobbról folytonos, ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = s(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^+} s(x) = -\ln 2.$$

1.8.5. Tétel (Tagonkénti integrálás). *Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara pozitív és $[a, b]$ része a hatványsor konvergenciaintervallumnak, akkor a hatványsor s összefüggvénye tagonként integrálható $[a, b]$ -n, azaz*

$$\int_a^b s(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k(x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \right]_a^b.$$

1.9. Taylor-sor, Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény x_0 körüli hatványsorba fejthető, azaz létezik egy $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ hatványsor úgy, hogy a hatványsor r konvergenciasugara pozitív, és

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad \text{valahányszor } |x - x_0| < r.$$

A tagonkénti differenciálásról szóló tételből következik, hogy ekkor f akárhányszor differenciálható, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(Definíció szerint $0! = 1$.) Ez a tény motiválja a következő sor bevezetését és vizsgálatát.

1.9.1. Definíció. Tegyük fel, hogy az f függvény akárhányszor differenciálható az $x_0 \in D(f)$ helyen. A

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

hatványsort az f függvény x_0 körüli Taylor-sorának nevezzük. A hatványsor n -edik

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

részletösszegét az f függvény n -edik x_0 körüli Taylor-polinomjának mondjuk. Az $x_0 = 0$ esetben használatos a MacLaurin-sor illetve MacLaurin-polinom elnevezés is.

Az

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

különbséget az f függvény n -edik x_0 körüli maradéktagjának mondjuk.

1.9.2. Példa. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\exp^{(k)} = \exp$. Ezért az \exp függvény 0 körüli Taylor-sora

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Korábban már beláttuk, hogy ez a hatványsor a számegeenes minden pontjában abszolút konvergens.

1.10. Taylor tétele

Taylor tételének megfogalmazásához szükségünk van a következő jelölésre.

1.10.1. Definíció. Bármely $x_0, x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$ esetén

$$[x_0; x] = \begin{cases} [x_0, x], & \text{ha } x_0 < x \\ [x, x_0], & \text{ha } x < x_0. \end{cases}$$

Hasonlóképpen definiáljuk az $(x_0; x)$ nyílt intervallumot.

1.10.2. Tétel (Taylor tétele). *Legyen $x_0, x \in \mathbb{R}, x \neq x_0$. Ha valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f^{(n)}$ folytonos az $[x_0; x]$ intervallumon és differenciálható az $(x_0; x)$ -en, akkor létezik $c \in (x_0; x)$ úgy, hogy*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Megjegyezzük, hogy az $n = 0$ esetben Taylor tétele Lagrange tételébe megy át.

1.10.3. Definíció. Az $R_n(x)$ maradéktagnak Taylor tételében szereplő alakját a *maradéktag Lagrange-féle alakjának* nevezzük.

Taylor tétele gyakran jól használható függvényértékek közelítő számítására.

1.10.4. Definíció. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén az \exp függvény 0 körüli n -edik Taylor polinomja

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Ezért ha az $e = \exp 1$ szám értékét a Taylor-polinom

$$T_n(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

értékével helyettesítjük, akkor Taylor tétele szerint létezik $c \in (0, 1)$ úgy, hogy az $e = \exp 1$ pontos értéke és a „közelítő” $T_n(1)$ érték közötti különbség az

$$\exp(1) - T_n(1) = R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

alakban írható. Mivel $c < 1$, ezért

$$\frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Ezért ha azt szeretnénk, hogy a valódi és a közelítő érték közötti távolság kisebb legyen 10^{-2} -nél, akkor az n számot elegendő úgy választani, hogy

$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100},$$

vagyis 4-nél nagyobbak. Tehát

$$T_5(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,71\bar{6}$$

már 10^{-2} pontossággal közelíti az e számot.

1.11. Nevezetes hatványsorok

Taylor tétele jól használható arra is, hogy bizonyos függvényeket hatványsorba fejtsünk. Taylor tételének egyik következménye:

1.11.1. Tétel. *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f akárhányszor differenciálható (a, b) -n és létezik $M \in (0, \infty)$ úgy, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re $|f^{(n)}| \leq M$ az (a, b) -n. Ekkor bármely $x, x_0 \in (a, b)$ esetén*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Az előző tételből könnyen megkapható néhány nevezetes hatványsor.

1.11.2. Tétel (Az exp függvény hatványsora). *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

1.11.3. Tétel (A sin függvény hatványsora). *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

1.11.4. Tétel (A cos függvény hatványsora). *Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

1.12. Komplex hatványsorok

Komplex sorozatok és sorok konvergenciájának, valamint a komplex hatványsorok konvergenciatartományának a definícióját úgy kapjuk, hogy a valós sorozatok, sorok, illetve hatványsorok megfelelő definíciójában \mathbb{R} -et \mathbb{C} -re cseréljük. A sorozatok határértékszámításának szabályai és a sorok konvergenciakritériumai a monotonitási és rendezési relációkra hivatkozókat leszámítva átvihetők a komplex esetre is. Hasonló a helyzet a komplex hatványsorok konvergenciatartományával is. Ha $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ komplex számok sorozata és $z_0 \in \mathbb{C}$, akkor a

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

komplex változójú hatványsor konvergenciatartományát hasonlóképpen jellemezhetjük, mint a valós hatványsorokét. Pontosabban, ha

$$\rho = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ hatványsor konvergenciasugara

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \rho = +\infty \\ \frac{1}{\rho}, & \text{ha } \rho \in (0, \infty), \\ +\infty & \text{ha } \rho = 0 \end{cases}$$

azaz ha $|z - z_0| < r$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ sor abszolút konvergens, ha pedig $|z - z_0| > r$, akkor divergens.

Az \exp , \sin és \cos függvények hatványsor alakjáról szóló eredmények lehetőséget adnak ezen függvények komplex számokra való kiterjesztésére.

1.12.1. Definíció. Bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \exp z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

A valós \exp függvényhez hasonlóan $z \in \mathbb{C}$ esetén is használatos az $\exp z = e^z$ jelölés.

Végül ismertetünk három a komplex \exp , \sin és \cos függvényekre vonatkozó nevezetes azonosságot.

1.12.2. Tétel (Euler-formulák). *Bármely $z \in \mathbb{C}$ helyen*

$$\begin{aligned}e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.\end{aligned}$$

Az első Euler-formulát a komplex szám trigonometrikus alakjával kombinálva kapjuk a $z \neq 0$ komplex szám *exponenciális alakját*:

$$z = r e^{i\varphi},$$

ahol $r = |z|$, φ pedig z argumentuma.

2. fejezet

Egy információátviteli probléma

2.1. Jelsorozatok átvitele

Legyen adva egy üzenetátviteli rendszer, amelyben az üzeneteket két alapjel – mondjuk a és b – segítségével kódoljuk és továbbítjuk. Egy üzenet formája az a és b alapjelekből álló valamely véges hosszúságú sorozat, például: $abaabbb$. Ilyen rendszer a telegráf vagy a binárisan kódolt adatátviteli rendszerek (fax, internet, stb.).

A rendszerben az a alapjel átviteléhez k_1 , míg a b alapjel átviteléhez k_2 időegységre van szükség (k_1 és k_2 pozitív egész). Tegyük fel a határozottság kedvéért, hogy $k_2 \geq k_1$. Felmerül a kérdés: hány olyan egymástól különböző üzenet (jelsorozat) van, amelyek átviteléhez pontosan n időegység kell?

Jelölje s_n mindazon egymástól különböző üzeneteknek a számát, amelyek pontosan n időegység alatt vihetők át. Ekkor s_n teljesíti a

$$s_n = s_{n-k_1} + s_{n-k_2}, \quad n \geq k_2 + 1$$

rekurzív összefüggést, hiszen csak két különböző eset fordulhat elő: ha az utolsó átvitt alapjel k_1 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_1} db különböző $n - k_1$ hosszú jelsorozat lehetett, ha pedig az utolsó átvitt alapjel k_2 hosszú volt, akkor előtte összesen s_{n-k_2} -féle $n - k_2$ hosszú jelsorozat lehetett. Ez a rekurzív képlet akkor határozza meg egyértelműen az $\{s_n\}$ sorozatot, ha megadjuk a sorozat első k_2 db kezdeti értékét:

$$s_1 = u_1, s_2 = u_2, \dots, s_{k_2} = u_{k_2}.$$

Speciális eset: Legyen az $a = \cdot$ jel átviteléhez szükséges idő egy egység, azaz $k_1 = 1$, és a $b = -$ jel átviteléhez szükséges idő két egység, azaz $k_2 = 2$. A szemléltetés kedvéért táblázatba foglaltuk az $\{s_n\}$ sorozat első néhány tagját és a hozzájuk tartozó jelsorozatokat:

n	s_n	lehetséges jelsorozatok
1	1	\cdot
2	2	$\cdot\cdot; -$
3	3	$\cdot\cdot\cdot; \cdot-; --$
4	5	$\cdot\cdot\cdot\cdot; \cdot\cdot-; \cdot--; -\cdot\cdot; ---$

Az $\{s_n\}$ sorozatot ebben az esetben az

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, & n \geq 3, \\ s_1 &= 1, & s_2 = 2, \end{aligned}$$

rekurzió határozza meg.

Az információelméletben az áteresztő csatorna kapacitását, jele C , a

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 s_n}{n}$$

formulával definiálják [3].

Felmerülnek a következő kérdések:

- Mi lehet s_n képlete?
- Hogyan számolható ki az áteresztő csatorna C kapacitása, és hogyan változik C k_1 és k_2 függvényében?

A kérdéseket a következő részben bevezetett z -transzformált segítségével fogjuk megválaszolni.

2.2. A z -transzformált fogalma

2.2.1. Definíció. Legyen adva egy komplex számokból álló $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat. Az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat z -transzformáltját az

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

képlettel definiáljuk minden olyan $z \in \mathbb{C}$ -re, amelyre a jobb oldalon szereplő komplex szám-sorozat konvergens. Jelölés: $X = Z\{x_n\}$.

Az $X = Z\{x_n\}$ függvény (ha létezik) komplex változójú és komplex értékű. Ha $w = \frac{1}{z}$, akkor

$$X(1/w) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n w^n$$

egy komplex hatványsor, tehát a z -transzformált vizsgálata során felhasználhatjuk a komplex hatványsorokra vonatkozó eredményeinket. Eszerint ha

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|},$$

akkor $|z| > R$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}$$

sorozat konvergens, $|z| < R$ esetén pedig divergens.

2.2.2. Definíció. Az

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}, \quad 0 \leq R \leq \infty,$$

számot az $X = Z\{x_n\}$ z -transzformált konvergenciasugarának nevezzük.

2.2.3. Tétel (Egzisztencia tétel). Legyen adva egy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplex sorozat. Ha az $X = Z\{x_n\}$ z -transzformált R konvergenciasugara véges, akkor X értelmezve van minden olyan $z \in \mathbb{C}$ helyen, amelyre $|z| > R$.

2.2.4. Tétel (Unicitás tétel). Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat. Tegyük fel, hogy az $X = Z\{x_n\}$ és $Y = Z\{y_n\}$ z -transzformáltak konvergenciasugarai végesek, továbbá

$$X(z) = Y(z), \quad \text{ha } |z| \text{ elég nagy.}$$

Ekkor $x_n = y_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re.

2.3. A z -transzformált tulajdonságai

2.3.1. Tétel (Linearitás). Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat. Tegyük fel, hogy a $Z\{x_n\}$ és $Z\{y_n\}$ z -transzformáltak konvergenciasugarai végesek, és $a, b \in \mathbb{C}$. Ekkor

$$Z\{ax_n + by_n\}(z) = aZ\{x_n\}(z) + bZ\{y_n\}(z), \quad \text{ha } |z| \text{ elég nagy.}$$

2.3.2. Tétel (Eltolás). Legyen adva egy $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplex sorozat. Ha az $X = Z\{x_n\}$ z -transzformált R konvergenciasugara véges, akkor bármely $k \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$Z\{x_{n+k}\}(z) = z^k X(z) - \sum_{j=0}^{k-1} x_j z^{j-k}, \quad \text{ha } |z| > R.$$

2.3.3. Tétel (Konvolúciós tétel). Legyen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ két komplex sorozat, és definiáljuk az $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az

$$u_n = \sum_{j=0}^n x_{n-j} y_j, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}$$

képlettel. Ha az $X = Z\{x_n\}$ és $Y = Z\{y_n\}$ z -transzformáltak R_1 , illetve R_2 konvergenciasugarai végesek, akkor az $U = Z\{u_n\}$ z -transzformált konvergenciasugara is véges, és

$$U(z) = X(z)Y(z), \quad \text{ha } |z| \text{ elég nagy.}$$

2.3.4. Definíció. Az előző tételben szereplő $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvolúciójának nevezzük.

Néhány konkrét sorozat z -transzformáltját a következő táblázat tartalmazza:

x_n	$X(z) = Z\{x_n\}(z)$
1	$\frac{z}{z-1}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$
na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$n^2 a^n$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
$n^3 a^n$	$\frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}$
$n^k a^n$	$(-1)^k D^k \left(\frac{z}{z-a} \right); \quad D = z \frac{d}{dz}$
$a^n \sin(n\omega)$	$\frac{az \sin(n\omega)}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}$
$a^n \cos(n\omega)$	$\frac{z(z - a \cos \omega)}{z^2 - 2az \cos \omega + a^2}$

$$(a, b, \omega \in \mathbb{R} \text{ és } k \in \mathbb{N}^+)$$

A továbbiakban szükségünk lesz a következő tételre:

2.3.5. Tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}^+$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, és $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ egy komplex sorozat. Tegyük fel, hogy $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ olyan komplex sorozat, amelyre

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n + b_n, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N},$$

továbbá

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} < \infty.$$

Ekkor

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < \infty.$$

2.4. A jelátviteli probléma vizsgálata

Tekintsük a 2.1. szakaszban definiált információátviteli probléma

$$\begin{aligned} s_n &= s_{n-1} + s_{n-2}, & \text{ha } n \geq 3, \\ s_1 &= 1, & s_2 = 2, \end{aligned}$$

speciális esetét. A problémát írhatjuk az ekvivalens

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= s_{n+1} + s_n, & \text{ha } n \geq 0, \\ s_0 &= 1, & s_1 = 1, \end{aligned}$$

alakban is. Legyen $S = Z\{s_n\}$. Ha vesszük mindkét oldal z -transzformáltját és alkalmazzuk az eltolási tételt, azt kapjuk, hogy

$$z^2S(z) - z^2s_0 - zs_1 = zS(z) - zs_0 + S(z).$$

A kezdeti értékeket behelyettesítésével:

$$(z^2 - z - 1)S(z) = z^2,$$

azaz

$$S(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}.$$

Bontsuk $S(z)$ -t parciális törtekre úgy, hogy egy z szorzótényezőt meghagyunk a számlálóban:

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{(z - z_1)(z - z_2)} = z \left(\frac{A}{z - z_1} + \frac{B}{z - z_2} \right),$$

ahol

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ezt végigszámolva azt kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}z_1 \quad \text{és} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}z_2,$$

tehát

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}z_1 \frac{z}{z - z_1} - \frac{1}{\sqrt{5}}z_2 \frac{z}{z - z_2}.$$

Innen

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

minden $n \in \mathbb{N}^+$ -re. Ha erre a sorozatra kiszámítjuk a csatorna áteresztő képességét, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 C &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 s_n}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right) \right]}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} + \log_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \log_2 \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{n} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left(1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} \right)}{n} \\
 &= 0 + \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 0.
 \end{aligned}$$

Tehát

$$C = \log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,7.$$

3. fejezet

Többváltozós függvények differenciálszámítása

3.1. Az p -dimenziós euklideszi tér

Bármely $p \in \mathbb{N}^+$ esetén az \mathbb{R}^p szimbólum a p -dimenziós valós oszlopvektorok terét jelöli. \mathbb{R}^p elemeit *vektoroknak* vagy *pontoknak* nevezzük; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Bármely $x = (x_1, \dots, x_p)^T, y = (y_1, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)^T, \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)^T,\end{aligned}$$

ahol a T felső index a vektorok transzponálására utal, azaz sorvektorok helyett oszlopvektorokat kell írunk. A fenti két művelettel együtt \mathbb{R}^p valós vektortér, amelynek dimenziója p . Az $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T, e_2 = (0, 1, \dots, 0)^T, \dots, e_p = (0, 0, \dots, 1)^T$ vektorok az \mathbb{R}^p tér bázisát alkotják. Ezeket a vektorokat *kanonikus bázisvektoroknak* nevezzük. Bármely $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ vektor esetén

$$x = \sum_{i=1}^p x_i e_i.$$

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ vektor *hosszát* vagy *euklideszi normáját* a

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^p x_i^2 \right)^{1/2}$$

képlettel definiáljuk.

Az x és $y \in \mathbb{R}^p$ pontok egymástól való *euklideszi távolsága*

$$\rho_p(x, y) = \|x - y\|.$$

3.2. Ponsorozat konvergenciája

3.2.1. Definíció. Legyen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ adott \mathbb{R}^p -beli sorozat. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ ponsorozat az $a \in \mathbb{R}^p$ *limeszponthoz* tart, ha $\|a_n - a\| \rightarrow 0$, ha $n \rightarrow \infty$. A jelölés a szokásos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{illetve} \quad a_n \rightarrow a.$$

Az $\{a_n\}$ ponsorozat *konvergens*, ha van limeszpontja, különben *divergens*.

A következő egyszerű tétel a ponsorozatok konvergenciáját visszavezeti valós számsorozatok konvergenciájára.

3.2.2. Tétel. Legyen $a_n = (a_{n1}, \dots, a_{np})^T$, $n \in \mathbb{N}$, és $a = (a_1, \dots, a_p)^T \in \mathbb{R}^p$. Az

$$a_n \rightarrow a$$

limeszreláció pontosan akkor teljesül, ha minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén

$$a_{ni} \rightarrow a_i.$$

3.3. Környezetek, pontozott környezetek

3.3.1. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^p$ és $\epsilon > 0$. Az a pont ϵ sugarú környezetén a

$$K_\epsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x - a\| < \epsilon\}$$

halmazt értjük. A

$$P_\epsilon(a) = K_\epsilon(a) \setminus \{a\}$$

halmazt a pont ϵ sugarú *pontozott környezetének* mondjuk.

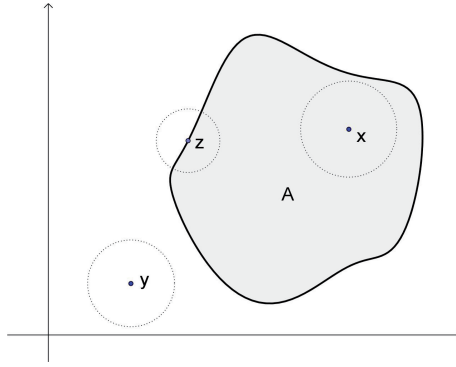
A $p = 1$ esetben $K_\epsilon(a)$ átmegy az $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ intervallumba, $p = 2$ esetén az $a \in \mathbb{R}^2$ középpontú ϵ sugarú körbe (a körvonal nélkül), $p = 3$ esetén pedig az $a \in \mathbb{R}^3$ középpontú ϵ sugarú gömbbe (a gömbfelület nélkül).

3.4. Nyílt, zárt és korlátos ponthalmazok

A következő definíció egy $x \in \mathbb{R}^p$ pontnak egy $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazhoz viszonyított helyzetét osztályozza.

3.4.1. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}^p$ és $A \subset \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy x *belső pontja* A -nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy $K_\epsilon(x) \subset A$; x *külső pontja* A -nak, ha van olyan $\epsilon > 0$, hogy $A \cap K_\epsilon(x) = \emptyset$; x *határpontja* A -nak, ha minden $\epsilon > 0$ -ra $K_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \neq K_\epsilon(x) \setminus A$.

A következő ábrán látható $A \subset \mathbb{R}^2$ halmaznak x belső pontja, y külső pontja, z pedig határpontja.



3.1. ábra.

3.4.2. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazt *nyílt*nak mondjuk, ha minden $x \in A$ pont belső pontja A -nak, és *zárt*nak, ha az $\mathbb{R}^p \setminus A$ ponthalmaz nyílt.

Az $A \subset \mathbb{R}^p$ halmaz összes belső pontjából álló halmazt A *belsejének* nevezzük és $\text{int } A$ -val jelöljük. Az A halmaz határpontjaiból álló halmaz neve A *határa*.

Az $\text{int } A$ jelölés az „interior” latin szóból ered, amelynek jelentése „belső”.

Egy ponthalmaz zártságának ellenőrzésére gyakran jól használható a következő tétel:

3.4.3. Tétel. Egy $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmaz akkor és csak akkor zárt, ha bármely A -beli konvergens pontsorozat limeszpontja eleme A -nak, azaz ha $a_n \in A$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re és valamely $a \in \mathbb{R}^p$ esetén $a_n \rightarrow a$, akkor $a \in A$.

3.4.4. Példa. Ha $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, f, g pedig az $[\alpha, \beta]$ intervallumon folytonos valós függvények, amelyekre $g \leq f$ az $[\alpha, \beta]$ -n, akkor az

$$A = \{ (x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x \leq \beta, g(x) \leq y \leq f(x) \} \subset \mathbb{R}^2$$

halmaz zárt. Valóban, ha $(x_n, y_n)^T \in A$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, azaz

$$\alpha \leq x_n \leq \beta, \quad g(x_n) \leq y_n \leq f(x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

és valamely $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ estén $(x_n, y_n)^T \rightarrow (x, y)^T$, akkor $x_n \rightarrow x$ és $y_n \rightarrow y$, és felhasználva f és g folytonosságát az előző egyenlőtlenségrendszerből határátmenet után azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad g(x) \leq y \leq f(x).$$

Tehát $(x, y)^T \in A$.

3.4.5. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^p$ ponthalmazt *korlátosnak* nevezzük, ha létezik $r \in (0, \infty)$ úgy, hogy $A \subset K_r(0)$.

3.4.6. Definíció. Az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ \mathbb{R}^p -beli pontsorozat *korlátos*, ha az $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos.

A számsorozatok elméletéből ismert kiválasztási tétel átvihető pontsorozatokra is.

3.4.7. Tétel (Bolzano–Weierstrass-tétel). \mathbb{R}^p -ben minden korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata.

3.5. Többváltozós függvények

3.5.1. Definíció. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$. Az f függvény \mathbb{R}^q -ba vezető p változós, ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, azaz $D(f) \subset \mathbb{R}^p$. Ha $q > 1$, akkor f -et *vektorfüggvénynek*, $q = 1$ esetén pedig *valós függvénynek* nevezzük.

Rögzített $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén minden $x \in D(f)$ -hez rendeljük hozzá az $f(x) \in \mathbb{R}^q$ képpont k -adik koordinátáját. Így egy $f_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ p változós valós függvény keletkezik, amelyet f k -adik *koordinátafüggvényének* nevezzük.

A koordinátafüggvények ismeretében f egyértelműen meg van határozva, hiszen

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T, \quad \text{ha } x \in D(f).$$

Az $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ típusú többváltozós függvények fontos osztályát a lineáris leképezések alkotják. Az $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ leképezés *lineáris*, ha $D(L) = \mathbb{R}^p$, továbbá minden $x, y \in \mathbb{R}^p$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} L(x + y) &= L(x) + L(y), \\ L(\lambda x) &= \lambda L(x). \end{aligned}$$

A lineáris algebrából ismert, hogy bármely $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés az

$$L(x) = M_L \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

alakban írható, ahol M_L $q \times p$ típusú valós mátrix. Az M_L mátrixot az L leképezés (kanonikus bázisokra vonatkozó) *mátrixának* nevezzük.

3.6. Határérték és folytonosság

Az egyváltozós valós függvények határértékének és folytonosságának definícióját lemásolva kapjuk a többváltozós függvények határértékének, illetve folytonosságának definícióját.

3.6.1. Definíció. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$. Azt mondjuk, hogy a $b \in \mathbb{R}^q$ pont az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény *határértéke* az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, ha f értelmezve van a valamely pontozott környezetében, és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata b -hez tart. Jelölés: $f(x) \rightarrow b$, ha $x \rightarrow b$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

3.6.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény folytonos az $a \in D(f)$ pontban, ha

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

azaz ha f értelmezve van a valamely környezetében, és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$ és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozata $f(a)$ -hoz tart.

Most a folytonosnál általánosabb, az értelmezési tartomány valamely részhalmazára szorítkozva vett folytonosság fogalmát definiáljuk.

3.6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, és $a \in A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f A -ra szorítkozva folytonos az a pontban, ha bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in A$ és $x_n \rightarrow a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata $f(a)$ -hoz tart.

Ha f egyváltozós valós függvény ($p = q = 1$) és valamely $a \in D(f)$ és $\delta > 0$ esetén $[a, a + \delta) \subset D(f)$ ($(a - \delta, a] \subset D(f)$), akkor f -nek az $[a, a + \delta)$ ($(a - \delta, a]$) halmazra szorítkozva vett folytonossága azt jelenti, hogy f az a helyen jobbról (balról) folytonos.

A következő tétel azt mutatja, hogy egy vektorfüggvény határértékének és folytonosságának vizsgálata során elegendő a koordinátafüggvényeire szorítkozni.

3.6.4. Tétel. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ adott függvény, $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in A \subset D(f)$ és $b = (b_1, \dots, b_q)^T \in \mathbb{R}^q$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

pontosan akkor, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k.$$

Az f függvény éppen akkor folytonos (A -ra szorítkozva) az a pontban, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén f_k (A -ra szorítkozva) folytonos az a helyen.

Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ és $x = (x_1, \dots, x_p)^T \in D(f)$, akkor

$$f((x_1, \dots, x_p)^T)$$

helyett a kényelmesebb

$$f(x_1, \dots, x_p)$$

jelölést fogjuk használni. Igazodva az általános szokáshoz az $(x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$ jelölést is úgy „egyszerűsítjük”, hogy a transzponálásra utaló T felső indexet elhagyjuk, azaz oszlopvektor helyett sorvektort írunk. Ugyanakkor hangsúlyozzuk, hogy ha valamely \mathbb{R}^p -beli vektor mátrix szorzat tényezőjeként szerepel, akkor mindig oszlopvektorként kell értenünk.

3.6.5. Példa. Az

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

függvénynek a $(0, 0)$ pontban nem létezik határértéke, mert ha olyan (x_n, y_n) pontsorozatot tekintünk, amelynek tagjai mind az $y = x$ egyenesen fekszenek és a $(0, 0)$ ponthoz tartanak, akkor $0 \neq x_n$ esetén

$$f(x_n, x_n) = \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_n^2} = \frac{1}{2},$$

ugyanakkor az x -tengely mentén $y_n = 0$ folytán

$$f(x_n, 0) = 0$$

adódik.

3.6.6. Példa. Az

$$f(x, y) = \sin(2x + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

függvény folytonos minden $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pontban, mert bármely (a, b) -hez tartó (x_n, y_n) sorozatra $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow b$, és ezért

$$f(x_n, y_n) = \sin(2x_n + y_n^2) \rightarrow \sin(2a + b^2) = f(a, b).$$

Az egyváltozós valós függvények határértékéről és folytonosságáról szóló tételek többsége átvihető többváltozós valós függvényekre is. Így például, ha $f, g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosak az $a \in \mathbb{R}^p$ pontban, akkor ugyanilyen $f + g$, fg is, és $g(a) \neq 0$ esetén ugyanilyen $\frac{f}{g}$ is.

Az egyváltozós valós függvények intervallumon való folytonosságának definíciója speciális esete a következő fogalomnak.

3.6.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ és $A \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy f folytonos az A halmazon, ha f minden $a \in A$ pontban A -ra szorítkozva folytonos.

Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ és $U \subset D(f)$ nyílt halmaz, akkor f pontosan akkor folytonos az U halmazon, ha folytonos U minden pontjában.

3.7. Differenciálhatóság

Az egyváltozós valós függvények elméletéből ismert differenciálhatóság fogalmának kiterjesztése többváltozós függvényekre a következő:

3.7.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvényt (totálisan) differenciálhatónak mondjuk az $a \in D(f)$ pontban, ha létezik egy $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés úgy, hogy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

Az L lineáris leképezést az f függvény a pontbeli differenciáljának, az L leképezés M_L mátrixát pedig f a -beli differenciálhányadosának vagy Jacobi-mátrixának nevezzük. Jelölés: $L = Df(a)$, illetve $M_L = f'(a)$.

Valós f esetén ($q = 1$) az $f'(a)$ Jacobi-mátrix $1 \times p$ típusú, azaz p dimenziós sorvektor. Ebben az esetben az a pontbeli Jacobi-mátrix helyett az a pontbeli *gradiens* vagy *gradiensvektor* elnevezés és az $f'(a) = \text{grad } f(a)$ jelölés is használatos.

Meg lehet mutatni, hogy ha létezik, akkor a differenciál egyértelmű.

3.7.2. Tétel. Bármely $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvénynek egy adott $a \in D(f)$ pontban legfeljebb egy differenciálja létezik.

Egy vektorfüggvény differenciálhatósága ekvivalens a koordinátafüggvényeinek differenciálhatóságával.

3.7.3. Tétel. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ adott függvény, $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in D(f)$. Az f függvény éppen akkor differenciálható az a pontban, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén az $f_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható az a pontban, és differenciálhatóság esetén az $f'(a)$ Jacobi-mátrix k -adik sorvektora $f'_k(a)$, $k \in \{1, \dots, q\}$.

A differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolat hasonló, mint az egyváltozós valós függvényeknél.

3.7.4. Tétel. Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban, akkor itt folytonos is.

Arra, hogy a fordított állítás nem igaz már az egyváltozós valós függvényeknél is utaltunk.

3.8. Az irány menti derivált, parciális deriváltak

Ha $a, v \in \mathbb{R}^p$, akkor az a ponton áthaladó v irányvektorú egyenes pontjai az

$$x = a + tv$$

alakban írhatók, ahol $t \in \mathbb{R}$. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $t > 0$ és tegyük fel, hogy $v \in \mathbb{R}^p$ egységvektor, azaz $\|v\| = 1$. Tekintsük f értékét abban a pontban, amely a -tól t távolságra fekszik a v által megadott irányban, vagyis az $a + tv$ pontban. Ennek és $f(a)$ -nak a különbségét a két pont t távolságával osztva az

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

v irány menti különbségi hányados keletkezik.

3.8.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in D(f)$ és $v \in \mathbb{R}^p$ adott egységvektor. Azt mondjuk, hogy f differenciálható az a pontban a v irány mentén, ha a

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

határérték létezik (\mathbb{R}^q -ban). Ezt a határértéket (ha létezik) a $\partial_{(v)}f(a)$ vagy $D_{(v)}f(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a -beli v irány menti differenciálhányadosának nevezük.

A definícióból következik:

3.8.2. Tétel. Legyen $p, q \in \mathbb{N}^+$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény, $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T,$$

továbbá $a \in D(f)$ és $v \in \mathbb{R}^p$ egy adott egységvektor. Az f függvény éppen akkor differenciálható az a pontban a v irány mentén, ha minden $k \in \{1, \dots, q\}$ esetén f_k differenciálható a v irány mentén, és differenciálhatóság esetén

$$\partial_{(v)}f(a) = (\partial_{(v)}f_1(a), \dots, \partial_{(v)}f_q(a))^T.$$

Abban a speciális esetben, amikor v megegyezik a kanonikus bázisvektorok valamelyikével az irány menti differenciálhányadost parciális differenciálhányadosnak nevezzük. Részletesebben:

3.8.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $a \in D(f)$, $i \in \{1, \dots, p\}$ és $e_i \in \mathbb{R}^p$ az i -edik kanonikus bázisvektor. Azt mondjuk, hogy f *parciálisan differenciálható az a pontban az i -edik változó szerint*, ha f differenciálható a -ban az e_i irány mentén. A $\partial_{(e_i)}f(a) \in \mathbb{R}^q$ irány menti differenciálhányadost (ha létezik) az f *függvény a -beli i -edik változó szerinti parciális differenciálhányadosának* nevezzük.

3.8.4. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény és $i \in \{1, \dots, p\}$. Jelöljük $\partial_i f$ -fel azt a függvényt, amelynek értelmezési tartománya $D(f)$ azon x pontjaiból áll, amelyekben f az i -edik változó szerint parciálisan differenciálható, és értéke minden ilyen x pontban f -nek az i -edik változó szerinti parciális differenciálhányadosa. A $\partial_i f$ függvényt az f függvény *i -edik változó szerinti parciális deriváltfüggvényének* vagy röviden *parciális deriváltjának* nevezzük.

Ha az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény i -edik változóját x_i -vel jelöljük, akkor az i -edik változó szerinti parciális deriváltat a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}, \quad \text{vagy} \quad f_{x_i}$$

szimólumokkal is jelölhetjük.

Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ p változós valós függvény, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ és $i \in \{1, \dots, p\}$. Defináljuk a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a

$$h(s) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_p)$$

képlettel minden olyan $s \in \mathbb{R}$ -re, amelyre $(a_1, \dots, a_{i-1}, s, a_{i+1}, \dots, a_p) \in D(f)$. Könnyű belátni, hogy f pontosan akkor differenciálható a -ban az i -edik változó szerint, ha h differenciálható az $a_i \in \mathbb{R}$ helyen, és ekkor

$$\partial_i f(a) = h'(a_i).$$

Ezért a parciális deriváltak kiszámításához használhatjuk az egyváltozós valós függvények differenciálási szabályait. A kétváltozós esetben ($p = 2$) a fenti h függvényt a következő ábrák szemléltetik:

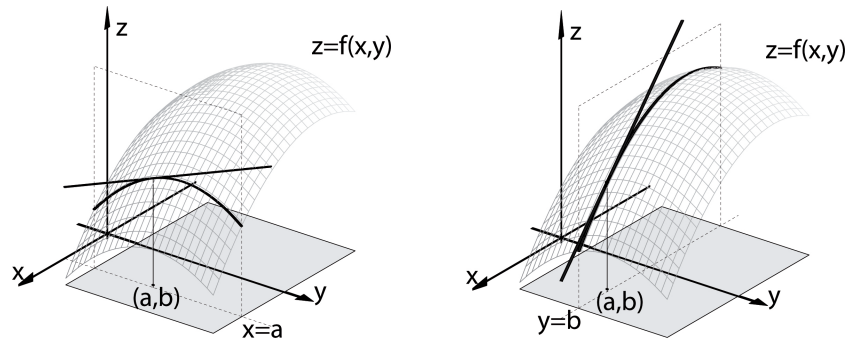
3.8.5. Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } y \in \mathbb{R}.$$

Ekkor minden $x \in (0, \infty)$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x.$$

A differenciálhatóság és az irány menti derivált közötti kapcsolatról szól a következő:



3.2. ábra.

3.8.6. Tétel. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban. Ekkor bármely $v \in \mathbb{R}^p$ egységvektor esetén a $\partial_{(v)}f(a)$ irány menti derivált létezik, mégpedig

$$\partial_{(v)}f(a) = f'(a) \cdot v.$$

Speciálisan, minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén f az a pontban parciálisan differenciálható az i -edik változó szerint, és

$$\partial_i f(a) = f'(a) \cdot e_i,$$

az $f'(a)$ Jacobi-mátrix i -edik oszlopvektora.

Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ egy adott függvény, és $x \in D(f)$ esetén

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T.$$

Ha f differenciálható az $a \in D(f)$ pontban, akkor a 3.8.2. és 3.8.6. Tétel szerint

$$f'(a) = \left(\partial_j f_i(a) \right)_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, p}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \dots & \partial_p f_2(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 f_q(a) & \dots & \partial_p f_q(a) \end{pmatrix}.$$

3.8.7. Példa. Definiáljuk az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0, \\ 1, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } y \neq 0 \end{cases}$$

képlettel. Könnyű belátni, hogy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

de f nem folytonos a $(0, 0)$ pontban. Ezért a 3.7.4. Tétel szerint f nem differenciálható a $(0, 0)$ pontban.

Az előző példa azt mutatja, hogy a parciális deriváltak létezéséből még nem következik a függvény differenciálhatósága, sőt folytonossága sem. Ugyanakkor a következő tétel alapján a parciális deriváltak folytonossága, már maga után vonja a differenciálhatóságot.

3.8.8. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ és $a \in D(f)$. Ha minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén a $\partial_i f$ parciális derivált folytonos az a pontban, akkor f differenciálható a -ban.

3.8.9. Példa. Legyen

$$f(x, y) = \sin(2x + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bármely $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cos(2x + y^2) \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(2x + y^2).$$

A 3.6.6. Példában már beláttuk f folytonosságát. Hasonló módon ellenőrizhető, hogy a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ függvények is folytonosak \mathbb{R}^2 minden pontjában. Ezért f differenciálható minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, és

$$f'(x, y) = (2 \cos(2x + y^2), 2y \cos(2x + y^2)).$$

Az f függvény $a = (0, 0)$ pontbeli $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ irány menti deriváltja

$$\partial_{(v)} f(a) = f'(a) \cdot v = (2, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Megjegyezzük, hogy egy kétváltozós valós f függvény differenciálhatósága egy $(a, b) \in D(f)$ pontban geometriailag azt jelenti, hogy a $z = f(x, y)$ felülethez annak $(a, b, f(a, b))$ pontjában érintősík illeszthető.

3.8.10. Definíció. Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható az $(a, b) \in D(f)$ pontban. Ekkor a

$$z = \partial_1 f(a, b)(x - a) + \partial_2 f(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

egyenletű síkot az f függvény (a, b) ponthoz tartozó érintősíkjának nevezzük.

3.9. A láncszabály

Az összetett függvény differenciálási szabálya vektorfüggvényekre a következő:

3.9.1. Tétel (Láncszabály). Legyen $p, q, r \in \mathbb{N}^+$. Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in D(f)$ pontban és $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ differenciálható az $f(a)$ pontban, akkor $g \circ f$ is differenciálható az a pontban, és

$$D(g \circ f) = Dg(f(a)) \circ Df(a),$$

továbbá

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a),$$

ahol \cdot a mátrix szorzást jelöli, azaz minden $i \in \{1, \dots, p\}$ és $k \in \{1, \dots, r\}$ esetén

$$\partial_i(g_k \circ f)(a) = \sum_{j=1}^q \partial_j g_k(f(a)) \partial_i f_j(a),$$

ahol a g_k -k és f_j -k a g , illetve f vektorfüggvény koordinátafüggvényei.

3.10. Közéértéktétel

Legyen $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \neq b$. Ekkor az a és b pontokat összekötő zárt szakasz pontjai $a + t(b - a)$ alakban írhatók, ahol $t \in [0, 1]$.

3.10.1. Definíció. Bármely $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \neq b$, esetén legyen

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\},$$

és

$$(a, b) = \{a + t(b - a) \mid t \in (0, 1)\}.$$

A következő tétel Lagrange tételének általánosítása többváltozós valós függvényekre.

3.10.2. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}^p$, $a \neq b$. Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható minden $x \in (a, b)$ pontban, akkor létezik $c \in (a, b)$ úgy, hogy

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = \sum_{i=1}^p \partial_i f(c)(b_i - a_i).$$

3.11. Schwarz tétele

3.11.1. Definíció. Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ és valamely $i, j \in \{1, \dots, p\}$ és $a \in D(f)$ esetén a

$$\partial_j(\partial_i f)(a)$$

parciális differenciálhányados létezik, akkor azt a

$$\partial_{ij} f(a)$$

szimbólummal jelöljük. A $\partial_{ij} f$ függvények f másodrendű parciális deriváltjai.

Ha az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény változóit rendre az x_1, \dots, x_p betűkkel jelöljük, akkor $\partial_{ij} f(a)$ helyett a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a), \quad f''_{x_i x_j}(a), \quad \text{illetve} \quad f_{x_i x_j}(a)$$

jelölés is használatos. Figyeljük meg, hogy a deriválások sorrendje az indexes jelölésmód esetén balról jobbra, a tört alakú jelölésmód esetén pedig jobbról balra halad. Ha $i = j$, akkor $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ helyett a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ jelölés használatos.

A $\partial_{ii}f$ alakúakat *tiszta*, a $\partial_{ij}f$ ($i \neq j$) alakúakat pedig *vegyes* másodrendű parciális deriváltaknak szokás nevezni.

Az előző definícióhoz hasonlóan „rekurzióval” definiálhatók a harmadrendű, negyedrendű stb. parciális deriváltak. Az $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvény $\partial_i f$ ($i \in \{1, \dots, p\}$) parciális deriváltjait *elsőrendű parciális deriváltaknak* mondjuk, ha szükség van megkülönböztetésükre a magasabb rendűektől.

A következő tétel azt mutatja, hogy bizonyos feltételek mellett a vegyes parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje felcserélhető.

3.11.2. Tétel (Schwarz tétele). Legyen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Tegyük fel, hogy a $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ függvények definiálva vannak az $(a, b) \in D(f)$ pont valamely környezetében és a $\partial_{12} f$ függvény folytonos az (a, b) pontban. Ekkor $\partial_{21} f(a, b)$ létezik, és

$$\partial_{21} f(a, b) = \partial_{12} f(a, b).$$

3.12. Abszolút és lokális szélsőérték helyek

Az egyváltozós valós függvények esetéhez hasonlóan bevezetjük a következő elnevezéseket:

3.12.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in H \subset D(f)$. Azt mondjuk, hogy az a pont f -nek H -ra nézve *abszolút maximumhelye* (*abszolút minimumhelye*), ha minden $x \in H$ esetén

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Az abszolút maximumhely és abszolút minimumhely helyett a *globális maximumhely*, illetve *globális minimumhely* elnevezés is használatos.

A következő tétel Weierstrass tételének kiterjesztése többváltozós függvényekre.

3.12.2. Tétel. Legyen H nemüres, korlátos és zárt részhalmaza \mathbb{R}^p -nek. Ha $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos a H halmazon, akkor f -nek H -ra nézve létezik abszolút maximumhelye és abszolút minimumhelye is.

Most a lokális szélsőérték helyeket definiáljuk.

3.12.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \in D(f)$ pont az f függvény *lokális maximumhelye* (*lokális minimumhelye*), ha létezik $\delta > 0$ úgy, hogy $K_\delta(a) \subset D(f)$, és minden $x \in K_\delta(a)$, $x \neq a$, esetén

$$f(x) \leq f(a) \quad (f(x) \geq f(a)).$$

Ha a \leq (\geq) egyenlőtlenséget $<$ -re ($>$ -ra) cseréljük, akkor a *szigorú lokális maximumhely* (*szigorú lokális minimumhely*) definícióját kapjuk.

Lokális szélsőérték hely létezésére ad szükséges feltételt a következő:

3.12.4. Tétel. Legyen $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } D(f)$. Tegyük fel, hogy a az f függvény lokális maximumhelye vagy minimumhelye. Ha valamely $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a)$ létezik, akkor $\partial_i f(a) = 0$. Speciálisan, ha f differenciálható az a pontban, akkor minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a) = 0$.

A tétel megfordítása nem igaz, amint erre már az egyváltozós valós függvényeknél is utaltunk.

3.12.5. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Az $a \in D(f)$ pontot f kritikus (stacionárius) pontjának mondjuk, ha $a \in \text{int } D(f)$ és minden $i \in \{1, \dots, p\}$ esetén $\partial_i f(a) = 0$.

Az előző tétel szerint egy differenciálható függvénynek csak kritikus pont lehet lokális szélsőérték helye.

3.12.6. Példa. Az

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x + y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

függvénynek nincsen maximumhelye, mert minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 + 1) > 0.$$

Most keressük f maximumát a

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

halmazra nézve. Mivel H korlátos és zárt, f pedig folytonos H -n, ezért f -nek H -ra nézve létezik maximumhelye. A

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 + 1) > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

egyenlőtlenségből következik, hogy minden rögzített $y \in [0, 1]$ esetén a $h(x) = f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, függvény szigorúan monoton növekedő. Ezért

$$\max_{(x,y) \in H} f(x, y) = \max_{x \in [0,1]} f(x, 1 - x).$$

Mivel minden $x \in [0, 1]$ esetén

$$\frac{d}{dx}(f(x, 1 - x)) = 6x^2 - 6x + 5 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0,$$

ezért

$$\max_{(x,y) \in H} f(x, y) = f(1, 0) = 4.$$

A következő tétel elegendő feltételt ad arra, hogy egy kétváltozós valós függvénynek egy adott kritikus pontban lokális szélsőértéke legyen.

3.12.7. Tétel. *Legyen adva egy $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $(a, b) \in \text{int } D(f)$. Tegyük fel, hogy f másodrendű parciális deriváltjai folytonosak az (a, b) pontban, továbbá*

$$\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0.$$

Ha

$$\partial_{11} f(a, b) \partial_{22} f(a, b) - [\partial_{12} f(a, b)]^2 > 0,$$

akkor (a, b) f -nek lokális szélsőértékhelye, mégpedig ha

$$\partial_{11} f(a, b) > 0,$$

akkor lokális minimumhelye, ha pedig

$$\partial_{11} f(a, b) < 0,$$

akkor lokális maximumhelye.

Ha

$$\partial_{11} f(a, b) \partial_{22} f(a, b) - [\partial_{12} f(a, b)]^2 < 0,$$

akkor (a, b) f -nek nem lokális szélsőértékhelye.

3.12.8. Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad \text{ha } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ekkor minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f -nek két kritikus pontja van, $(0, 0)$ és $(1, 1)$. A

$$\partial_{11} f(x, y) = 6x, \quad \partial_{22} f(x, y) = 6y, \quad \partial_{12} f(x, y) = -3, \quad \partial_{21} f(x, y) = -3$$

másodrendű parciális deriváltak folytonosak. Mivel

$$\partial_{11} f(0, 0) \partial_{22} f(0, 0) - [\partial_{12} f(0, 0)]^2 = -9 < 0,$$

ezért a $(0, 0)$ pont nem lokális szélsőértékhely. Ugyanakkor

$$\partial_{11} f(1, 1) \partial_{22} f(1, 1) - [\partial_{12} f(1, 1)]^2 = 27 > 0 \quad \text{és} \quad \partial_{11} f(1, 1) = 6 > 0$$

folytán az $(1, 1)$ pont f lokális minimumhelye.

4. fejezet

Területi integrál

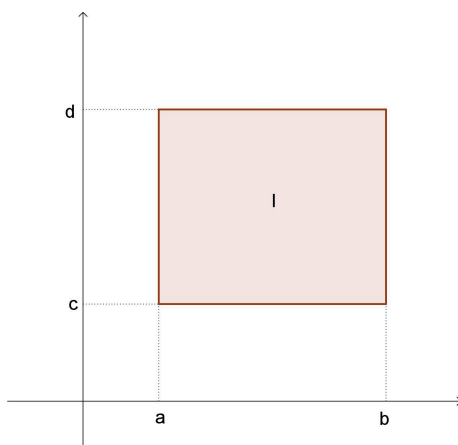
4.1. A terület fogalma

Definiálni szeretnénk síkidomok, azaz \mathbb{R}^2 részhalmazainak a területét. A terület fogalmát a téglalapok területére fogjuk visszavezetni. Ezt a célt szolgálják a következő definíciók.

4.1.1. Definíció. Legyen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$. Az

$$I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

halmazt (kétdimenziós) intervallumnak nevezzük (lásd a 4.1. ábra).



4.1. ábra.

Az I intervallum *területe*:

$$t(I) = (b - a)(d - c).$$

4.1.2. Definíció. A H_1, \dots, H_n halmazokat, ahol $n \in \mathbb{N}^+$ és $H_i \subset \mathbb{R}^2$ ($i \in \{1, \dots, n\}$), egymásba nem nyúlóknak mondjuk, ha bármely $i \neq j$ esetén

$$\text{int } H_i \cap \text{int } H_j = \emptyset,$$

azaz H_i -nek és H_j -nek nincs közös belső pontja.

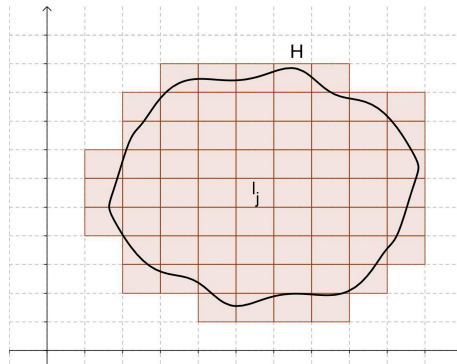
Most már definiálhatjuk egy korlátos síkbeli halmaz külső és belső területét.

4.1.3. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Legyen $k(H)$ az összes olyan

$$\sum_{j=1}^n t(I_j)$$

alakú összegből álló számhalmaz infimuma (alsó határa), ahol $n \in \mathbb{N}^+$, az $I_j \subset \mathbb{R}^2$ halmazok pedig intervallumok ($j = 1, \dots, n$), amelyek befedik H -t (lásd a következő ábra), azaz

$$H \subset \bigcup_{j=1}^n I_j.$$



4.2. ábra.

A $k(H)$ számot a H halmaz *külső területének* nevezzük.

A H halmaz *belső területe*, jelben $b(H)$, az összes olyan

$$\sum_{j=1}^n t(I_j)$$

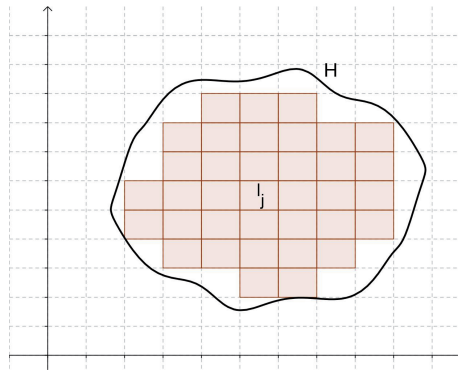
alakú összegből álló számhalmaz szuprémuma (alsó határa), ahol $n \in \mathbb{N}^+$, az $I_j \subset \mathbb{R}^2$ halmazok pedig egymásba nem nyúló intervallumok, amelyekre $I_j \subset H$ ($j = 1, \dots, n$) (lásd a következő ábra), feltéve, hogy H tartalmaz egyáltalán intervallumot. Ha H egyetlen intervallumot sem tartalmaz, legyen $b(H) = 0$.

Nyilvánvaló, hogy az imént definiált $b(H)$ és $k(H)$ számok alsó, illetve felső becslést adnak a H halmaz általunk definiálni kívánt területére. A H halmaz korlátosságát azért kell feltennünk, hogy be lehessen fedni véges számú intervallummal. Ezek után kézenfekvő a következő:

4.1.4. Definíció. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *mérhetőnek* mondjuk, ha H korlátos és $b(H) = k(H)$. Ha H mérhető, akkor H területén a

$$t(H) = b(H) = k(H)$$

számot értjük.



4.3. ábra.

A területnek ez a fogalma Jordan francia matematikustól származik. A terület fontosabb tulajdonságait foglalják össze a következő tételek.

4.1.5. Tétel. Ha H_1 és H_2 mérhető, akkor $H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2$, $H_1 \setminus H_2$ is mérhető.

4.1.6. Tétel. Ha a H_1, \dots, H_n halmazok mérhető és egymásba nem nyúlók, továbbá

$$H = \bigcup_{j=1}^n H_j,$$

akkor H is mérhető, és

$$t(H) = \sum_{j=1}^n t(H_j).$$

4.1.7. Tétel. Egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazra a következő állítások egyenértékűek:

(i) $t(H) = 0$,

(ii) $k(H) = 0$,

(iii) bármely $\epsilon > 0$ esetén léteznek I_1, \dots, I_n intervallumok úgy, hogy

$$H \subset \bigcup_{j=1}^n I_j \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^n t(I_j) < \epsilon.$$

4.1.8. Tétel. A $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha korlátos és határa nulla területű.

A síkban bevezetett területfogalom mintájára bevezethetnénk a háromdimenziós térben vagy általánosabban az \mathbb{R}^p térben a *Jordan-féle térfogat* fogalmát. Nyilvánvaló, hogy \mathbb{R}^p -ben a p -dimenziós

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \cdots \times [a_p, b_p]$$

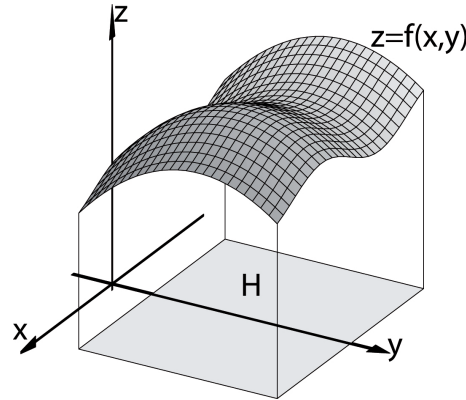
intervallumok

$$t(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_p - a_p)$$

térfogatából kellene kiindulnunk.

4.2. A területi integrál fogalma

Legyen adva egy mérhető és zárt $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz és egy H -n folytonos nemnegatív $f : H \rightarrow [0, \infty)$ függvény. Kiszámítandó annak a testnek a V térfogata, amelyet felülről a $z = f(x, y)$ felületnek H feletti része, alulról pedig az xy -síkbeli H halmaz határol (lásd a 4.4. ábra).



4.4. ábra.

Az egyváltozós Riemann-integrál mintájára az alábbi fogalmak segítségével alsó és felső becslést adhatunk a kiszámítandó test térfogatára.

4.2.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A H halmaz Φ felosztásán olyan egymásba nem nyúló, nemüres mérhető H_1, \dots, H_n halmazok (véges) sorozatát értjük, amelyekre

$$\bigcup_{j=1}^n H_j = H.$$

Jelölés: $\Phi = \{H_1, \dots, H_n\}$.

4.2.2. Definíció. Legyen adva egy $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmaz és egy f korlátos valós függvény a H halmazon. Ha $\Phi = \{H_1, \dots, H_n\}$ a H halmaz egy felosztása, akkor f korlátossága miatt minden $i \in \{1, \dots, n\}$ esetén az

$$m_i = \inf f(H_i), \quad M_i = \sup f(H_i)$$

számok végesek. Az

$$s_\Phi = \sum_{i=1}^n m_i t(H_i)$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó (Darboux-féle) alsó összegének, a

$$S_\Phi = \sum_{i=1}^n M_i t(H_i)$$

összeget pedig az f függvény Φ felosztáshoz tartozó (Darboux-féle) felső összegének nevezük.

Nyilvánvaló, hogy ha f korlátos a mérhető H halmazon, akkor H bármely Φ felosztására

$$t(H) \inf f(H) \leq s_\Phi \leq S_\Phi \leq t(H) \sup f(H).$$

4.2.3. Definíció. Bármely a $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazon definiált korlátos f függvény esetén legyen

$$I_A = \sup \{ s_\Phi \mid \Phi \text{ a } H \text{ halmaz felosztása,} \}$$

és

$$I_F = \inf \{ S_\Phi \mid \Phi \text{ az } H \text{ halmaz felosztása} \}.$$

Az I_A számot f H -n vett (*Darboux-féle*) alsó integráljának, az I_F számot pedig f H -n vett (*Darboux-féle*) felső integráljának nevezzük.

Ha V annak a testnek a térfogata, amelyre a szakasz elején utaltunk, akkor H bármely Φ felosztására

$$s_\Phi \leq V \leq S_\Phi,$$

és ezért

$$I_A \leq V \leq I_F.$$

4.2.4. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A H -n definiált f függvényt *integrálhatónak* mondjuk, ha f korlátos és $I_A = I_F$. Ha f integrálható H -n, akkor az

$$I = I_A = I_F$$

közös értéket f H -n vett (*Riemann-féle*) területi integráljának nevezzük. Jele:

$$I = \iint_H f(x, y) dx dy \quad \text{vagy csak} \quad \iint_H f.$$

4.3. A területi integrál tulajdonságai

4.3.1. Tétel (Egzisztencia tétel). Ha $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és zárt, f pedig folytonos H -n, akkor f integrálható is.

A tételből és a 4.2.4. Definíció előtti megjegyzésből adódik a területi integrál geometriai jelentése: ha $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és zárt, f pedig egy a H -n folytonos nemnegatív függvény, akkor $\iint_H f$ annak a testnek a térfogata, amelyet felülről a $z = f(x, y)$ felület H feletti része alulról pedig az xy -síkbeli H halmaz határol.

A területi integrál fontosabb tulajdonságait írják le a következő tételek.

4.3.2. Tétel. Ha f integrálható a mérhető H -n, és $G \subset H$ mérhető, akkor f integrálható G -n is.

4.3.3. Tétel. Ha f integrálható az egymásba nem nyúló, mérhető H_i ($i = 1, \dots, n$) halmazok mindegyikén, akkor integrálható a

$$H = \bigcup_{i=1}^n H_i$$

halmazon is, és

$$\iint_H f = \sum_{i=1}^n \iint_{H_i} f.$$

4.3.4. Tétel. Ha f és g integrálható a mérhető H halmazon, $c \in \mathbb{R}$, akkor cf és $f + g$ is integrálható H -n, és

$$\begin{aligned} \iint_H (cf) &= c \iint_H f, \\ \iint_H (f + g) &= \iint_H f + \iint_H g. \end{aligned}$$

4.3.5. Tétel. Ha f és g integrálható a mérhető H halmazon, és $f \leq g$ H -n, akkor

$$\iint_H f \leq \iint_H g.$$

4.3.6. Tétel. Ha f integrálható a mérhető H halmazon, akkor $|f|$ is integrálható H -n, és

$$\left| \iint_H f \right| \leq \iint_H |f|.$$

4.4. A területi integrál kiszámítása

Most olyan tételeket ismertetünk, amelyek lehetővé teszik a területi integrál kiszámítását egyváltozós Riemann-integrálokkal. Először nézzük az intervallumon való integrálást.

4.4.1. Tétel. Legyen f integrálható az

$$I = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$$

intervallumon, és tegyük fel, hogy minden $x \in [a, b]$ esetén létezik az (x -től függő)

$$g(x) = \int_a^b f(x, y) dy$$

integrál. Ekkor g integrálható $[a, b]$ -n, és

$$\iint_I f = \int_a^b g(x) dx,$$

avagy

$$\iint_I f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

A 4.4.1. Tétel feltételei teljesülnek, ha például f folytonos az I intervallumon.

Természetesen x és y szerepe felcserélhető, azaz ha f integrálható I -n, és minden rögzített $y \in [c, d]$ esetén létezik a

$$h(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

integrál, akkor h interálható $[c, d]$ -n, és

$$\iint_I f = \int_c^d h(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

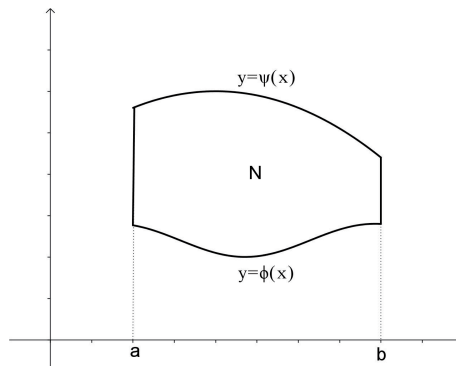
Az utolsó „kétszeres integrálnál” a zárójelet néha el is szokták hagyni. Hangsúlyozzuk, hogy ilyenkor az integrálás mindig belülről halad kifelé.

A területi integrálnak kétszeres integrállá való átalakítása alkalmazható az intervallumoknál általánosabb síkidomokon is. Vezessük be a következő elnevezést:

4.4.2. Definíció. Legyen ϕ és ψ az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon definiált folytonos valós függvény, és $\phi \leq \psi$ az $[a, b]$ -n. Ekkor az

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

halmazt y -ra nézve *normáltartomány*nak nevezük (lásd a következő ábra).



4.5. ábra.

Hasonlóan az

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

alakú halmazok neve x -re nézve *normáltartomány* (lásd a következő ábra).

Meg lehet mutatni, hogy:

4.4.3. Tétel. *Bármely normáltartomány korlátos, zárt és mérhető, továbbá ha f integrálható az előző definícióban szereplő N normáltartományon, akkor*

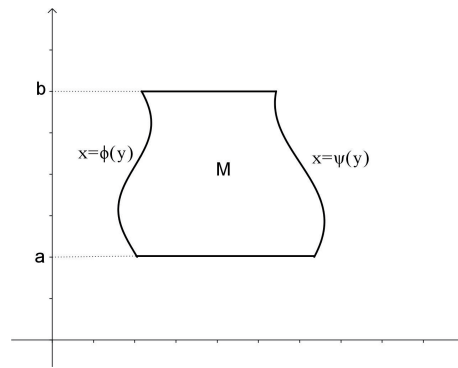
$$\iint_N f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden $x \in [a, b]$ -re létezik.

Hasonlóképpen, ha f integrálható az M normáltartományon, akkor

$$\iint_M f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy,$$

feltéve, hogy a jobb oldali belső integrál minden $y \in [a, b]$ -re létezik.



4.6. ábra.

Megjegyezzük, hogy ha f folytonos az N , illetve M normáltartományon, akkor a 4.4.3. Tétel feltételei teljesülnek.

Az

$$\int_a^b \left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{és} \quad \int_a^b \left(\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

kétszeres integrálokat szokták az

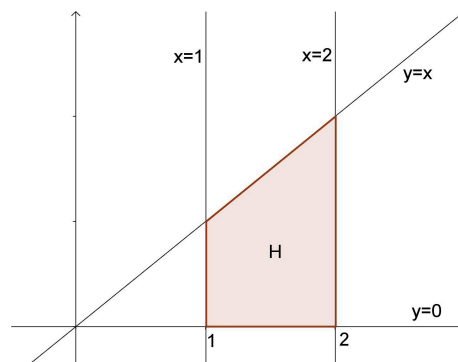
$$\int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy, \quad \text{illetve} \quad \int_a^b dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

alakban is írni.

4.4.4. Példa. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ az a korlátos halmaz, amelyet az $y = x$, $y = 0$, $x = 1$ és $x = 2$ egyenesek határolnak, és számítsuk ki a

$$\iint_H e^{\frac{y}{x}} dx dy$$

területi integrált!



4.7. ábra.

Nyilván

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}$$

(lásd a 4.7. ábra).

Mivel H normáltartomány y -ra nézve és az integrandus folytonos H -n, ezért

$$\begin{aligned} \iint_H e^{\frac{y}{x}} dx dy &= \int_1^2 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx = \int_1^2 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_1^2 x(e-1) dx = \left[(e-1) \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3(e-1)}{2}. \end{aligned}$$

5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Közönséges (skaláris) differenciálegyenlet alatt olyan függvényegyenletet értünk, amelyben az ismeretlen egyváltozós valós y függvénynek a deriváltjai is szerepelnek. Egy n -ed rendű differenciálegyenletet szimbolikusan az

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

képlettel írhatunk le, ahol $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Az y függvény akkor *megoldása* a differenciálegyenletnek valamely $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha y differenciálható I -n, és minden $x \in I$ -re

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

(A deriváltak alatt az I -re vonatkozó deriváltakat kell érteni, tehát zárt intervallum esetén a végpontokban a megfelelő féloldali deriváltakat.) Ebben a fejezetben a skaláris differenciálegyenletek néhány típusának a megoldását fogjuk vizsgálni. Először tekintsük az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenletet, ahol p és q az $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett folytonos valós függvény. Ha q azonosan nulla (α, β) -n, akkor az egyenletet *homogénnek*, különben pedig *inhomogénnek* nevezzük.

Tegyük fel, hogy y megoldása a differenciálegyenletnek az (α, β) intervallumon, azaz

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

minden $x \in (\alpha, \beta)$ -ra. Legyen P primitív függvénye p -nek (α, β) -n. Az utolsó egyenletet $e^{P(x)}$ -szel szorozva azt kapjuk, hogy minden $x \in (\alpha, \beta)$ esetén

$$y'(x)e^{P(x)} + p(x)y(x)e^{P(x)} = q(x)e^{P(x)}.$$

Ez ekvivalens az

$$(y(x)e^{P(x)})' = q(x)e^{P(x)},$$

$$y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)} dx,$$

és

$$y(x) = e^{-P(x)} \int q(x)e^{P(x)} dx, \quad x \in (\alpha, \beta)$$

egyenletekkel. Tehát igaz a következő:

5.1.1. Tétel. Legyen p és q az (α, β) -n folytonos függvény. Ha P és G primitív függvénye p -nek, illetve $q \cdot (\exp \circ P)$ -nek (α, β) -n, akkor y pontosan akkor megoldása az

$$y' + p(x)y = q(x)$$

egyenletnek az (α, β) intervallumon, ha valamely $c \in \mathbb{R}$ esetén

$$y(x) = e^{-P(x)}(G(x) + c),$$

minden $x \in (\alpha, \beta)$ -ra.

A megoldások alakjából látszik, hogy ha előírjuk az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltételt, ahol $x_0 \in (\alpha, \beta)$ és $y_0 \in \mathbb{R}$, akkor ennek pontosan egy megoldás tesz eleget.

5.1.2. Példa. Keressük az

$$y' + 3y = x, \quad y(0) = 1$$

kezdetiérték-feladat megoldását!

Az előző tétel szerint

$$y(x) = e^{-3x} \int x e^{3x} dx, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x e^{3x} dx = \int x \left(\frac{e^{3x}}{3} \right)' dx = x \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + c.$$

Ezért

$$y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + c e^{-3x}.$$

Figyelembe véve az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt, azt kapjuk, hogy

$$1 = y(0) = -\frac{1}{9} + c,$$

és innen $c = \frac{10}{9}$. Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása

$$y(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{10}{9} e^{-3x}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

5.2. Szeparábilis differenciálegyenlet

Szeparábilis differenciálegyenletnek az

$$y' = g(x)h(y)$$

alakú differenciálegyenletet nevezünk, ahol $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ és $h : (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ folytonos függvények, (α, β) és $(\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}$ intervallumok.

Tegyük fel, hogy y megoldása a differenciálegyenletnek valamely $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ intervallumon, azaz minden $x \in (a, b)$ -re.

$$y'(x) = g(x)h(y(x)).$$

Azt kapjuk, hogy minden $x \in (a, b)$ -re

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} - g(x) = 0,$$

amely ekvivalens az

$$(F(y(x)) - G(x))' = 0$$

feltétellel, ahol F primitív függvénye $\frac{1}{h}$ -nak a (γ, δ) -n, G pedig primitív függvénye g -nek az (α, β) -n. Ez pontosan akkor teljesül, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$F(y(x)) = G(x) + c,$$

minden $x \in (a, b)$ -re. Tehát igaz a következő:

5.2.1. Tétel. Legyenek $g : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ és $h : (\gamma, \delta) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ adott folytonos függvények. Legyen F primitív függvénye $\frac{1}{h}$ -nak (γ, δ) -n és G primitív függvénye g -nek (α, β) -n. Ekkor egy y függvény pontosan akkor megoldása az

$$y' = g(x)h(y)$$

egyenletnek valamely $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$ intervallumon, ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $x \in (a, b)$ -re

$$F(y(x)) = G(x) + c.$$

Megjegyezzük, hogy a lineáris differenciálegyenletekkel ellentétben a szeparábilis differenciálegyenlet megoldásai általában nincsenek értelmezve a teljes (α, β) intervallumon.

5.2.2. Példa. Keressük az

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1,$$

kezdetiérték-feladat megoldását. Mivel $y(0) > 0$ és y -nak nem lehet zérushelye, ezért $y > 0$ mindenütt, ahol értelmezve van. A tétel jelöléseivel

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, & (\alpha, \beta) &= (-\infty, \infty), \\ h(x) &= x^2, & (\gamma, \delta) &= (0, \infty), \end{aligned}$$

ezért a tétel szerint létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$-\frac{1}{y(x)} = x + c.$$

Figyelembe véve az $y(0) = 1$ feltételt azt kapjuk, hogy $c = -1$, és így

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

A megoldás csak a $(-\infty, 1)$ intervallumon van értelmezve.

5.3. Másodrendű lineáris homogén egyenlet

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Az

$$y'' + ay' + by = 0$$

egyenletet *másodrendű állandó együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletnek* nevezük. Ha a megoldásokat $y(x) = e^{\lambda x}$, $x \in (-\infty, \infty)$, alakban keressük, akkor a

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

karakterisztikus egyenlethez jutunk. A következő tétel megadja a karakterisztikus gyököktől függően az egyenlet megoldásait.

5.3.1. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$. Legyenek a*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

egyenlet gyökei λ_1 és λ_2 .

(i) Ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Ha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(iii) Ha λ_1 és λ_2 komplex, azaz $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), akkor az egyenlet minden megoldása

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A tételben szereplő megoldások a teljes számegyenesen értelmezve vannak.

5.3.2. Példa. Keressük az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

egyenlet megoldásait. Mivel a

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$, ezért a tétel szerint minden megoldás

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

5.4. Másodrendű lineáris inhomogén egyenlet

Most tekintsük az

$$y'' + ay' + by = f(x),$$

inhomogén egyenletet, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, f pedig egy $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ intervallumon folytonos függvény. Az inhomogén és a hozzá tartozó homogén egyenlet megoldásai a következő kapcsolatban vannak:

5.4.1. Tétel. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és f az (α, β) -n folytonos függvény. Ha y_P az

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

egyenlet megoldása (α, β) -n, akkor az inhomogén egyenlet bármely más y megoldása (α, β) -n az

$$y = y_P + y_H$$

alakban írható, ahol y_H az

$$y'' + ay' + by = 0$$

homogén egyenlet megoldása.

Mivel a homogén egyenlet megoldásait ismerjük, a tétel szerint ahhoz, hogy felírjuk az inhomogén egyenlet összes megoldását elég ismerni az inhomogén egyenlet egyetlen konkrét megoldását, amelyet *partikuláris megoldásnak* is szokás nevezni. A következő tétel speciális alakú jobb oldal esetén megadja a partikuláris megoldás lehetséges alakját.

5.4.2. Tétel. Tekintsük az

$$y'' + ay' + by = p(x) e^{\mu x} \cos(\nu x)$$

inhomogén egyenletet, ahol $a, b, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pedig polinom. Legyenek λ_1 és λ_2 a homogén egyenlet

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

karakterisztikus egyenletének gyökei. Legyen $\lambda_* = \mu + i\nu$, és definiáljuk az s számot az

$$s = \begin{cases} 0, & \text{ha } \lambda_* \neq \lambda_1 \text{ és } \lambda_* \neq \lambda_2 \\ 1, & \text{ha } \lambda_* = \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ vagy } \lambda_* = \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ 2, & \text{ha } \lambda_* = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

képlettel. Ekkor az inhomogén egyenletnek létezik

$$y_P(x) = x^s [q_1(x) e^{\mu x} \cos(\nu x) + q_2(x) e^{\mu x} \sin(\nu x)]$$

alakú megoldása, ahol q_1 és q_2 ugyanolyan fokú polinom, mint p .

Az állítás akkor is igaz, ha az inhomogén egyenlet jobb oldalán $\cos(\nu x)$ -et $\sin(\nu x)$ -re cseréljük.

5.4.3. Példa. Keressük az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

egyenlet megoldásait. Az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének gyökei $\lambda_1 = -2$ és $\lambda_2 = -1$. A tétel jelöléseivel $p(x) = 1$, $\mu = 0$ és $\nu = 2$. Ezért $\lambda_* = 2i$ és $s = 0$. A tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

egyenletnek létezik

$$y_P(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

alakú megoldása, ahol $A, B \in \mathbb{R}$. Deriválással kapjuk, hogy

$$y'_P(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x),$$

és

$$y''_P(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x).$$

Behelyettesítve y_P , y'_P és y''_P képleteit az inhomogén egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(-2A + 6B) \cos(2x) - (6A + 2B) \sin(2x) = \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Innen

$$-2A + 6B = 1,$$

$$6A + 2B = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása

$$A = -\frac{1}{20}, \quad B = \frac{3}{20}.$$

Tehát

$$y_P(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x).$$

Ezt az 5.3. Példa eredményével kombinálva kapjuk, hogy az inhomogén egyenlet összes megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x) + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

A következő tétel segítségével jelentősen kibővíthetjük azoknak az egyenleteknek a körét, amelyeket a „próbafüggvény módszerével” megoldhatunk.

5.4.4. Tétel (A szuperpozíció elve). *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, f_1, f_2 pedig egy (α, β) intervallumon folytonos függvény. Ha y_1 és y_2 megoldása (α, β) -n az*

$$y'' + ay' + by = f_1(x),$$

illetve az

$$y'' + ay' + by = f_2(x)$$

egyenletnek, akkor $y_1 + y_2$ megoldása (α, β) -n az

$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$

egyenletnek.

5.4.5. Példa. Az előző tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet partikuláris megoldása az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x)$$

és

$$y'' + 3y' + 2y = 1$$

egyenlet y_1 , illetve y_2 partikuláris megoldásainak az összege. Az 5.4.3. Példában már beláttuk, hogy

$$y_1(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x), \quad (-\infty, \infty),$$

és hasonló számolással kapjuk, hogy

$$y_2(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Tehát az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet partikuláris megoldása

$$y_P(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x) + \frac{1}{2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Mivel az

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

homogén egyenlet megoldásai

$$y_H(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

alakúak, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, az 5.4.1. Tétel szerint az

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(2x) + 1$$

egyenlet minden megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{3}{20} \sin(2x) + \frac{1}{2} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

alakú, ahol $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Irodalomjegyzék

- [1] Császár Ákos: *Valós analízis II.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988
- [2] Dósa György–Szalkai István: *Kalkulus példatár informatikusoknak II.* Typotex Kiadó, Budapest, 2011
- [3] Elaydi Saber: *An Introduction to Difference Equations.* Springer, 2005
- [4] Hatvani László: *Kalkulus közgazdászoknak.* Polygon, Szeged, 2006
- [5] Laczkovich Miklós–T. Sós Vera: *Analízis II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2007