Írta:
**MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA**
Pannon Egyetem

# VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI PÉLDATÁR INFORMATIKUSOKNAK

## Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2011

LEKTORÁLTA: Dr. Buzáné dr. Kis Piroska, Dunaújvárosi Főiskola Központi Oktatási Intézet Matematika Tanszék



TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.

ISBN 978-963-279-517-1

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Benkő Márta

KULCSSZAVAK:

valószínűség, valószínűségi változó, eloszlás, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, várható érték, szórás, kapcsolatok az eloszlások között, centrális határeloszlás tétel , számítógépes szimuláció.

ÖSSZEFOGLALÁS:

Ennek a feladatgyűjteménynek a célja a valószínűségszámítással kapcsolatos, alap valószínűség-számítás kurzuson ismertetett fogalmak elmélyítése, feladatokon keresztül történő „begyakorlása”. A feladatok között megtalálhatók csupán a definíció ismeretét igénylő példák éppúgy, mint a számolási gyakorlatot illetve ötleteket igénylő feladatok. Igyekeztem a példák egy részét úgy fogalmazni, hogy a hallgatók ráismerhessenek a mindennapi életben felbukkanó problémákra. Nagy hangsúlyt helyeztem az eloszlások fogalmára, az eloszlások közötti kapcsolatokra, valamint kihasználva a mérnök informatikus hallgatók számítástechnikában való jártasságát, a problémák szimulációval történő kezelésére. Már az első fejezettől fogva tudatosan törekedtem szimulációs feladatok adására, és arra, hogy a „véletlen viselkedésével” kapcsolatos jelenségekre felhívjam a hallgatók figyelmét. Remélhetőleg a későbbiekben ennek meglesz az a haszna, hogy ha egy sztochasztikus problémát analitikusan nem is sikerül megoldani a gyakorló informatikusnak, de a szimulációval történő kezelés lehetősége eszébe fog majd jutni. Minden feladatnak ismertettem a megoldását, illetve a számítógépes megvalósításokra is adtam egy lehetséges utat, ami megkönnyíti az önellenőrzést.

# Tartalom

# Klasszikus (kombinatorikus) valószínűség

## Feladatok

1) Kétszer elgurítunk egy szabályos kockát. Írja fel az alábbi eseményeket és adja meg a valószínűségüket!

a) A két gurítás azonos.
b) A két gurítás különböző.
c) Az egyik gurítás 5, a másik 3.
d) Nincs hatos a gurítások közt.
e) Van hatos a gurítások közt.
f) Egy hatos van a gurítások közt.
g) Mindkét gurítás hatos.
h) Az egyik gurítás páros, a másik páratlan.
i) Legalább az egyik gurítás páratlan.
j) A gurítások összege 10.
k) A gurítások összege legalább 10.
l) A gurítások egymástól való eltérése 2.
m) A gurítások maximuma legfeljebb 3.
n) A gurítások minimuma legfeljebb 3.
o) A gurítások összege 7, eltérésük 2.

2) Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Írja fel az alábbi eseményeket és adja meg a valószínűségüket!

a) A dobások mindegyike fej.
b) A dobások közt 2 fej van.
c) A dobások közt legalább 2 fej van.
d) A dobások közt legfeljebb 2 fej van.
e) A dobások közt van fej is meg írás is.
f) Előbb dobunk fejet, mint írást.
g) Több a fej, mint az írás.
h) Eggyel kevesebb a fej, mint az írás.

3) Hatszor gurítunk egy szabályos kockát. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Minden gurítás különböző.
b) Van legalább két azonos gurítás.
c) Minden gurítás azonos.
d) Nincs hatos gurítás.
e) Két hatos gurítás van.
f) Legalább két hatos gurítás van.
g) Két különböző számot gurítunk.
h) A gurítások maximuma legfeljebb 4.
i) Van páros gurítás.
j) Két hatost, három hármast és egy kettest gurítunk.
k) A gurítások csökkenő sorrendben követik egymást.
l) Minden gurítás különböző és nincs hatos.
m) A gurítások összege legalább 34.
n) Páros számú páros értéket gurítunk.
o) Páratlan számú páratlan értéket gurítunk.

4) Egy urnában 20 golyó van, köztük 9 piros, 6 fehér és 5 zöld. Hogy megkülönböztessük az azonos színűeket is egymástól, a golyókat egytől húszig megszámozzuk. Visszatevés nélkül kiválasztunk közülük 4 darabot. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) A kiválasztottak közt nincs piros golyó.
b) A kiválasztottak közt 2 piros golyó van.
c) A kiválasztottak közt van piros golyó.
d) Minden kiválasztott golyó piros.
e) Minden kiválasztott golyó azonos színű.
f) Van mindhárom színű golyó a kiválasztottak közt.
g) Több piros golyót választunk, mint fehéret és zöldet együtt.
h) A kiválasztott piros és fehér golyók száma megegyezik.

5) Egy sokaságban N elem van, egyessel, kettessel, …, N-nel jelöltük meg őket.

a) Visszatevés nélkül választunk közülük $n$ darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy az $i$ jelű elem a kiválasztottak közt van?
b) Visszatevéssel választunk közülük $n$ darabot. Mennyi a valószínűsége, hogy az $i$-vel jelölt elem a kiválasztottak közt van?
c) Legalább hányszor válasszunk, ha azt szeretnénk, hogy legalább 0.95 valószínűséggel legyen a kiválasztottak közt az $i$-vel jelölt elem?

6) Egy tesztet töltenek ki a hallgatók, amelynél a megoldandó 10 feladatot a számítógép egy 100 feladatot tartalmazó bázisból választja ki véletlenszerűen. A kiválasztás megtörténte után áramszünet miatt elvesznek a feladatok, és a gép újra kisorsol egy feladatsort. Mennyi a valószínűsége, hogy van közös feladat a két véletlenszerűen kisorsolt feladatsor feladatai között?

7) Egy ember bemegy egy lépcsőházba, a 10 postaláda közül ötöt kiválaszt és beletesz mindegyikbe egy-egy szórólapot. Aztán bemegy egy másik terjesztő és a 10 postaláda közül kiválaszt ötöt és beletesz egy-egy szórólapot. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 8 postaládába jut szórólap?

8) Választunk k számot visszatevéssel az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számok közül.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy minden kiválasztott szám különböző, ha $k$=1,2,3,…,11?
b) Ábrázoljuk a kapott valószínűségeket $k$ függvényében! Lineáris-e a kapott függvény?

9) 4N fős csoportban a csoport tagjainak fele fiú, fele lány. A csoportot két egyforma nagyságú részre bontjuk véletlenszerűen.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kialakuló két csoport mindegyikében ugyannyi lány lesz, mint fiú?
b) Hova tart a fenti valószínűség, ha $N \to \infty$? Adja meg a konvergencia nagyságrendjét!

10) Fogadjuk el, hogy a számítógép által generált véletlen számok olyanok, hogy mind 0 és 1 közötti, és annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a [0,1] valamely részhalmazába esik, egyenlő a részhalmaz hosszával.

a) Írjon szimulációs programot a kockadobás szimulációjára!
b) Végezze el 10-szer a kísérletet és írja le az eredményeket!
c) Hasonlítsa össze az egyes, kettes, ….., hatos dobások relatív gyakoriságát 1/6-dal! Mekkora eltérést tapasztal $N$=10, $N$=100, $N$=1000, $N$=10000, $N$=100000, $N$=1000000 kísérlet esetén?

11) Szimulálja le a visszatevés nélküli mintavételt N elemből n elemet kiválasztva!
Ha 15 elem van, köztük 4 selejtes, és visszatevés nélkül kiválasztunk közülük 3-at, számolja ki annak a relatív gyakoriságát, hogy egy selejtes van a kiválasztott elemek közt! Hasonlítsa össze a szimuláció eredményét a pontos valószínűséggel 100, 1000, 10000, 100000 szimuláció esetén!

12) Szimulálja le a visszatevéses mintavételt N elemből n elemet választva!
Ha 15 elem van, köztük 4 selejtes, és visszatevéssel kiválasztunk közülük 3-at, számolja ki annak a relatív gyakoriságát, hogy egy selejtes van a kiválasztott elemek közt! Hasonlítsa össze a szimuláció eredményét a pontos valószínűséggel 100, 1000, 10000, 1000000 szimuláció esetén!

13) 12-szer feldobva egy szabályos érmét 4 fejet és 8 írást dobtunk.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a kialakuló dobássorozatban legalább két fej közvetlenül követi egymást?
b) Szimuláljuk le a fenti kísérletet és adjuk meg a fenti esemény relatív gyakoriságát 1000000 kísérlet elvégzése esetén!

14) Választunk egy számot a hétjegyű számok közül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott számnak 3 számjegye páros, 4 pedig páratlan?

15) Egy hallgatói kódfajta 6 karakterből áll, minden karakter 26 betű és 10 számjegy valamelyike. A gép véletlenszerűen generál egy kódot minden hallgatóhoz.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 10000 hallgató esetén lesz két azonos a véletlenszerűen generált kódok közt?
b) Hány kódot generálhatunk, ha azt szeretnénk, hogy 0.9 valószínűséggel különbözzenek egymástól?

# Megoldások

1) $\Omega = \{(i,j): 1 \le i \le 6, \quad 1 \le j \le 6 \quad egészek\}$, $|\Omega| = 36$.

a) $A$=a két gurítás azonos=$\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$, $|A|$=6, $P(A) = \frac{6}{36}$.

b) $B$= a két gurítás különböző=$\{(i,j): i \ne j, \quad 1 \le i \le 6, \quad 1 \le j \le 6 \quad egészek\} = \overline{A}$,

$|B| = 6 \cdot 5 = 30$, $P(B) = \frac{30}{36} = 1 - \frac{6}{36}$.

c) $C$= Az egyik gurítás 5, a másik 3=$\{(3,5),(5,3)\}$, $|C| = 2$, $P(C) = \frac{2}{36}$.

d) $D$= Nincs hatos a gurítások közt=

$\{(1,1),(1,2),....(1,5),(2,1),....(2,5),....,(5,1),(5,2),...(5,5)\}$, $|D| = 5 \cdot 5 = 25$, $P(D) = \frac{25}{36}$.

e) $E$= Van hatos a gurítások közt=

$\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$, $|E| = 11$, $P(E) = \frac{11}{36}$.

f) $F$= Egy hatos van a gurítások közt=

$\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$, $|F| = 10$, $P(F) = \frac{10}{36}$.

g) $G$= Mindkét gurítás hatos= $\{(6,6)\}, |G| = 1$, $P(G) = \dfrac{1}{36}$.

h) $H$=Az egyik gurítás páros, a másik páratlan=
$\begin{Bmatrix} (1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6), \\ (4,1),(4,3),(4,5),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5) \end{Bmatrix}$, $|H| = 2\cdot 3\cdot 3 = 18$, $P(H) = \dfrac{18}{36}$.

i) $I$= Legalább az egyik gurítás páratlan,
$I$= $\begin{Bmatrix} (1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,5),(5,2), \\ (5,4),(5,6)(6,1),(6,3),(6,5),(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5) \end{Bmatrix}$,
$|I| = 27 = 36 - 3\cdot 3$, $P(I) = \dfrac{27}{36}$.

j) $J$= a gurítások összege 10= $\{(4,6),(6,4),(5,5)\}$, $|J| = 3$, $P(J) = \dfrac{3}{36}$.

k) $K$=a gurítások összege legalább 10= $\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$, $|K| = 6$,
$P(K) = \dfrac{6}{36}$.

l) $L$= a gurítások egymástól való eltérése 2= $\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6),(3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}$,
$|L| = 2\cdot 4 = 8$, $P(L) = \dfrac{8}{36}$.

m) $M$= a gurítások maximuma legfeljebb 3 $= \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)(3,3)\}$,
$|M| = 3\cdot 3 = 9$, $P(M) = \dfrac{9}{36}$.

n) $N$=a gurítások minimuma legfeljebb 3=
$\begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2), \\ (3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3) \end{Bmatrix}$,
$|N| = 27$, $P(N) = \dfrac{27}{36}$.

o) $L$=a gurítások összege 7, eltérésük 2. $L=\varnothing$, $P(L) = 0$.

2) $\Omega = \{(F,F,F),(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F),(F,I,I,),(I,F,I),(I,I,F),(I,I,I)\}$, $|\Omega| = 8$.

a) $A$=a dobások mindegyike fej= $\{(F,F,F)\}, |A| = 1$, $P(A) = \dfrac{1}{8}$.

b) $B$=a dobások közt 2 fej van= $\{(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F)\}$ ,$|B| = 3$, $P(B) = \dfrac{3}{8}$.

c) $C$=a dobások közt legalább 2 fej van=
$= \{(F,F,F),(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F)\}$, $|C| = 4$, $P(C) = \dfrac{4}{8}$.

d) $D$=a dobások közt legfeljebb 2 fej van=
$\{(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F),(F,I,I,),(I,F,I),(I,I,F),(I,I,I)\}$ $|D| = 7$, $P(D) = \dfrac{7}{8}$.

e) $E$=a dobások közt van fej is, meg írás is=
$\{(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F),(F,I,I,),(I,F,I),(I,I,F)\}, |E| = 6$, $P(E) = \dfrac{6}{8}$.

f) $F$=Előbb dobunk fejet, mint írást=
$=\{(F,F,I),(F,I,F),(F,I,I)\}, |F|=3, P(F)=\frac{3}{8}$.

g) $G$=Több a fej, mint az írás= $\{(F,F,F),(F,F,I),(F,I,F),(I,F,F)\}, |G|=4, P(G)=\frac{4}{8}$.

h) $H$=Eggyel kevesebb a fej, mint az írás=$\{(F,I,I),(I,I,F),(I,I,F)\}$, $|H=3|$, $P(H)=\frac{3}{8}$.

3) $\Omega=\{(i,j,k,l,m,n)\,|\,1\le i,j,k,l,m,n\le 6 \quad egészek\}$, $|\Omega|=6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6=6^6=46656$.

a) $A$=Minden gurítás különböző. $|A|=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$, $P(A)=\frac{720}{46656}=0.015$.

b) $B$=Van legalább két azonos gurítás. $B=\overline{A}$, $P(B)=1-\frac{720}{46656}=0.985$.

c) $C$=Minden gurítás azonos. $|C|=6\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$, $P(C)=\frac{6}{46656}=0.0001$.

d) $D$=Nincs hatos gurítás. $|D|=5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=15625$, $P(D)=0.335$.

e) $E$=Két hatos gurítás van. $\binom{6}{2}$ féleképpen jelölhetjük ki a hatosok helyét, ahol hatos van ott egyértelmű, ahol nem hatos van, ott ötféle lehetőség közül választhatunk, tehát $|E|=\binom{6}{2}\cdot1^2\cdot5^4=9375$, $P(E)=0.201$.

f) $F$=Legalább két hatos gurítás van. Kettő, három, négy, öt vagy hat darab hatos lehet.
$|F|=\binom{6}{2}\cdot1^2\cdot5^4+\binom{6}{3}\cdot1^3\cdot5^3+\binom{6}{4}\cdot1^4\cdot5^2+\binom{6}{5}\cdot1^5\cdot5^1+1=$
9375+2500+375+30+1=12281, $P(F)=0.263$.
Könnyebben célba érünk, ha azokat számoljuk meg, amikor nincs hatos, illetve amikor egy hatos van.
$|\overline{F}|=5^6+\binom{6}{1}1^1\cdot5^5=15625+18750=34375, P(|\overline{F}|)=0.737$, $P(F)$=1-0.737=0.263

g) $G$=Két különböző számot gurítunk. $\binom{6}{2}$ féleképpen jelölhetjük ki azt a két számot, amit gurítunk. Ha a két szám $a$ és $b$ , $a<b$, le vannak rögzítve, akkor egy darab $a$, öt darab $b$ lehet (6 lehetőség), vagy két darab $a$ négy darab $b$ lehet ($\binom{6}{2}$ lehetőség), vagy három darab $a$, három darab $b$ lehet ($\binom{6}{3}$lehetőség), vagy négy darab $a$, két darab $b$ lehet ($\binom{6}{4}$ lehetőség), vagy öt darab $a$, egy darab $b$ lehet ($\binom{6}{5}$ lehetőség). Összesen: 62 elemi esemény van rögzített $a$ és $b$ érték mellett. $|G|=\binom{6}{2}\cdot62=930$, $P(G)=\frac{930}{6^6}=0.020$.

h) $|H|=4^6=4096$ (mindegyik gurítás legfeljebb 4) . $P(H)=\frac{4096}{6^6}=0.088$.

i) $\left|\overline{I}\right| = 3^6 = 729$. $P(I) = 1 - \dfrac{729}{6^6} = 0.984$.

j) $J =$ két hatost, három hármast és egy kettest gurítunk. A hatosok helyét $\binom{6}{2}$, a maradék 4 helyből a hármasok helyét $\binom{4}{3}$ választhatjuk ki, a kettes helye ekkor egyértelmű. Így összesen $\binom{6}{2}\binom{4}{3} \cdot 1 = 60$ elemi esemény van $J$-ben. $P(J) = \dfrac{60}{6^6} = 0.001$.

k) $|K| = 1$, $P(K) = \dfrac{1}{6^6}$.

l) $L$=Minden gurítás különböző és nincs hatos. $|L| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$, $P(L) = 0$.

m) $M$=A gurítások összege legalább 34. Így az összeg lehet 34, 35 vagy 36. 36 csak úgy lehet az összeg, ha minden gurítás hatos (1 elemi esemény), 35 csak úgy, ha 5 darab hatost és 1 darab ötöst gurítunk (6 darab elemi esemény). 34 úgy lehet az összeg, ha öt darab hatost és egy darab négyest (6 darab elemi esemény) vagy négy darab hatost és két darab ötöst gurítunk ($\binom{6}{2} = 15$ darab elemi esemény). Összesen tehát 28 darab elemi esemény jó, így $P(M) = \dfrac{28}{6^6} = 0.0006$.

n) $N$= Páros számú páros értéket gurítunk. Nullaszor, kétszer, négyszer vagy hatszor guríthatunk páros számot. A páros értékek 3-an, a páratlanok megint hárman vannak.

$$|N| = \binom{6}{0}3^0 \cdot 3^6 + \binom{6}{2}3^2 \cdot 3^4 + \binom{6}{4}3^4 \cdot 3^2 + \binom{6}{6}3^6 \cdot 3^0 = (1+15+15+1) \cdot 3^6 = 23328,\ P(N) = \frac{1}{2}.$$

o) $O$=Páratlan számú páratlan értéket gurítunk. Egyszer, háromszor vagy ötször guríthatunk páratlan számot.

$$|O| = \binom{6}{1}3^1 \cdot 3^5 + \binom{6}{3}3^3 \cdot 3^3 + \binom{6}{5}3^5 \cdot 3^1 = 32 \cdot 3^6 = 23328,\ P(O) = 0.5.$$

4) Ha nem figyeljük a golyók sorrendjét: $|\Omega| = \binom{20}{4} = 4845$.

a) $A$=A kiválasztottak közt nincs piros golyó. $|A| = \binom{6+5}{4} = 330$, $P(A) = 0.068$.

b) $B$=A kiválasztottak közt 2 piros golyó van. $|B| = \binom{9}{2} \cdot \binom{11}{2} = 1980$, $P(B) = \dfrac{1980}{4845} = 0.409$.

c) $P(C) = 1 - P(A) = 0.932$.

d) $D$=minden kiválasztott golyó piros. $|D| = \binom{9}{4} = 126$, $P(D) = 0.026$.

e) $E$=Minden kiválasztott golyó azonos színű. Minden golyó piros vagy mindegyik fehér vagy mindegyik zöld. $|E| = \binom{9}{4} + \binom{6}{4} + \binom{5}{4} = 126 + 15 + 5 = 146$, $P(E) = 0.030$.

f) $F$=Van mindhárom színű golyó a kiválasztottak közt. Valamelyikből kettőnek, a másik kettőből egynek-egynek kell lennie.

$$|F|=\binom{9}{2}\binom{6}{1}\binom{5}{1}+\binom{9}{1}\binom{6}{2}\binom{5}{1}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{2}=1080+675+540=2295,\ P(F)=0.474.$$

g) $G$=Több piros golyót választunk, mint egyebet. Megfelelő esetek: 4 piros 0 egyéb, 3 piros 1 egyéb

$$|G|=\binom{9}{4}+\binom{9}{3}\binom{11}{1}=1050,\ P(G)=0.217.$$

h) $H$=a kiválasztott piros és fehér golyók száma megegyezik. 2 piros 2 fehér, 1 piros 1 fehér 2 zöld, 0 piros 0 fehér 4 zöld lehet, ha a kiválasztott piros és fehér golyók száma megegyezik.

$$|H|=\binom{9}{2}\binom{6}{2}\binom{5}{0}+\binom{9}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{2}+\binom{9}{0}\binom{6}{0}\binom{5}{4}=540+540+5=1085,\ P(H)=0.224.$$

5)

a) Ne figyeljük a húzások sorrendjét! Az $i$-vel jelölt elem mellé a maradék $N-1$ elem közül $n-1$–et kell kiválasztanunk. Ezt $\binom{N-1}{n-1}$ féleképpen tehetjük meg. Tehát $P(A)=$ $\dfrac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\dfrac{n}{N}$.

b) Muszáj figyelni a húzások sorrendjét! $|\Omega|=N^n$ Amikor az $i$-vel jelölt elem nincs a kiválasztottak közt, akkor minden választásnál $N-1$ darab lehetőségünk van a választásra. Így $(N-1)^n$ kedvezőtlen elemi esemény van. Tehát $P(B)=1-\dfrac{(N-1)^n}{N^n}=1-(1-\dfrac{1}{N})^n$.

c) Visszatevés nélküli választásnál $n\ge 0.95N$.

Visszatevéses választásnál $1-(1-\dfrac{1}{N})^n\ge 0.95$, $(1-\dfrac{1}{N})^n\le 0.05$, $n\ln(1-\dfrac{1}{N})\le \ln 0.05$, $n\ge\dfrac{\ln 0.05}{\ln(1-\frac{1}{N})}$.

6) Az elsőre kiválasztott 10 feladat kijelöl a 100 feladat közül egy 10 elemű részhalmazt. Annak a valószínűsége, hogy a másodszorra kiválasztott 10 feladat között a 10 elemű részhalmaz egyik eleme sem szerepel $\dfrac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}}$. Így a keresett valószínűsége $1-\dfrac{\binom{90}{10}}{\binom{100}{10}}=1-0.330=0.670$.

7) Az első ember kijelöl 5 postaládát. Ha legalább 8 postaládában lesz szórólap, akkor a második ember a kijelölt 5 postaládából legfeljebb 2-t választ ki, amikor elhelyezi a szórólapjait. Ennek esélye $\dfrac{\binom{5}{0}\binom{5}{5}+\binom{5}{1}\binom{5}{4}+\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{5}}=\dfrac{126}{252}=0.5$.

8) Jelölje $P_k$ annak a valószínűségét, hogy k szám választása esetén minden szám különböző.

   a) $P_k = \dfrac{10\cdot 9\cdot\ldots(10-k+1)}{10^k}$,

   $P_1=1$, $P_2=0.9$, $P_3=0.72$, $P_4=0.504$, $P_5=0.3024$, $P_6=0.1512$, $P_7=0.06048$, $P_8=0.01814$, $P_9=0.0036$, $P_{10}=3.6\cdot 10^{-4}$, $P_{11}=0$.

   b) Nem lineáris a függvény.

9)

   a) Ha ugyanannyi fiú van, mint lány a kiválasztottak közt, akkor mind a fiúk közül, mind a lányok közül $N$ személyt választottunk. Ennek esélye $P_N = \dfrac{\binom{2N}{N}\binom{2N}{N}}{\binom{4N}{2N}}$.

   b) A Stirling formula szerint $N!\sim\left(\dfrac{N}{e}\right)^N\sqrt{2\pi N}$,

$$P_N \sim \frac{\left(\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}\sqrt{2\pi 2N}\right)^4}{\left(\frac{4N}{e}\right)^{4N}\sqrt{2\pi 4N}\left(\left(\frac{N}{e}\right)^{N}\sqrt{2\pi N}\right)^4} = \frac{2^{8N}\left(\frac{N}{e}\right)^{8N}16\pi^2N^2}{4^{4N}\left(\frac{N}{e}\right)^{8N}4\pi^2N^2\sqrt{8\pi N}} = \frac{1}{c\sqrt{N}}, \text{ vagyis}$$

   $P_N \to 0$ $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ nagyságrendben.

10) A programokat Matlab programcsomag segítségével készítettem el, de természetesen bármely más programnyelven is megvalósíthatók.
Az alábbi egy lehetséges megoldása a 10) feladatnak.

   a)

```
function kockadobas(szimszam)
gyak=zeros(1,6);
for i=1:1:szimszam
dobas=floor(rand(1)*6+1)
for j=1:1:6
if dobas==j
    gyak(1,j)=gyak(1,j)+1;
end
end
end
relgyak=gyak/szimszam
```

   b) Az általam kapott gurítás sorozat: 4 3 3 6 1 2 2 5 1 4.
   Természetesen Önök szinte biztosan mást fognak kapni.

c)

| | Egyes | kettes | hármas | négyes | ötös | Hatos |
|---|---|---|---|---|---|---|
| valószínűség | 0.1666667 | 0.1666667 | 0.1666667 | 0.1666667 | 0.1666667 | 0.1666667 |
| $N$=10 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| $N$=100 | 0.18 | 0.18 | 0.17 | 0.19 | 0.18 | 0.10 |
| $N$=1000 | 0.166 | 0.181 | 0.168 | 0.143 | 0.165 | 0.177 |
| $N$=10000 | 0.1638 | 0.1630 | 0.1706 | 0.1723 | 0.1631 | 0.1672 |
| $N$=100000 | 0.16838 | 0.16768 | 0.16720 | 0.16531 | 0.16644 | 0.16499 |
| $N$=1000000 | 0.166794 | 0.166677 | 0.166502 | 0.166494 | 0.166902 | 0.166631 |

11) A mintavétel megvalósítása: megjegyezzük, eddig miket választottunk, ha olyat választunk újra, akkor ismétlünk.

```
function mintav3(N,n)
volt=zeros(1,N)
v=zeros(1,n)
    for i=1:1:n
        a=0;
        while a==0
        vel=floor(N*rand(1)+1);
        if volt(1,vel)==0
            v(1,i)=vel;
            volt(1,vel)=1;
            a=1;
        end
        end
    end
    v
```

```
A relatív gyakoriságok számolása:
function mintav4(N,n,szimszam)
format long
jo=0;
if n<4
    meddig=n;
else
    meddig=4;
end
for k=1:1:szimszam
volt=zeros(1,N)
 v=zeros(1,n)
v=zeros(1,n);
    for i=1:1:n
        a=0;
        while a==0
        vel=floor(N*rand(1)+1);
        if volt(1,vel)==0
            v(1,i)=vel;
            volt(1,vel)=1;
            a=1;
        end
        end
    end
    v1=sort(v);
    hany=0;
```

```
            for j=1:1:meddig
            if v1(1,j)<5
                hany=hany+1;
            end
        end
            if hany==1
                jo=jo+1;
            end
end
relgyak=jo/szimszam
kul=relgyak-220/(15*14*13/6)
```

| Szimszám | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | Pontos valószínűség |
|---|---|---|---|---|---|
| Rel. gyak | 0.46 | 0.504 | 0.47980 | 0.483228 | 0.483516 |
| Eltérés | 0.0235 | 0.0205 | 0.0037 | 2.88e-004 | |

12) A mintavétel megvalósítása

```
function minta(N,n)
    for i=1:1:n
    vel=floor(N*rand(1)+1);
    v(1,i)=vel;
    end
    v
A relatív gyakoriságok számolása:
function mintavt(N,n,szimszam)
S=4;
gyak=0;
for k=1:1:szimszam
    v=zeros(1,n);
    mennyi=0;
    for i=1:1:n
    vel=floor(N*rand(1)+1);
    v(1,i)=vel;
    if vel<S+1
        mennyi=mennyi+1;
    end
    end
    v;
    mennyi;
    if mennyi==1
        gyak=gyak+1;
    end
end
relgyak=gyak/szimszam
```

| Szimszám | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | Pontos valószínűség |
|---|---|---|---|---|---|
| Rel. gyak | 0.4 | 0.451 | 0.4390 | 0.429706 | 0.4302222 |
| Eltérés | 0.03022 | 0.02078 | 0.00878 | 5.16e-004 | |

13)

a) Tekintsük elemi eseményeknek a dobássorozatokat. Mivel a dobássorozatban 8 írás és 4 fej van, és a fejek helyét kijelölve egyértelműen meghatározott a dobássorozat, így összesen $\binom{12}{4}=495$ elemi esemény van.

Vegyük észre, hogy az *I*-re végződő, két egymás követő *F* dobást sehol nem tartalmazó sorozatok előállíthatók oly módon, hogy leírjuk az *FI* blokkokat egymás után, és a blokkok közé beszúrjuk az *I* dobásokat.
Számoljuk meg először azokat a 12 hosszúságú, két egymás követő *F* dobást sehol nem tartalmazó sorozatokat, amik *I*-re végződnek. Ekkor 4 darab *FI* blokk elemei közé kell beszúrni 4 darab *I* dobást. Ez $\binom{8}{4}$ féleképpen tehető meg.
Számoljuk meg most azokat a 12 hosszúságú, két egymás követő *F* dobást nem tartalmazó sorozatokat, amik *F*-re végződnek. Ekkor az *F* dobás előtt biztosan *I* dobás van, mert két *F* nem szerepelhet egymás után. Az utolsó *F* dobást leválasztva tehát egy 11 hosszúságú, de *I*-re végződő sorozatot kapunk. Az *I* –re végződő sorozatok viszont előállíthatók oly módon, hogy az *FI* blokkokat leírjuk, és a blokkok közé beszúrjuk az *I* dobásokat. A 11 hosszúságú, *I*-re végződő sorozatban 3 darab *FI* blokk és 5 darab *I* dobás van, tehát a beszúrások $\binom{8}{5}$ féleképpen végezhetők el. Így összesen $\binom{8}{4}+\binom{8}{5}=126$ olyan sorozat van, amelyben sehol nem követi egymást két *F* dobás. Így a keresett valószínűség $1-\frac{126}{495}=0.745$.

b)

```
function futam(szimszam)
gyak=0;
for k=1:1:szimszam
vektor=zeros(1,12);
volt=zeros(1,12);
v=zeros(1,4);
    for i=1:1:4
        a=0;
        while a==0
        vel=floor(12*rand(1)+1);
        if volt(1,vel)==0
            v(1,i)=vel;
            volt(1,vel)=1;
            a=1;
        end
        end
    end
    for m=1:1:4
    vektor(1,v(1,m))=1;
    end
    vektor;
    van=0;
for j=1:1:11
    osszeg=vektor(1,j)+vektor(1,j+1);
        if osszeg==2
        van=1;
    end
end
if van==1
        gyak=gyak+1;
end
end
relgyak=gyak/szimszam
```

$N=1000000$ szimuláció esetén a kapott relatív gyakoriság 0.7459 lett.

14) Az elemi események: a hétjegyű számok. A hétjegyű számok halmaza $9\cdot 10^6$ elemből áll. Számoljuk meg a kedvező elemi eseményeket!
Ha elöl páratlan szám áll, akkor elöl ötfajta szám állhat. A mögötte levő 6 helyből hármon páros, hármon páratlan számjegy áll, ezek mindegyike ötféle számjegy lehet. Mivel a páratlan számjegyek helyének kijelölése $\binom{6}{3}$ féleképpen történhet, ezért $\binom{6}{3}\cdot 5\cdot 5^3\cdot 5^3=\binom{6}{3}\cdot 5^7$ olyan hétjegyű szám van, amelynek 4 páratlan és 3 páros számjegye van, és emelllett az első számjegye páratlan.
Ha elöl páros számjegy áll, akkor ott csak négyféle számjegy állhat, mert a 0 nem kerülhet előre. Ekkor a mögötte levő 6 helyből kettőn páros, és négyen páratlan számjegynek kell állni. Mivel a páratlan számjegyek helyét $\binom{6}{4}$ féleképpen jelölhetjük ki a hat hely közül, ezért összesen $\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 5^6$ olyan hétjegyű szám van, amelynek 3 számjegye páros, és 4 pedig páratla, valamint elöl páratlan szám áll.
Ezek alapján a kedvező elemi események száma $\binom{6}{3}\cdot 5^7+\binom{6}{4}\cdot 4\cdot 5^6=2500000$, így a keresett valószínűség $\dfrac{2.5\cdot 10^6}{9\cdot 10^6}=0.278$.

15)

a) Egy kód $36^6=2176782336$ féle lehet. Ha $P_k$ jelöli annak a valószínűségét, hogy $k$ darab kód generálása esetén minden generált kód különböző, akkor
$$P_k=\frac{36^6(36^6-1).....(36^6-k+1)}{(36^6)^k}.$$
$P(\text{van legalább két azonos kód})=1-P_k$. $1-P_{10000}=1-0.9773=0.0227$

b) 21418 kód generálása esetén lesz 0.9 annak a valószínűsége, hogy minden kód különböző.

# Geometriai valószínűség

## Feladatok

1) Egy $R$ sugarú körre lövünk, amit biztosan eltalálunk. A céltábla sugarát 10 egyenlő részre osztjuk, berajzoljuk a koncentrikus köröket, a legbelsőbe találva 10-es, …, a legkülsőbe találva egyes találatunk lesz. Tegyük fel, hogy annak a valószínűsége, hogy a találati pont a kör valamely részhalmazába esik, arányos a részhalmaz területével.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy 10-es találatunk lesz?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy 5-ös találatunk lesz?
   c) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 5-ös találatunk lesz?
   d) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5-ös találatunk lesz?

2) Választunk egy számot a $[0,1]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám második tizedes jegye hármas?

3) Választunk egy számot az $[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám második tizedes jegye egyes?

4) Választunk egy pontot a $[0,3]\mathrm{x}[0,5]$ téglalapról. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont valamelyik csúcshoz közelebb van egynél?

5) Választunk egy pontot a $[0,3]\mathrm{x}[0,5]$ téglalapról. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont valamelyik csúcshoz közelebb van kettőnél?

6) Választunk két számot egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[0,1]$ intervallumról.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik szám nagyobb 1/4-nél?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét szám 1/3 és 2/3 közé esik?
   c) Mennyi a valószínűsége, hogy a négyzetösszegük 1/3 és 2/3 közé esik?
   d) Mennyi a valószínűsége, hogy az eltérésük kisebb, mint 1/4?
   e) Mennyi a valószínűsége, hogy a szorzatuk 1/4 és 1/2 közé esik?

7) Két számot választok egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[-3,2]$ intervallumról.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy a számok összegének abszolút értéke legalább 1?
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy a számok abszolút értékeinek összege legfeljebb 1?

8) Választunk két számot egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[0,1]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy közelebb vannak egymáshoz, mint a végpontokhoz?

9) Választunk két számot egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint a $[-1,1]$ intervallumról. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik szám kisebb, mint a másik négyzete?

10) Választunk egy számot a [0,1] intervallumról, amivel két szakaszra osztjuk azt. Ezek után a hosszabbikról véletlenszerűen választunk még egy számot. Mennyi a valószínűsége, hogy a középen kialakuló szakasz rövidebb 1/4-nél?

11) Választunk két pontot az egység sugarú körvonalról egymástól függetlenül a geometriai valószínűség szerint. Mennyi a valószínűsége, hogy az összekötő szakaszuk hossza rövidebb 1/2-nél?

12) Egy pontot lerögzítünk az egység sugarú körvonalon és véletlenszerűen választunk még egy pontot a körvonalról. Mennyi a valószínűsége, hogy az összekötő szakaszuk rövidebb 1/2-nél?

13) Generáljon *n* darab véletlen számot a számítógép véletlenszám generátorával, és jelöljön ki egy szakaszt a [0,1] intervallumon. Számolja ki annak a relatív gyakoriságát, hogy a generált szám a kijelölt szakaszra esik, és hasonlítsa össze a szakasz hosszával. Mekkora eltérést tapasztal, ha a generált véletlen számok száma $n$=100, 10000, 1000000, 100000000?

14) Rögzítsen egy $a$ és egy $b$ számot a [0,1] intervallumon.Tekintsük egy kísérletnek azt, hogy generál két véletlen számot a [0,1] intervallumon a számítógép véletlenszám generátorával. Legyen $A$ az az esemény, hogy az első szám kisebb $a$-nál, $B$ az az esemény, hogy a második szám kisebb $b$-nél. Számítsa ki $A$ és $B$ valamint $A \cap B$ relatív gyakoriságát, és hasonlítsa össze a kapott relatív gyakoriságokat $a$-val, $b$-vel és $a \cdot b$ értékével. Mekkora eltéréseket tapasztal 100, 10000, illetve 1000000 kísérlet elvégzése esetén?

15) Tekintsük azt egy kísérletnek, hogy generál két véletlen számot a [0,1] intervallumon és $A$ legyen az az esemény, hogy a második szám kisebb, mint az első szám négyzete. Számolja ki az $A$ esemény relatív gyakoriságát, és hasonlítsa össze a kapott relatív gyakoriságot az $\int_0^1 x^2\,dx$ integrál értékével! Mekkora eltérést tapasztal $n$=100, 10000, 100000 kísérlet elvégzése esetén?

# Megoldások

1) $\Omega$ az R sugarú körlap. $t_\Omega = R^2\pi$.

a) $A_{10} = 10$-est lövünk. $A_{10} = \dfrac{R}{10}$ sugarú körlap, melynek középpontja megegyezik $\Omega$ középpontjával (a koncentrikus körök közül a legbelső). $t_{A_{10}} = \left(\dfrac{R}{10}\right)^2 \pi$,

$$P(A_{10}) = \frac{\left(\frac{R}{10}\right)^2 \pi}{R^2\pi^2} = 0.01.$$

b) $A_5$ = ötöst lövünk. $t_{A_5} = \left(\dfrac{6R}{10}\right)^2 \cdot \pi - \left(\dfrac{5R}{10}\right)^2 \cdot \pi = \dfrac{11R^2}{100}\pi$, $P(A_5) = 0.11$.

c) $t_{jó} = R^2\pi - \left(\dfrac{5R}{10}\right)^2 \pi = 0.75R^2\pi$ $P$=0.75.

d) $t_{jó} = \left(\dfrac{6R}{10}\right)^2 \pi$, $P$=0.36.

2) $\Omega = [0,1]$, $h(\Omega) = 1$, $A$= a kiválasztott szám második tizedes jegye hármas.

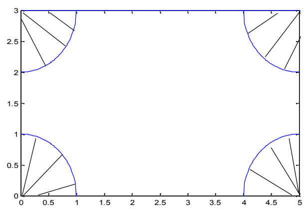
$A = [0.03\,,0.04) \cup [0.13\,,0.14) \cup .... \cup [0.93\,,0{,}94)$, $h(A) = 10 \cdot \dfrac{1}{100}$, $P(A)$=0.1.

3) $\Omega = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$, $h(\Omega) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $A$= a kiválasztott szám második tizedes jegye egyes.

$A = [0.71\,,0{,}72) \cup [0.81\,,0{,}82) \cup .... \cup [1.41\,,\sqrt{2}]$, $P(A)$=$\dfrac{7 \cdot \frac{1}{100} + \sqrt{2} - 1.41}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$=0.105.

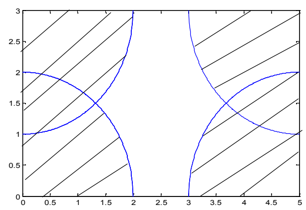
4) $\Omega = [0,3]\mathrm{x}[0,5]$, $t_\Omega = 15$.

A jó pontok halmaza:



$t_{jó} = 4 \cdot 1^2 \dfrac{\pi}{4} = \pi$. $P = \dfrac{\pi}{15} = 0.209$.

5)



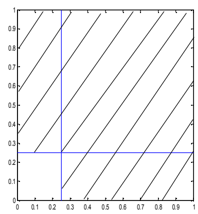
$t_{jó} = 4\pi - 2(2 \cdot 2 \cdot \arccos(1.5/2) - 1.5 \cdot \sqrt{2^2 - 1.5^2}) = 10.753$.

(A negyedkörök területének összegéből le kell vonni az átfedések területét. Az átfedés területe a körcikk területének és a háromszög területének különbsége). $P = 0.717$.

6) $\Omega = [0,1]\mathrm{x}[0,1]$, $t_\Omega = 1$.

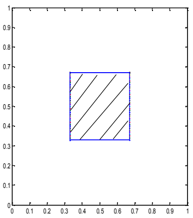
a) $A$=valamelyik szám nagyobb 0.25-nél.

$A$=



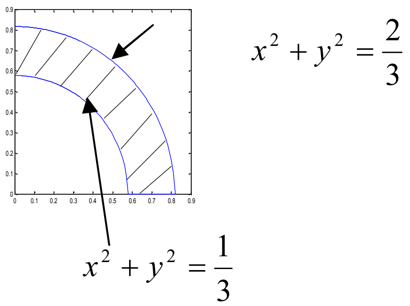
$t(A)$=$1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$, $P(A)$=0.9375.

b) *B*= mindkét szám 1/3 és 2/3 közé esik.
*B*=



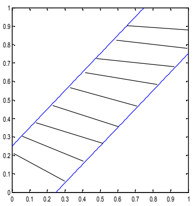
$t(B)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$, *P(B)*=0.111.

c) *C*= a négyzetösszegük 1/3 és 2/3 közé esik.
*C*=



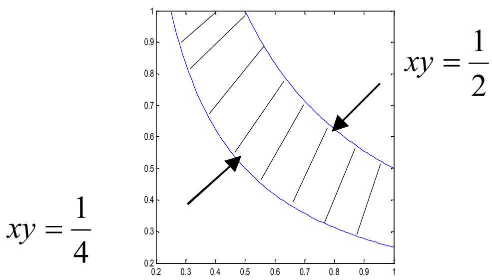

$t(C)=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{3}\pi$, P(C)= $\frac{1}{3}\pi$

d) *D*= az eltérésük kisebb, mint 1/4.
*D*=



$$t(D)=1-2\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2}=\frac{7}{16},\ P(D)=0.4375\,.$$

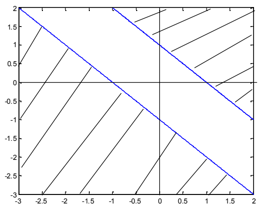
e) *E*=a szorzatuk 1/4 és 1/2 közé esik.
*E*=



$$t(E)=\int\limits_{1/4}^{1/2}(1-\frac{1}{4x})dx+\int\limits_{1/2}^{1}(\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x})dx=\left[x-\frac{1}{4}\ln x\right]_{0.25}^{0.5}+\left[\frac{1}{4}\ln x\right]_{0.5}^{1}=0.25-0.25\ln 0.5+$$
$0.25\ln 0.25+0-0.25\ln 0.5=0.25$. *P(E)*=0.25.

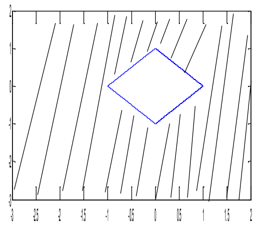
7) $\Omega=[-3,2]x[-3,2]$. $t(\Omega)=5\cdot 5=25$.

a) *A*= a számok összegének abszolút értéke legalább 1.
$|x+y|\geq 1$ azt jelenti, hogy $x+y\geq 1$ vagy $x+y\leq -1$.
A =



$t(A)=\frac{5\cdot 5}{2}+\frac{3.3}{2}=17$, *P(A)*=$\frac{17}{25}=0.68$

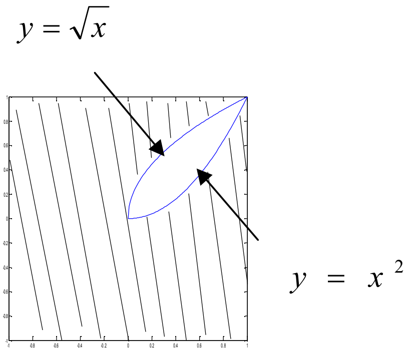
b) *B*= a számok abszolút értékeinek összege legalább 1.
*B*=



$t(B)=25-4\cdot\frac{1}{2}=23$, $P(B)=\frac{23}{25}=0.92$.

8) Jelölje $x$ az elsőre, $y$ a másodszorra választott számot. Ha $x\leq y$, akkor egymástól való távolságuk $y-x$, a végpontoktól való távolságuk $x$ illetve $1-y$. Ha $x$ és $y$ közelebb vannak egymáshoz, mint a végpontokhoz, akkor teljesülnek az $y-x<x$ és az $y-x<1-y$ egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy $x\leq y$, $y<2x$, $y<\frac{1+x}{2}$. Mindhárom egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza az $y=x$, $y=2x$, $y=\frac{1+x}{2}$ egyenesek által határolt háromszög.
Ha $y<x$, akkor egymástól való távolságuk $x-y$, a végpontoktól való távolságuk $y$ illetve $1-x$. Ha közelebb vannak egymáshoz, mint a végpontokhoz, akkor teljesülnek a $x-y<y$ és az $x-y<1-x$ egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy $y<x$, $x<2y$, $2x-1<y$. Mindhárom egyenlőtlenségnek eleget tevő pontok halmaza az $y=x$, $y=2x$, $y=2x-1$ egyenesekkel határolt háromszög.
A jó pontok halmaza egy olyan rombusz, aminek az egyik átlója $\sqrt{2}$, a másik átlója $\frac{\sqrt{2}}{3}$. A jó pontok összes területe tehát $\frac{1}{3}$, vagyis a keresett valószínűség éppen $\frac{1}{3}$.

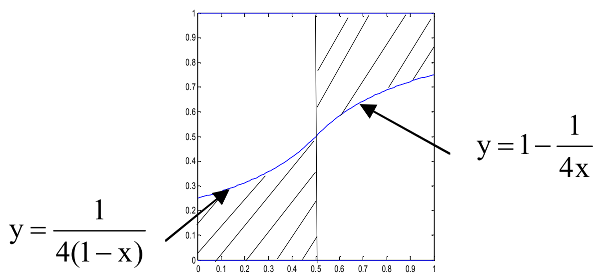
9) $\Omega = [-1,1]x[-1,1]$. $t_\Omega = 4$. $x < y^2$ vagy $y < x^2$. Ha valamelyik koordináta negatív, akkor valamelyik egyenlőtlenség teljesül. Ha mindkét koordináta nemnegatív, akkor négyzetgyököt vonhatunk az első egyenlőtlenségekből, azaz $\sqrt{x} < y$ vagy $y < x^2$. A kedvező pontok halmaza:




$$t_{jó} = 3 + \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 (1-\sqrt{x})dx = 3 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x - \frac{\sqrt{x^3}}{1.5}\right]_0^1 = \frac{11}{3}.\ P = \frac{11}{12} = 0.917.$$

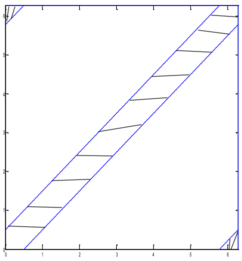
10) Legyen az elsőre választott szám $x$. Ez a $[0,1]$ intervallumot két részre bontja, az egyik részintervallum $x$ hosszúságú, a másik $1-x$. Ha a hosszabbik $x$, akkor $x > \frac{1}{2}$, ha a hosszabbik $1-x$, akkor $x < \frac{1}{2}$. Nézzük először az $x > \frac{1}{2}$ esetet. Az $x$ hosszúságú szakasz kettéosztását megtehetjük oly módon, hogy választunk egy véletlen számot $[0,1]$-ről $x$-től függetlenül és ezzel megszorozzuk $x$-et. Így $[0,1] = [0, xy] \cup [xy, x] \cup [x,1]$, a középen kialakuló szakasz hossza $x - xy = x(1-y)$. A feltétel szerint $x(1-y) < \frac{1}{4}$. Mivel az $x$ és $y$ számoknak megfeleltethetők a $[0,1]$x$[0,1]$ pontjai, ezért keressük a négyzet azon $Q(x,y)$ pontjait, amelyekre $x > \frac{1}{2}$ és $x(1-y) < \frac{1}{4}$. Az utóbbi egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $1 - \frac{1}{4x} < y$. Az $x < \frac{1}{2}$ esetben az $1-x$ hosszúságú szakaszt osztjuk két részre oly módon, hogy szorozzuk a $[0,1]$ intervallum egyik számával, $y$-nal.

Ekkor $[0,1] = [0,x] \cup [x, x+(1-x)y] \cup [x+(1-x)y, 1]$, és a középen kialakuló szakasz hossza $(1-x)y$. A feltétel szerint $(1-x)y < \frac{1}{4}$, amit átrendezve kapjuk, hogy $y < \frac{1}{4(1-x)}$. A kedvező pontok halmaza az alábbi:



$$t_{jó}=\int_0^{0.5}\frac{1}{4(1-x)}dx+\int_{0.5}^{1}1-(1-\frac{1}{4x})dx=\left[-\frac{1}{4}\ln(1-x)\right]_0^{0.5}+\left[\frac{1}{4}\ln x\right]_{0.5}^{1}=0.346\text{ . }P=0.346.$$

11) A két pont kiválasztása a körvonalon két pont választását jelenti a $[0,2\pi]$ szakaszon. Jelöljük $x$-szel az első, $y$-nal a második pontot (számot). A két pont körvonalon vett távolsága $|x-y|$, ez éppen a hozzájuk tartozó középponti szög nagysága ha $|x-y|\le\pi$. Legyen tehát először $|x-y|\le\pi$ . Ekkor a két pontot összekötő szakasz hosszát $h$-val jelölve $\frac{h}{2}=\sin\frac{|x-y|}{2}<\frac{1}{4}$, vagyis $\sin\frac{|x-y|}{2}<\frac{1}{4}$. Tekintetbe véve, hogy $\frac{|x-y|}{2}\ge 0$, ezért $\frac{|x-y|}{2}<\arcsin 0.25\approx 0.25$ vagyis $|x-y|<0.5$. Amennyiben $|x-y|>\pi$ , akkor a két ponthoz tartozó középponti szög $2\pi-|x-y|$, vagyis $\frac{h}{2}=\sin(\frac{2\pi-|x-y|}{2})<\frac{1}{4}$, vagyis $\frac{2\pi-|x-y|}{2}<$ arcsin0.25 $\approx 0.25$. Így $2\pi-0.5<|x-y|$. A fenti egyenlőtlenségeknek eleget tevő pontok halmaza (lsd. 6.d feladat)



$t_{jó}=(2\pi)^2-2(2\pi-0.5)^2/2+2\cdot 0.5^2/2=6.28$, $P$=0.159.

12) Legyen a lerögzített pont $O$, a véletlenszerűen választott pont ettől a körvonalon $0\le x\le 2\pi$ távolságra van. Ha $0<x<\pi$, akkor az ívhez tartozó szakasz hosszát $h$-val jelölve $\frac{h}{2}=\sin\frac{x}{2}<\frac{1}{4}$, ami azt jelenti, hogy $x<2\arcsin\frac{1}{4}\approx 0.5$. Ha $\pi<x<2\pi$, akkor $\frac{h}{2}=\sin\frac{2\pi-x}{2}<\frac{1}{4}$, vagyis $\frac{2\pi-x}{2}<2\arcsin\frac{1}{4}\approx 0.25$, azaz $2\pi-0.5<x<2\pi$. Ha $x$=0 vagy $x=2\pi$, akkor a kialakuló szakasz elfajul, hossza 0. Tehát $A=[0,0.5)\cup(2\pi-0.5,2\pi]$, $h(A)=2\cdot 0.5=1$, $P(A)=\frac{1}{2\pi}=0.159$

13) Legyen például a kijelölt intervallum $[0{,}3,0.55]$, ennek hossza 0.25.

```
function egy(szimszam)
format long
a=0.3
b=0.55
gyakorisag=0
for i=1:1:szimszam
veletlenszam=rand(1);
if a<=veletlenszam & veletlenszam<=b
gyakorisag=gyakorisag+1;
end
```

```
end
relgyak=gyakorisag/szimszam
```

A kapott relatív gyakoriságok:

| *N* | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| Rel. gyak | 0.21 | 0.2459 | 0.250295 | 0.25000023 |

14) $a$=0.9, $b$=0.06 választás mellett $ab = 0.054$

```
function egyketdim(szimszam)
format long
a=0.9
b=0.06
gyakorisag=0;
gyakorisagelso=0;
gyakorisagmasodik=0;
for i=1:1:szimszam
veletlenszam1=rand(1);
if veletlenszam1<a
    gyakorisagelso=gyakorisagelso+1;
end
veletlenszam2=rand(1);
if veletlenszam2<b
    gyakorisagmasodik=gyakorisagmasodik+1;
end
if veletlenszam1<a & veletlenszam2<b
gyakorisag=gyakorisag+1;
end
end
relgyak=gyakorisag/szimszam
relgyak1=gyakorisagelso/szimszam
relgyak2=gyakorisagmasodik/szimszam
elteres=abs(relgyak-a*b)
```

A kapott relatív gyakoriságok és az eltérések:

| *N* | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| rel.gyak1 | 0.92 | 0.9027 | 0.900168 | 0.90001934 |
| Eltérés | 0.02 | 0.0027 | 0.000168 | 0.00001934 |
| relgyak2 | 0.03 | 0.0608 | 0.060498 | 0.05998647 |
| Eltérés | 0.03 | 0.0008 | 0.000498 | 0.00001353 |
| Rel.gyak szorzat | 0.03 | 0.0550 | 0.054402 | 0.05399238 |
| Eltérés | 0.024 | 0.0010 | 0.000402 | 0.00000762 |

15)

```
function negyzetes(szimszam)
format long
gyakorisag=0;
for i=1:1:szimszam
veletlenszam1=rand(1);
veletlenszam2=rand(1);
if veletlenszam2<veletlenszam1^2
    gyakorisag=gyakorisag+1;
```

```
end
end
relgyak=gyakorisag/szimszam
```

A kapott relatív gyakoriságok és az eltérések:

| *N* | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| Rel. gyak. | 0.32 | 0.3348 | 0.332462 | 0.33338707 |
| eltérés | 0.013 | 0.0015 | 0.000871 | 0.00005374 |

# Összetett események valószínűsége, események függetlensége

## Feladatok

1) Igazolja, hogy ha $A$ és $B$ független események, akkor $\overline{A}$ és $B$, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek!

2) Kiválasztunk egy hallgatót a felsőoktatásban tanuló aktív féléves hallgatók közül. Legyen $A$ az az esemény, hogy a hallgató államilag finanszírozott képzésben vesz részt, $B$ az az esemény, hogy a hallgató kommunikáció szakos. Tegyük fel, hogy $P(A)$=0.6, $P(B)$=0.05 és $P(A \cap B)$=0.015. Fejezzük ki $A$-val és $B$-vel az alábbi eseményeket és adjuk meg a valószínűségüket!

   a) A hallgató kommunikáció szakos, de nem államilag finanszírozott képzésben vesz részt.
   b) A hallgató nem kommunikáció szakos és nem államilag finanszírozott képzésben vesz részt.
   c) A hallgató kommunikáció szakos vagy államilag finanszírozott képzésben vesz részt.
   d) A hallgató nem kommunikáció szakos vagy államilag finanszírozott képzésben vesz részt.

3) Két szerencsejátékot játszunk. Tegyük fel, hogy annak a valószínűsége, hogy az első játékon nem nyerünk 0.995, annak a valószínűsége, hogy a másodikon nem nyerünk 0.99, valamint a két esemény független. Fejezze ki az alábbi eseményeket az említett eseményekkel és adja meg valószínűségüket!

   a) Valamelyik játékon nyerünk.
   b) Valamelyik játékon nem nyerünk.
   c) Az elsőn nyerünk, a másodikon nem.
   d) Az egyiken nyerünk, a másikon nem.
   e) Egyiken se nyerünk.
   f) Mindegyiken nyerünk.
   g) Mindkettőn nyerünk vagy egyiken sem.

4) Húzunk egy lapot a magyar kártyából. Legyen $A$ az az esemény, hogy a választott lap hetes, B az az esemény, hogy a választott lap piros. Fejezze ki $A$-val és $B$-vel az alábbi eseményeket és adja meg valószínűségüket!

   a) A kiválasztott lap piros és hetes.
   b) A kiválasztott lap piros vagy hetes.
   c) A kiválasztott lap piros, de nem hetes.
   d) A kiválasztott lap nem piros és nem hetes.
   e) A kiválasztott lap nem piros vagy nem hetes.
   f) A kiválasztott lap piros vagy nem hetes.
   g) Független-e $A$ és $B$?

5) Húzunk két lapot visszatevéssel a magyar kártyából. Legyen $A$ az az esemény, hogy az elsőre választott lap hetes, B az az esemény, hogy a másodszorra választott lap hetes. Fejezze ki $A$-val és $B$-vel az alábbi eseményeket és adja meg valószínűségüket!

   a) Valamelyik lap hetes.
   b) Valamelyik lap nem hetes.

c) Egyik hetes, másik nem.
d) Egyik sem hetes.
e) Független-e $A$ és $B$?

6) Háromszor feldobunk egy szabályos érmét. Legyen $A$ az az esemény, hogy van fej a dobások között, $B$ az az esemény, hogy van írás a dobások között. Független-e $A$ és $B$?

7) Az összes lehetséges szabályos (3 betű-3 számjegy alakú) rendszám közül választunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott rendszám

a) minden betűje vagy minden számjegye azonos?
b) minden betűje vagy minden számjegye különböző?

8) Egy urnában 20 golyó van, köztük 9 piros, 6 fehér és 5 zöld, amelyeket számozással megkülönböztetünk. Közülük visszatevés nélkül választunk 4 darabot. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) A kiválasztott golyók közt van piros vagy van zöld golyó.
b) A kiválasztott golyók közt van piros, és van zöld golyó.

9) A számítógépünkbe behelyezünk egy CD-t, amin 10 szám van egytől tízig számozva. A gépet random üzemmódra állítjuk, ami azt jelenti, hogy véletlen sorrendben játsszuk le a számokat, mindegyiket egyszer. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Az első számot az első alkalommal játssza a gép.
b) A hetedik számot később halljuk, mint a hetedik lejátszás.
c) Az első számot az első alkalommal játssza a gép, de az ötödiket nem játssza az ötödik alkalommal.
d) Az első és az ötödik szám valamelyikét a helyén játssza a gép.
e) Az első és az ötödik szám valamelyikét nem játssza a helyén a gép.
f) Az első és az ötödik szám egyikét sem játssza a helyén a gép.
g) Az első és az ötödik szám egyikét a helyén játssza a gép, a másikat nem.
h) Az első, az ötödik és a tizedik szám valamelyikét helyén játssza a gép.
i) Valamelyik számot a helyén játssza a gép.
j) Valamelyik számot nem játssza a helyén a gép.
k) Egyik számot se játssza a helyén a gép.
l) Függetlenek-e $A_1 =$ az első számot első alkalommal játssza gép, és az $A_5 =$ az ötödik számot az ötödik alkalommal játssza a gép események?

10) Egy ember bemegy egy lépcsőházba, a 10 postaláda közül ötöt kiválaszt és beletesz mindegyikbe egy-egy szórólapot. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Az egyes postaládába jut szórólap.
b) Az egyes postaládába jut szórólap, de a hatosba nem.
c) Az egyes vagy a hatos valamelyikébe jut szórólap.
d) Az egyesbe és a hatosba se jut szórólap.
e) Az egyesbe jut, vagy a hatosba nem.
f) Az egyes illetve a hatos valamelyikébe nem jut.
g) Az egyes és a hatos közül az egyikbe jut, a másikba nem.

11) Egy ember bemegy egy lépcsőházba, a 10 postaláda közül ötöt kiválaszt és beletesz mindegyikbe egy-egy szórólapot. Aztán bemegy egy másik terjesztő és a 10 postaláda közül kiválaszt öt postaládát és beletesz egy-egy szórólapot. Mennyi a valószínűsége az alábbi eseményeknek?

a) Az egyes postaládába jut szórólap.
b) Az egyes postaládába jut szórólap, de a hatosba nem.
c) Az egyes és a hatos valamelyikébe jut szórólap.
d) Az egyesbe és a hatosba se jut szórólap.
e) Az egyes illetve a hatos valamelyikébe nem jut szórólap.

12) Ötször gurítunk egy szabályos kockát.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a gurítások maximuma pontosan 4?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy van páros és van páratlan gurítás is?

13) Két kockával gurítunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy az első gurítás egyes, $B$ az az esemény, hogy a második gurítás 6-os, $C$ az az esemény, hogy a gurítások összege 7.

a) Független-e $A$ és $B$?
b) Független-e $A$ és $C$?
c) Független-e $B$ és $C$?
d) Független-e $A \cap B$ és $C$?
e) Független-e $A \setminus B$ és C?
f) Független-e $A$, $B$ és C?

14)

a) Egymástól függetlenül kitöltünk $n$ darab lottószelvényt. Mennyi a valószínűsége, hogy van köztük öttalálatos szelvény $n = 10^6$, $n = 10^7$, $n = 4.4 \cdot 10^7$ szelvény esetén?
b) Hány szelvényt töltsünk ki, ha azt szeretnénk, hogy legalább $p$ valószínűséggel legyen köztük öttalálatos? Adja meg a szükséges lottószelvények számát, ha $p = 0.1$, $p = 0.5$, $p = 0.9$!
(Az ötös lottón a játékos 5 számot bejelöl a 90 szám közül, a húzás során szintén ötöt sorsolnak ki a 90 szám közül. A játékosnak annyi találata van, ahány közös elem van a bejelölt és a kisorsolt számok között.)

15)

a) Egymástól függetlenül kitöltünk $n$ darab lottószelvényt. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik legalább kéttalálatos?
b) Hány szelvényt töltsünk ki, ha azt szeretnénk, hogy legalább $p$ valószínűséggel legyen köztük legalább kéttalálatos? Adja meg a szükséges lottószelvények számát, ha $p = 0.1$, $p = 0.5$, $p = 0.9$!

# Megoldások

1) Ha $A$ és $B$ függetlenek, akkor $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A})P(B).$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$$
$$= (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

2)

a) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.035$.
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.6 + 0.05 - 0.015) = 0.365$.
c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.635$.

d) $P(A \cup \overline{B}) = P(A) + P(\overline{B}) - P(A \cap \overline{B}) = 0.6 + (1 - 0.05) - (0.6 - 0.015) = 0.965$.

3) $\overline{A}$ = az első játékon nyerünk, $P(\overline{A}) = 0.005$, $\overline{B}$ = a második játékon nyerünk, $P(\overline{B}) = 0.01$. A függetlenség miatt $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.00005$.

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0.00005 = 0.99995$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.005 + 0.01 - 0.00005 = 0.01495$

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0.00495$

d) $P(\overline{A} \cap B \cup A \cap \overline{B}) = P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(B)P(\overline{A}) + P(A)P(\overline{B}) = 0.0149$

e) $P(A \cap B) = 0.00005$

f) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0.98505$

g) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cup A \cap B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = 0.9851$

4) $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = P(\textit{piros} \quad \textit{hetes}) = \frac{1}{32}$, vagyis $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A$ és $B$ függetlenek.

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{32}$.

c) $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B) = \frac{7}{32}$.

d) $P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{21}{32}$.

e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{31}{32}$.

f) $P(B \cup \overline{A}) = P(B) + P(\overline{A}) - P(B \cap \overline{A}) = \frac{8}{32} + \frac{28}{32} - \frac{7}{32} = \frac{29}{32}$.

g) Függetlenek.

5) $P(A) = \frac{4 \cdot 32}{32^2} = \frac{4}{32}$, $P(B) = \frac{32 \cdot 4}{32^2} = \frac{4}{32}$, $P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32}$.

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{32} + \frac{4}{32} - \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} = 0.234$.

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} = 0.984$.

c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) - P(\varnothing) =$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(B \cap A) - 0 = \frac{4}{32} - \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} - \frac{4}{32} - \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} = 0.219$.

d) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.234 = 0.766$.

e) $P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 4}{32 \cdot 32} = \frac{4}{32} \cdot \frac{4}{32} = P(A) \cdot P(B)$, tehát független $A$ és $B$.

6) $\overline{A}=$ nincs fej, $P(\overline{A})=\frac{1}{8}$, $\overline{B}=$ nincs írás, $P(\overline{B})=\frac{1}{8}$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0\neq P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$, vagyis $\overline{A}$ és $\overline{B}$ nem függetlenek, de akkor $A$ és $B$ sem.

7) $\Omega=\{(b_1,b_2,b_3,i_1,i_2,i_3)\,|\,b_j \textit{ betű},\quad i_j \textit{ számjegy}, j=1,2,3\}$, $|\Omega|=26^3\cdot 10^3$.

a) $A$=Minden betű azonos $|A|=26\cdot 1\cdot 1\cdot 10\cdot 10\cdot 10=26000$,

$P(A)=\frac{26000}{17576000}=\frac{1}{26^2}=0.0015$,

$B$=Minden számjegy azonos, $|B|=26\cdot 26\cdot 26\cdot 10=175760$,

$P(B)=\frac{175760}{17576000}=\frac{1}{10^2}=0.01$

Kérdés: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

$|A\cap B|=26\cdot 10$, $P(A\cap B)=\frac{26\cdot 10}{26^3\cdot 10^3}=\frac{1}{26^2\cdot 10^2}=0.000015$,

$P(A\cup B)=0.01+0.0015-0.000015=0.011485$.

b) $C$=mindegyik betű különböző, $|C|=26\cdot 25\cdot 24\cdot 10\cdot 10\cdot 10=15600000$, $P(C)=0.8875$.

$D$= mindegyik számjegy különböző, $|D|=26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 9\cdot 8=12654720$, $P(D)=0.72$.

Kérdés: $P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$.

$|C\cap D|=26\cdot 25\cdot 24\cdot 10\cdot 9\cdot 8=11232000$, $P(C\cap D)=0.639$,

$P(C\cup D)=0.8875+0.72-0.639=0.9685$.

8) $A$: nincs piros, $B$= nincs zöld,

$$P(A)=\frac{\binom{11}{4}}{\binom{20}{4}}=0.068,\quad P(B)=\frac{\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}}=0.282,\quad P(A\cap B)=\frac{\binom{6}{4}}{\binom{20}{4}}=0.003.$$

a) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=0.997$.

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=0.653$.

9) A lehetséges lejátszások megfeleltethetők az 1,2,….,10 számok egy sorba rendezésének. $|\Omega|=10!=3628800$. $A_i=$ az $i$-edik számot az $i$-edik alkalommal játssza le a gép.

a) $P(A_i)=\frac{1\cdot 9\cdot\ldots\cdot 1}{10!}=\frac{1}{10}$, i=1,2,.., 10.

b) $B$ legyen az az esemény, hogy a 7. számot a 7. lejátszásnál később játssza a gép.

$P(B)=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10!}=0.3$

(Ha $B$ teljesül, akkor a 7. számot a 8., 9., 10. helyen játszhatja a gép.)

c) $P(A_1\cap\overline{A_5})=P(A_1)-P(A_1\cap A_5)$, $P(A_1\cap A_5)=\frac{1\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10!}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}$,

$P(A_1\cap\overline{A_5})=\frac{1}{10}-\frac{1}{90}=\frac{8}{90}=0.089$.

d) $P(A_1 \cup A_5) = P(A_1) + P(A_5) - P(A_1 \cap A_5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{90} = 0.189$.

e) $P(\overline{A_1} \cup \overline{A_5}) = P(\overline{A_1 \cap A_5}) = 1 - P(A_1 \cap A_5) = 1 - \frac{1}{90} = 0.989$.

f) $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_5}) = P(\overline{A_1 \cup A_5}) = 1 - P(A_1 \cup A_5) = 1 - 0.189 = 0.811$.

g) $P(A_1 \cap \overline{A_5} \cup A_5 \cap \overline{A_1}) = P(A_1 \cap \overline{A_5}) + P(A_5 \cap \overline{A_1}) - P(\varnothing) = 0.1 - \frac{1}{90} + 0.1 - \frac{1}{90} = 0.178$.

h) $P(A_1 \cup A_5 \cup A_{10}) = P(A_1) + P(A_5) + P(A_{10}) -$
$- P(A_1 \cap A_5) - P(A_5 \cap A_{10}) - P(A_1 \cap A_{10}) + P(A_1 \cap A_5 \cap A_{10})$.

$P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{90}$, $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{7!}{10!} = 0.001$,

$P(A_1 \cup A_5 \cup A_{10}) = 3 \cdot \frac{1}{10} - 3 \cdot \frac{1}{90} + \frac{1}{720} = 0.268$.

i) $P(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = \sum_{i=1}^{10} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) +$

$+ \sum_{i,<j<,k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots\ldots + (-1)^{11} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10})$.

$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_m}) = \frac{(10-m)!}{10!}$,

$\sum_{k_1<\ldots<k_m} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_m}) = \binom{10}{m} \frac{(10-m)!}{m!} = \frac{10!}{m!((10-m)!} \cdot \frac{(10-m)!}{10!} = \frac{1}{m!}$

$P(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!} = 0.6321$.

j) $P(\bigcup_{i=1}^{10} \overline{A_i}) = P(\overline{\bigcap_{i=1}^{10} A_i}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{10} A_i) \approx 1$, mivel $P(\bigcap_{i=1}^{10} A_i) = \frac{1}{10!}$.

k) $P(\bigcap_{i=}^{10} \overline{A_i}) = P(\overline{\bigcup_{i=1}^{10} A_i}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{10} A_i) = 0.3679$.

l) Függetlenség esetén $P(A_1 \cap A_5) = P(A_1)P(A_5)$, $\frac{1}{90} \neq \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}$, ezért nem függetlenek.

10)

a) $A_i =$ az i-edik postaládába jut szórólap. $P(A_1) = \frac{5}{10}$. (1. fejezet 5.a)

b) $P(A_1 \cap \overline{A_6}) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_6) =$ 0.5-0.222=0.278. $\left( P(A_i \cap A_j) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{3}}{\binom{10}{5}} = 0.222 \right)$

c) $P(A_1 \cup A_6) = P(A_1) + P(A_6) - P(A_1 \cap A_6) = 0.5 + 0.5 - 0.222 = 0.778$.

d) $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_6}) = P(\overline{A_1 \cup A_6}) = 1 - P(A_1 \cup A_6) = 0.222$.

e) $P(A_1 \cup \overline{A_6}) = P(\overline{\overline{A_1} \cap A_6}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap A_6) = 1 - 0.278 = 0.722$.

f) $P(\overline{A_1} \cup \overline{A_6}) = P(\overline{A_1 \cap A_6}) = 1 - P(A_1 \cap A_6) = 0.778$.

g) $P(A_1 \cap \overline{A_6} \cup \overline{A_1} \cap A_6) = P(A_1 \cap \overline{A_6}) + P(\overline{A_1} \cap A_6) - P(\varnothing) = 2 \cdot 0.222 = 0.444$.

11) $B_i$: Az *i*-edik postaládába jut szórólap. $P(B_i) = 1 - \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{5}} \cdot \frac{\binom{9}{5}}{\binom{10}{5}} = 1 - 0.5^2 = 0.75$.

a) $P(B_1) = 0.75$.

b) $P(B_1 \cap \overline{B_6}) = P(B_1) - P(B_1 \cap B_6) = 0.75 - 0.549 = 0.201$.

$P(B_i \cap B_j) = 0.222 \cdot 0.222 + 2 \cdot 0.222 \cdot 0.222 + 4 \cdot 0.222 \cdot 0.278 + 2 \cdot 0.278^2 = 0.549$.

(Az első terjesztő is és a második is tehet mindkettőbe, vagy az egyik mindkettőbe tesz, a másik egyikbe se, vagy az egyik mindkettőbe tesz, a másik csak az egyikbe, vagy az egyik az csak egyikbe, a másik csak a másikba.)

c) $P(B_1 \cup B_6) = P(B_1) + P(B_6) - P(B_1 \cap B_6) = 0.75 + 0.75 - 0.549 = 0.951$.

d) $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_6}) = 1 - P(B_1 \cup B_6) = 1 - (0.75 + 0.75 - 0.549) = 0.049$.

e) $P(\overline{B_1} \cup \overline{B_6}) = 1 - P(B_1 \cap B_6) = 0.451$.

12) $|\Omega| = 6^5$.

a) *A*= gurítások maximuma 4, *C*=gurítások maximuma legfeljebb 4, *D*=gurítások maximuma legfeljebb 3, $A = C \cap \overline{D}$, $P(A) = P(C) - P(C \cap D)$, $C \cap D = D$, $P(C) = \frac{4^5}{6^5} = 0.132$,

$P(D) = \frac{3^5}{6^5} = 0.031$, $P(A) = 0.132 - 0.031 = 0.101$.

b) *B*=van páros és van páratlan gurítás is, *E*= minden gurítás páros, *F*=minden gurítás páratlan, $B = \overline{E} \cap \overline{F} = \overline{E \cup F}$, $P(B) = 1 - P(E \cup F) = 1 - (P(E) + P(F) - P(E \cap F))$,

$P(E) = \frac{3^5}{6^5} = 0.031$, $P(F) = \frac{3^5}{6^5} = 0.031$, $E \cap F = \varnothing$,

$P(B) = 1 - (0.031 + 0.031 - 0) = 0.938$.

13) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

a) $|A \cap B| = 1, P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B)$, függetlenek.

b) $|A \cap C| = 1$, $P(A \cap C) = \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(C)$, függetlenek.

c) $|B \cap C| = 1$, $P(B \cap C) = \frac{1}{36} = P(B) \cdot P(C)$, függetlenek.

d) $|A \cap B \cap C| = 1$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$, nem függetlenek

e) $(A \setminus B) \cap C = \varnothing, P((A \setminus B) \cap C) = 0, P(A \setminus B) = \frac{5}{36}, \mathrm{P}((\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cap \mathrm{C}) \neq \mathrm{P}(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{C})$,

ezért nem függetlenek.

f) $|A\cap B\cap C|=1$, $P(A\cap B\cap C)=\dfrac{1}{36}$, $P(A\cap B\cap C)\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$, tehát bár a páronkénti függetlenség teljesül, a három esemény nem független.

14) $A_i$ : az $i$-edik szelvény öttalálatos, $P(A_i)=\dfrac{1}{\binom{90}{5}}$, $P(\overline{A_i})=1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}}$.

a) $P(nincs \quad öttalálatos)=P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap....\cap\overline{A_n})=(P(\overline{A_i}))^n=(1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}})^n$.

(Mivel az $A_i$ események függetlenek, komplementereik is!)

$P$(van öttalálatos)=1- $(1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}})^n$ ; $n=10^6$ esetén 0.0225, $n=10^7$ esetén 0.204,

$n=4.4\cdot 10^7$ esetén 0.632.

b) $1-(1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}})^n=p$, $(1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}})^n=1-p$, $n=\dfrac{\ln(1-p)}{(1-\dfrac{1}{\binom{90}{5}})}$, $p$=0.1 esetén $n$=4630520, $p$=0.5 esetén 30463322, $p$=0.9 esetén 101196964.

15) $B_i$ : az $i$-edik szelvény legalább kéttalálatos,

$$P(B_i)=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}+\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}+\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}+\frac{\binom{5}{5}\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}},$$

a többi lépés azonos az előző feladatban ismertetettekkel.

# Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétel, Bayes tétel

## Feladatok

1) Két kockával gurítunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy van hatos, $B$ az az esemény, hogy a gurítások összege legalább 8. Adja meg az alábbi feltételes valószínűségeket!

   a) Feltéve, hogy van hatos, mennyi a valószínűsége, hogy a gurítások összege legalább 8?
   b) Feltéve, hogy nincs hatos, mennyi a valószínűsége, hogy a gurítások összege kevesebb, mint 8?
   c) Feltéve, hogy nincs hatos, mennyi a valószínűsége, hogy a gurítások összege legalább 8?
   d) Feltéve, hogy a gurítások összege legalább 8, menyi a valószínűsége, hogy van hatos?
   e) Feltéve, hogy a gurítások összege legalább 8, mennyi a valószínűsége, hogy nincs hatos?
   f) Feltéve, hogy a gurítások összege kevesebb, mint 8, mennyi a valószínűsége, hogy nincs hatos?
   g) Független-e $A$ és $B$?

2) Két kockával gurítunk. Legyen $A$ az az esemény, hogy az első gurítás egyes, $B$ az az esemény, hogy a második gurítás 6-os, $C$ az az esemény, hogy a gurítások összege 7.

   a) Adja meg a $P(A \mid B)$ , $P(A \mid \overline{B})$ , $P(\overline{B} \mid A)$ feltételes valószínűséget!
   b) Adja meg a $P(A \cup B \mid C)$ feltételes valószínűséget!
   c) Adja meg a $P(A \setminus B \mid C)$ feltételes valószínűséget!

3) Három kockával gurítunk.

   a) Feltéve, hogy mindhárom gurítás különböző, mennyi a valószínűsége, hogy nincs hatos a gurítások közt?
   b) Feltéve, hogy nincs hatos a gurítások közt, mennyi a valószínűsége, hogy mindhárom gurítás különböző?
   c) Feltéve, hogy van hatos a gurítások közt, mennyi a valószínűsége, hogy van legalább két azonos gurítás?
   d) Feltéve, hogy van legalább két azonos gurítás a gurítások közt, mennyi a valószínűsége, hogy van hatos gurítás?

4) Visszatevés nélkül választunk 3 lapot a magyar kártyából. Legyen $A$ az az esemény, hogy van piros lap a kivettek közt, $B$ az az esemény, hogy van zöld lap a kivettek közt.

   a) Adja meg a $P(A \mid B)$ feltételes valószínűséget!
   b) Független-e $A$ és $B$?
   c) Adja meg a $P(A \cap B \mid A \cup B)$ feltételes valószínűséget!
   d) Független-e $A \cup B$ és $A \cap B$?

5) Kitöltünk egy ötös lottót. Feltéve, hogy legalább egy számot eltalálunk, mennyi a valószínűsége, hogy legalább kettesünk lesz a lottón?

6) A jogosítvánnyal rendelkező emberek 20%-a 25 év alatti, 80%-a 25 éves vagy annál idősebb. A 25 év alattiak 0.1, a 25 év felettiek 0.05 valószínűséggel érintettek balesetben egy bizonyos hosszúságú időszakban.

a) Kiválasztva egy embert, mennyi a valószínűsége, hogy érintett balesetben az időszakban?
b) Feltéve, hogy a kiválasztott ember érintett balesetben az adott időszakban, mennyi a valószínűsége, hogy 25 év alatti?
c) Feltéve, hogy a kiválasztott ember érintett a balesetben az adott időszakban, melyik korcsoporthoz tartozik nagyobb valószínűséggel?
d) Feltéve, hogy a kiválasztott ember nem érintett balesetben az adott időszakban, mennyi a valószínűsége, hogy 25 év alatti az illető?
e) Feltéve, hogy a kiválasztott ember nem érintett balesetben az adott időszakban, mennyi a valószínűsége, hogy 25 éves vagy a feletti az illető?
f) Igaz-e az alábbi állítás: ha a kiválasztott ember 25 év alatti, akkor nagyobb valószínűséggel érintett balesetben a megadott időszakban, mintha 25 éves vagy afeletti?
g) Igaz-e az alábbi állítás: ha a kiválasztott érintett balesetben a megadott időszakban, akkor nagyobb valószínűséggel 25 év alatti, mint 25 éves vagy afeletti?
h) Melyik állítás tekinthető „tapasztalati ténynek” illetve melyik állítás „előítéletnek” az f) és g) –ben megfogalmazott állítások közül?

7) A felnőtt korú munkaképes lakosság 20%-a beszél legalább egy idegen nyelvet és 80%-a nem beszél idegen nyelven. A nyelvet beszélők 0.025, a nyelvet nem beszélők 0.10 valószínűséggel munkanélküliek egy adott időpillanatban.

a) Kiválasztva egy embert, mennyi az esélye hogy munkanélküli az adott időpillanatban?
b) Ha a kiválasztott ember nem munkanélküli az adott időpillanatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem beszél idegen nyelvet?

8) Egy alkalommal egy szolgáltató egység hibás számlakivonatokat küld ki az ügyfeleinek. A tapasztalat azt mutatja, hogy az emberek 65%-a nézi át a számára elküldött számlakivonatokat, 35%-uk nem nézi át őket. Ha egy ember átnézi a számlakivonatot, akkor 0.55 valószínűséggel találja meg a benne rejlő hibát, ha nem nézi át, akkor biztosan nem találja meg a benne rejlő hibát.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy ember megtalálja a számára küldött számlakivonatban a hibát?
b) Feltéve, hogy az ember nem találja meg a hibát a számlakivonatban, mennyi a valószínűsége, hogy nem nézte át a kivonatot?

9) Két lapot választunk visszatevés nélkül a magyar kártyából. Legyen $A$ az az esemény, hogy az első húzás piros, $B$ az az esemény, hogy a második húzás piros.

a) Mennyi az valószínűsége, hogy a második húzás piros?
b) Független-e $A$ és $B$?
c) Feltéve, hogy a második húzás piros, mennyi a valószínűsége, hogy az első nem piros?
d) Feltéve, hogy a második húzás nem piros, mennyi a valószínűsége, hogy az első húzás piros?

10) Egy tesztkérdésre kell válaszolnia egy hallgatónak, 5 lehetséges válaszból kell kiválasztania a helyeset. A hallgató $p$ valószínűséggel tudja a választ, és ekkor helyesen válaszol. Ha nem tudja a választ, akkor egyforma valószínűséggel tippel bármelyik lehetséges megoldásra, és 0.2 valószínűséggel találja el a helyes választ. Kijavítván a feladatot kiderül, hogy helyes a válasz.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy tippelt a hallgató?
b) Mely $p$ esetén maximális a fenti valószínűség?

11) Egy játékot játszunk. Elgurítunk egy kockát, ha a dobás 2 vagy 5, akkor mi nyerünk, ha 3, akkor az ellenfelünk, ha pedig 1, 4 vagy 6, akkor újra gurítunk az előző feltételekkel.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy mi nyerünk a játék során?
b) Feltéve, hogy mi nyerünk, mennyi a valószínűsége, hogy a játék a harmadik gurítás során dől el?

12) A népesség 45%-a A vércsoportú, 40%-a nullás vércsoportú, 12%-a B vércsoportú, és 3%-a AB vércsoportú.

a) Véletlenszerűen (visszatevéssel) kiválasztunk közülük két egyedet. Mennyi a valószínűsége, hogy azonos vércsoportúak?
b) Ha a kiválasztott emberek azonos vércsoportúak, mennyi a valószínűsége, hogy mindketten nullás vércsoportúak?
c) Ha a kiválasztott emberek azonos vércsoportúak, mennyi a valószínűsége, hogy nem igaz, mindketten nullás vércsoportúak?
d) Feltéve, hogy a kiválasztott emberek különböző vércsoportúak, mennyi a valószínűsége, hogy egyik sem nullás vércsoportú?

13) Egy urnában $n$ darab és $m$ darab fehér golyó van. Kiveszünk egy golyót, megnézzük a színét, visszarakjuk az urnába és további $k$ darab ugyanolyan színű golyót helyezünk az urnába. Ezek után az így felduzzasztott urnából választunk egy golyót. ($n \geq 1$, $m \geq 1$, $k \geq 1$ egészek.)

h) Mennyi a valószínűsége, hogy a másodszorra kiválasztott golyó piros?
i) Feltéve, hogy a másodszorra kiválasztott golyó piros, mennyi a valószínűsége, hogy előszörre fehér golyót választottunk?

14) Szindbád előtt elvonul a hárem összes hölgye, akik között szépség szerint egyértelmű sorrend áll fenn. Szindbád célja, hogy kiválassza a legszebbet. Minden elvonulónál Szindbád nyilatkozhat, hogy az aktuális hölgyet választja-e vagy nem, de később már nem választhatja a korábban elvonultakat. Szindbád elenged $k$ számú hölgyet, és az ezt követők közül azt választja, aki a korábban elvonultak mindegyikénél szebb, ha ilyen nincs, akkor az utolsót ($k$ stratégia). A hölgyek számát jelölje $N$.

j) Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül a legszebb hölgyet kiválasztania?
k) Számítsa ki számítógéppel a kapott valószínűségeket $N$=100, $k=1,2,\ldots,N-1$ esetén és ábrázolja grafikonon a kapott valószínűségeket!
l) Ha $N$ hölgy esetén $k = cN$, akkor mely $c$ értékénél lesz a fenti valószínűség maximális?
m) Hova tart ez a maximális valószínűség, ha $N \to \infty$?
n) Szimulálja le a feladatot $N$=100, $k$=10, 20, 30, 40, 50 választással, és ábrázolja a relatív gyakoriságokat $k$ függvényében!

15) Egy játékos előtt 3 ajtó, kettő mögött nincs nyeremény, harmadik mögött pedig nagy értékű nyeremény áll. Ha a versenyző jól választ, akkor övé a nyeremény, ha nem jól választ, akkor üres kézzel térhet haza. A játékos az első ajtót választja. Ezután a játékvezető a maradék két ajtó közül választ egy olyat, ami mögött nincs nyeremény, (ha több ilyet is választhat, akkor véletlenszerűen böki ki valamelyiket), esetünkben épp a hármas ajtót. Megmutatja a játékosnak, hogy ott nincs a nyeremény, és felajánlja a játékosnak, hogy ha akar, újra választhat. Ezen információ birtokában mennyi a valószínűsége, hogy az egyes/ kettes ajtó mögött van a nyeremény? Meggondolja-e magát a játékos?

# Megoldások

1) $P(A)=\frac{11}{36}$, $P(B)=\frac{15}{36}$, $P(A\cap B)=\frac{9}{36}$.

a) $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{9}{11}$.

b) $P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\frac{19}{25}=0.76$.

c) $P(B\mid\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{P(B\setminus A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{6}{25}=0.24$.

d) $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{9}{15}=0.6$.

e) $P(\overline{A}\mid B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\setminus A)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{6}{15}=0.4=1-P(A\mid B)$.

f) $P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{19}{21}=0.905$.

g) Pl: $P(B\mid A)\neq P(B)$, így nem független $A$ és $B$.

2) $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(C)=\frac{1}{6}$, $A$ független B-től, $A$ független $C$-től, $B$ független $C$-től.

a) $P(A\mid B)=P(A)$, $P(A\mid\overline{B})=P(A)$ , $P(\overline{B}\mid A)=P(\overline{B})$ mivel $A$ független $B$-től

b) $P(A\cup B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)-P(A\cap B\mid C)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

$P(A\mid C)=P(A)$, mivel $A$ és $C$ függetlenek, $P(B\mid C)=P(B)$ mivel $B$ és $C$ függetlenek,

$$P(A\cap B\mid C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}.$$

c) $P(A\setminus B\mid C)=P(A\mid C)-P(A\cap B\mid C)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$.

3) Legyen $A$ az az esemény, hogy mindhárom gurítás különböző, $B$ az az esemény, hogy nincs hatos gurítás a gurítások között.

Ekkor $P(A)=\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=0.556$, $P(B)=\frac{5\cdot5\cdot5}{6^3}=0.579$, $P(A\cap B)=\frac{5\cdot4\cdot3}{6^3}=0.278$.

a) $P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5\cdot4\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{2}$.

b) $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5\cdot4\cdot3}{5\cdot5\cdot5}=\frac{12}{25}=0.48$.

c) $P(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{B})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{31}{91} = 0.341$.

d) $P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \dfrac{31}{96} = 0.323$.

4) $A$= van piros, $B$= van zöld.

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = 0.408 \quad P(\overline{B}) = \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = 0.408, \quad P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{\binom{16}{3}}{\binom{32}{3}} = 0.113 =$$

$= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.592 + 0.592 - P(A \cap B))$, tehát $P(A \cap B) = 0.297$.

a) $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.297}{0.592} = 0.502$.

b) Mivel pl. $P(A\,|\,B) \neq P(A)$, ezért nem függetlenek.

c) $P(A \cap B\,|\,A \cup B) = \dfrac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0.297}{0.887} = 0.334$.

d) Mivel $P(A \cap B\,|\,A \cup B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \neq P(A \cap B)$, ezért nem független $A \cup B$ és $A \cap B$.

5) $A$= legalább egy számot eltalálunk, $B$= legalább kettesünk lesz a lottón. $B \subset A$, tehát $A \cap B = B$.

$$P(B\,|\,A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1 - \left(\dfrac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}} + \dfrac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\right)}{1 - \dfrac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}} = \frac{0.023}{0.254} = 0.091.$$

6) $B_1$= a jogosítvánnyal rendelkező ember 25 év alatti, $P(B_1) = 0.2$,
$B_2$ = a jogosítvánnyal rendelkező ember 25 éves vagy a feletti, $P(B_2) = 0.8$,
$B_1$ és $B_2$ teljes eseményrendszert alkotnak.
$A$= a kiválasztott ember érintett balesetben; $P(A\,|\,B_1) = 0.1$, $P(A\,|\,B_2) = 0.05$.

a) $P(A) = P(A\,|\,B_1)P(B_1) + P(A\,|\,B_2)P(B_2) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.05 \cdot 0.8 = 0.06$.

b) $P(B_1\,|\,A) = \dfrac{P(A\,|\,B_1)P(B_1)}{P(A)} = \dfrac{0.1 \cdot 0.2}{0.06} = 0.333$.

c) $P(B_2\,|\,A) = 1 - P(B_1\,|\,A) = 0.667$, $P(B_2\,|\,A) > P(B_1\,|\,A)$, így a 25 év feletti korosztályhoz tartozik a nagyobb valószínűséggel.

d) $P(B_1\,|\,\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A}\,|\,B_1)P(B_1)}{P(\overline{A})} = \dfrac{(1 - 0.1) \cdot 0.2}{1 - 0.06} = 0.191$.

e) $P(B_2 \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \mid B_2)P(B_2)}{P(\overline{A})} = \dfrac{(1-0.05)\cdot 0.8}{1-0.06} = 0.809$,

Vagy egyszerűbben: $P(B_2 \mid \overline{A}) = 1 - P(B_1 \mid \overline{A}) = 1 - 0.191 = 0.809$.

f) $P(A \mid B_1) = 0.01 > P(A \mid B_2) = 0.05$, igaz az állítás.

g) $P(B_1 \mid A) = 0.333 < P(B_2 \mid A) = 0.667$, nem igaz az állítás.

h) Tapasztalat: a fiatalabbak nagyobb eséllyel érintettek, előítélet: ha érintett, akkor nagyobb eséllyel fiatal. A példában nem is igaz.

7) $B_1$ = a kiválasztott ember beszél idegen nyelvet, $B_2$ = a kiválasztott ember nem beszél idegen nyelvet, $A$ = a kiválasztott ember munkanélküli az adott időpillanatban.

$P(A \mid B_1) = 0.025$, $P(A \mid B_2) = 0.1$, $P(B_1) = 0.2$, $P(B_2) = 0.8$.

a) $P(A) = P(A \mid B_1)\cdot P(B_1) + P(A \mid B_2)\cdot P(B_2) = 0.085$.

b) $P(B_2 \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \mid B_2)P(B_2)}{P(\overline{A})} = \dfrac{(1-0.1)\cdot 0.8}{1-0.085} = 0.787$.

8) $A$ = átnézi a számlakivonatot, $\overline{A}$ = nem nézi át a számlakivonatot , $A$ és $\overline{A}$ teljes eseményrendszert alkotnak, $P(A) = 0.65$, $P(\overline{A}) = 0.35$, $E$= észreveszi a hibát. $P(E|A)$=0.55, $P(E \mid \overline{A}) = 0$.

a) $P(E) = P(E \mid A)\cdot P(A) + P(E \mid \overline{A})\cdot P(\overline{A}) = 0.55\cdot 0.65 + 0\cdot 0.35 = 0.3575$.

b) $P(\overline{A} \mid \overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E} \mid \overline{A})\cdot P(\overline{A})}{P(\overline{E})} = \dfrac{1\cdot 0.35}{1-0.3575} = 0.545$, mivel $P(\overline{E} \mid \overline{A}) = 1 - P(E \mid \overline{A}) = 1 - 0$.

9) $A$= első húzás piros, $B$= második húzás piros, $A$ és $\overline{A}$ teljes eseményrendszert alkotnak, $P(A) = \dfrac{8}{32}$, $P(\overline{A}) = \dfrac{24}{32}$, $P(B \mid A) = \dfrac{7}{31}$, $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{8}{31}$.

a) $P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \overline{A})P(\overline{A}) = \dfrac{7}{31}\cdot\dfrac{8}{32} + \dfrac{8}{31}\cdot\dfrac{24}{32} = \dfrac{8\cdot(7+24)}{31\cdot 32} = \dfrac{8}{32} = 0.25$.

b) $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$ fennáll-e? $P(A \cap B) = \dfrac{8\cdot 7}{32\cdot 31} \neq \dfrac{8}{32}\cdot\dfrac{8}{32} = P(A)\cdot P(B)$, nem függetlenek.

c) $P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(B \mid \overline{A})P(\overline{A})}{P(B)} = \dfrac{\frac{8}{31}\cdot\frac{24}{32}}{\frac{8}{32}} = \dfrac{24}{31} = 0.774$.

d) $P(A \mid \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{B} \mid A)P(A)}{P(\overline{B})} = \dfrac{(1 - P(B \mid A))P(A)}{1 - P(B)} = \dfrac{\frac{24}{31}\cdot\frac{8}{32}}{\frac{24}{32}} = \dfrac{8}{31}$.

10) $A$= tudja helyes választ, $\overline{A}$ = tippel, $H$= helyes a válasz, $P(A)=p$, $P(\overline{A}) = 1 - p$, $P(H \mid A) = 1$, $P(H \mid \overline{A}) = 0.2$.

a) $P(\overline{A}\,|\,H)=\dfrac{P(H\,|\,\overline{A})P(\overline{A})}{P(H)}=\dfrac{0.2\cdot(1-p)}{P(H)}$, $P(H)=p+(1-p)\cdot 0.2$,

$P(\overline{A}\,|\,H)=\dfrac{0.2\cdot(1-p)}{p+(1-p)\cdot 0.2}$.

b) $p$=0.

11) $A_i$=a játék az $i$-edik gurítás során dől el, $A_i$ i=1,2,3,… teljes eseményrendszert alkotnak, $P(A_i)=\dfrac{1}{2^{i-1}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^i}$, *NY*= mi nyerünk, $P(NY\,|\,A_i)=\dfrac{2}{3}$.

a) $P(NY)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(NY\,|\,A_i)P(A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=\dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^i=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}=0.667$.

b) $P(A_3\,|\,NY)=\dfrac{P(NY\,|\,A_3)P(A_3)}{P(NY)}=\dfrac{\dfrac{2}{3}P(A_3)}{\dfrac{2}{3}}=P(A_3)=\dfrac{1}{8}$.

12) *A*= az először kiválasztott ember A vércsoportú, *B*=az először kiválasztott ember B vércsoportú, *'AB'*= az először kiválasztott ember 'AB' vércsoportú, *O*= az először kiválasztott ember O-ás vércsoportú, A,B, 'AB' és O teljes eseményrendszert alkotnak, *P(A)*=0.45, *P(B)*=0.12, *P('AB')*=0.03, *P(O)*=0.4, *E*= azonos vércsoportúak, *P(E|A)*=0.45, *P(E|B)*=0.12, *P(E|'AB')*=0.03, *P(E|O)*=0.4.

a) $P(E)=P(E\,|\,A)P(A)+P(E\,|\,B)P(B)+P(E\,|\,'AB')P('AB')+P(E\,|\,O)P(O)=$

$=0.45^2+0.12^2+0.03^2+0.4^2=0.3778$.

b) $P(O\,|\,E)=\dfrac{P(E\,|\,O)P(O)}{P(E)}=\dfrac{0.4\cdot 0.4}{0.3778}=0.4235$.

c) $P(\overline{O}\,|\,E)=1-P(O\,|\,E)=0.5765$.

d) $O^{II}$ a második ember O-ás vércsoportú, $P(\overline{O}\,|\,\overline{E})-P(\overline{O}\cap O^{II}\,|\,\overline{E})=?$

$P(\overline{O}\cap O^{II}\,|\,\overline{E})=\dfrac{P(\overline{O}\cap O^{II}\cap\overline{E})}{P(\overline{E})}=\dfrac{P(\overline{O}\cap O^{II})}{P(\overline{E})}=\dfrac{P(\overline{O})\cdot P(O^{II})}{0.6222}=\dfrac{0.24}{0.6222}=0.386$,

$P(\overline{O}\,|\,\overline{E})=1-P(O\,|\,\overline{E})=1-\dfrac{P(\overline{E}\,|\,O)\cdot P(O)}{P(\overline{E})}=1-\dfrac{0.6\cdot 0.4}{1-0.3778}=1-0.386=0.614$.

$P(\overline{O|E})-P(\overline{O}\cap O^{II}\,|\,\overline{E})=0.614-0.386=0.228$.

13) *A*= elöszörre kivett golyó piros, *B*= a másodszorra kivett golyó piros.

$P(A)=\dfrac{n}{n+m}$, $P(\overline{A})=\dfrac{m}{n+m}$, $P(B\,|\,A)=\dfrac{n+k}{n+m+k}$, $P(B\,|\,\overline{A})=\dfrac{n}{n+m+k}$.

a) $P(B)=P(B\,|\,A)\cdot P(A)+P(B\,|\,\overline{A})P(\overline{A})=\dfrac{n+k}{n+m+k}\cdot\dfrac{n}{n+m}+\dfrac{n}{n+m+k}\cdot\dfrac{m}{n+m}=$

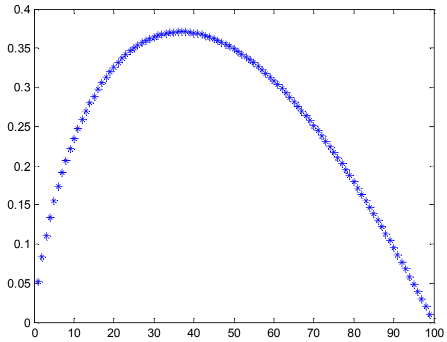
$=\dfrac{n(n+m+k)}{(n+m+k)(n+m)}=\dfrac{n}{n+m}$. (Sok hűhó semmiért.)

b) $P(\overline{A}\mid B)=\dfrac{P(B\mid\overline{A})\cdot P(\overline{A})}{P(B)}=\dfrac{\dfrac{n}{n+m+k}\cdot\dfrac{m}{n+m}}{\dfrac{n}{n+m}}=\dfrac{m}{n+m+k}$.

14)

a) $B_k$ = a $k$ stratégia mellett Szindbád a legszebb hölgyet választja, $A_i$ = a legszebb hölgy $i$.-ként érkezik, $P(A_i)=\dfrac{1}{N}$, $P_k=\sum_{i=1}^{N}P(B_k\mid A_i)P(A_i)$, $P(B_k\mid A_i)=0$, ha $i\le k$ (ha azok között érkezik a legszebb hölgy, akiket elenged, akkor biztosan nem a legszebbet fogja kiválasztani), $P(B_k\mid A_i)=\dfrac{k}{i-1}$ (akkor sikerülhet a legszebbet választania, ha az *i-1* közül a legszebb az első $k$ között érkezik).

$$P(B_k)=\sum_{i=k+1}^{N}P(B_k\mid A_i)P(A_i)=\frac{1}{N}\sum_{i=k+1}^{N}\frac{k}{i-1}=\frac{k}{N}\sum_{i=k}^{N-1}\frac{1}{i}\,,\quad k=1,2,3,\dots,N-1.$$




b) Legyen $c$ olyan, hogy $k=cN$ egész, $\dfrac{k}{N}=c$, $P(B_k)=c\sum_{i=cN}^{N-1}\dfrac{1}{i}$,

$$c\int_{cN}^{N}\frac{1}{x}dx\le P(B_k)\le c\int_{cN-1}^{N-1}\frac{1}{x}dx\,,\quad \int_{cN}^{N}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{cN}^{N}=-\ln c\,,$$

$$\int_{cN-1}^{N-1}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_{cN-1}^{N-1}=\ln\frac{N-1}{cN-1}\approx-\ln c\,.$$

$f(c)=-c\ln c$ maximuma $c=\dfrac{1}{e}$-ben van, tehát $P_k$ akkor maximális rögzített $N$ esetén, ha $k=\left[\dfrac{N}{e}\right]$ vagy $k=\left[\dfrac{N}{e}\right]+1$. $N$=100 esetén $k$=37-nél van a maximum, és ennek értéke 0.37104.

c) A maximális érték határértéke $\dfrac{1}{e}(-\ln(\dfrac{1}{e}))=\dfrac{1}{e}=0.368$

d) (10000 szimuláció esetén)

| $k$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Pontos valószínűség | 0.2348 | 0.3259 | 0.3647 | 0.3695 | 0.3491 |
| Szimuláció eredménye | 0.2346 | 0.3200 | 0.3726 | 0.3733 | 0.3472 |
| Eltérés | 0.0002 | 0.0059 | 0.0079 | 0.0038 | 0.0019 |

```
function szindbadszim(k,szimszam)
format long
N=100 % egytől százig vannak jelölve a hölgyek és százzal jelöljük a
         legszebbet!!!
jo=0;
for n=1:1:szimszam %szimulációszám alkalommal ismételjük a kiválasztást
vel=zeros(1,N);
for ii=1:1:N %felsoroljuk a számokat 1-től százig
vel(1,ii)=ii;
end
for j=1:1:10000 %jól megcserélgetjük a számokat
    veletlenszam1=floor(rand(1)*N+1);
    veletlenszam2=floor(rand(1)*N+1);
    c1=vel(1,veletlenszam1);
    c2=vel(1,veletlenszam2);
    vel(1,veletlenszam1)=c2;
    vel(1,veletlenszam2)=c1;
end
  vel;
  a=vel;
  for i=k+1:1:N
      a(1,i)=0;
  end
  ki=max(a);  %kiválasztjuk  az  első  k  helyen  levő  szám  közül  a
legnagyobbat
  valasztott=0; %eddig még nem választottunk
  b=vel;
  for i=k+1:1:N
      if  b(1,i)>ki  %kiválasztjuk  a  k.  hely  utáni  helyekről  a  ki-nél
nagyobb                elősörre érkező számot, ha van ilyen
          valasztott=vel(1,i);
          b=zeros(1,N);
      end
  end
  if valasztott>0 %ha sikerült választanunk
      if valasztott==N %és ez éppen a legnagyobb szám, ami szerepel a
                      sorozatban
          jo=jo+1;
      end
  end
end
p=jo/szimszam
```

15) $A_1$= egyes ajtó mögött van a nyeremény, $A_2$= kettes ajtó mögött van a nyeremény, $A_3$= hármas ajtó mögött van a nyeremény, $B$= a játékvezető a hármas ajtót nyittatja ki. $P(A_1 \mid B) = ?$, $P(A_2 \mid B) = ?$, $P(A_3 \mid B) = ?$

$P(A_1 \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B)}$, $P(A_2 \mid B) = \dfrac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B)}$, $P(A_3 \mid B) = 0$,

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dfrac{1}{3}$, $P(B \mid A_1) = \dfrac{1}{2}$, $P(B \mid A_2) = 1$ (ha az első ajtó mögött van a nyeremény, akkor a játékvezető a második és a harmadik ajtót is kinyittathatja, ha a második ajtó mögött van a nyeremény, akkor csak a harmadik ajtó jöhet szóba nyittatásra).

$P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)+P(B\mid A_3)P(A_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$.

$P(A_1\mid B)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$, $P(A_2\mid B)=\frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, $P(A_3\mid B)=0$ ,váltson a játékos!

# Diszkrét eloszlású valószínűségi változók és jellemzőik

## Feladatok

1) Egy kockával gurítunk. Ha páros számot gurítunk, akkor annyi pénzt kapunk, amennyit gurítottunk, ha páratlan számot gurítunk, akkor annyi pénzt fizetünk, amennyit gurítunk. Legyen $\xi$ egy játék során a nyereményünk értéke!

   a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
   b) Rajzolja fel $\xi$ eloszlásfüggvényét!
   c) Számolja ki $\xi$ várható értékét és szórását!
   d) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke éppen a várható értékével egyezik meg?

2) Két kockával gurítunk. Legyen $\xi$ a két gurítás egymástól való eltérésének négyzete.

   a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
   b) Számolja ki $\xi$ várható értékét és szórását!
   c) Adja meg $F(0)$, $F(4)$ , $F(5)$ és $F(30)$ értékeit!
   d) Adja meg $\xi$ móduszát és mediánját!

3) Két kockával gurítunk. Legyen $\xi$ a két gurítás minimuma, $\eta$ a két gurítás maximuma.

   a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
   b) Adja meg $\eta$ eloszlását!
   c) Számolja ki a valószínűségi változók várható értékét és szórását!
   d) Adja meg a valószínűségi változók móduszát és mediánját!
   e) Független-e $\xi$ és $\eta$ ?
   f) Igaz-e hogy $\xi \le \eta$ ? Indokolja válaszát!

4) Négyszer feldobunk egy szabályos érmét. Legyen $\xi$ a dobott fejek és írások számának egymástól való eltérése.

   a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
   b) Adja meg $\xi$ eloszlásfüggvényét!
   c) Számolja ki $\xi$ várható értékét és szórását!
   d) Adja meg $\xi$ móduszát és mediánját!

5) Négyszer feldobunk egy szabályos érmét. Legyen $\eta$ a dobott fejek és írások számának négyzetösszege.

   a) Adja meg $\eta$ eloszlását!
   b) Adja meg $\eta$ eloszlásfüggvényét!
   c) Számolja ki $\eta$ várható értékét és szórását!
   d) Adja meg $\eta$ móduszát és mediánját!

6) Az előbbi két feladatban szereplő $\xi$ és $\eta$ valószínűségi változókra számolja ki a $P(\xi = 2, \eta = 10)$ valószínűséget! Független-e $\xi$ és $\eta$?

7) Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még egyszer dobunk, ha írás, akkor még kétszer. Legyen $\xi$ a dobott fejek száma. Az alábbi események közül melyiknek nagyobb a valószínűsége: kevesebb fejet dobunk, mint $M(\xi)$, vagy több fejet dobunk, mint $M(\xi)$?

8) Egy hallgató egy dokumentumot nyomtat. A nyomtatandó dokumentum 0.3 valószínűséggel egyoldalas, 0.4 valószínűséggel kétoldalas, és 0.1 valószínűséggel három-, négy-, illetve ötoldalas. Legyen $\xi$ a takarékoskodással nyert lapok száma, ha egyoldalas helyett kétoldalasan nyomtat a hallgató.

a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
b) Számolja ki $\xi$ várható értékét és szórását!
c) Számolja ki annak a valószínűségét, hogy a megspórolt oldalak száma több mint a várható értékük!

9) Négyszer elgurítunk egy szabályos kockát. Legyen $\xi$ a különböző gurítások száma (azaz az a szám, ahányféle számot gurítunk).

d) Adja meg $\xi$ eloszlását!
e) Számolja ki $\xi$ várható értékét!
f) Szimulálja le a kísérletet, és nézze meg, hányszor gurítunk egyféle számot, kétfélét, háromfélét és négyfélét! Hasonlítsa össze a kapott relatív gyakoriságokat a kiszámolt pontos valószínűséggel 100, 10000, 1000000 kísérlet esetén!
g) Számolja ki $\xi$ értékeinek átlagát és hasonlítsa össze a kiszámolt várható értékkel 100, 10000, 1000000 kísérlet esetén!

10) Az első kilencven pozitív egész számból visszatevés nélkül kiválasztunk ötöt. Legyen $\xi$ értéke 10 az annyiadik hatványon, ahány páratlan számot választunk.

a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
b) Minek nagyobb a valószínűsége, hogy $\xi$ legfeljebb akkora, mint a várható értéke vagy $\xi$ legalább akkora, mint a várható értéke?
c) Melyik $\xi$ legvalószínűbb értéke?

11) Az első kilencven pozitív egész számból visszatevés nélkül kiválasztunk ötöt. Legyen $\xi$ értéke 100 az annyiadik hatványon, ahány tízzel osztható számot választunk.

a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
b) Számítsa ki $\xi$ várható értékét!
c) Melyik $\xi$ legvalószínűbb értéke?

12) 10 számból, az $\{1,2,3,4,.....,10\}$ halmazból visszatevés nélkül kiválasztunk négyet. Legyen $\xi$ a kiválasztott számok maximuma.

a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
b) Adja meg $\xi$ várható értékét!
c) Melyik $\xi$ legvalószínűbb értéke?

d) Szimulálja le a kísérletet, adja meg $\xi$ lehetséges értékeinek relatív gyakoriságát és a kapott maximumok átlagát $N$=100, $N$=10000, $N$=1000000 szimuláció esetén!

13) A 90 évet megért állampolgárok jubileumi jutalomban részesülnek. A jubileumi jutalom összege 90 ezer Ft, de csak akkor kapja meg az állampolgár, ha megéri a 90. születésnapját követő év januárját.

A születésnapok $\frac{1}{12}$ valószínűséggel esnek mindegyik hónapra, valamint a 90 évet megért állampolgárok hátralevő hónapjainak számának eloszlása a tapasztalat szerint olyan valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei 0,1,2,….,120 és $P(\xi = k) = \frac{29.4656}{(25+k)^2}$.

Mennyi az egy embernek kifizetendő jubileumi jutalom várható értéke? (A feladatban a 100 év vagy a feletti kor megélésének esélyét elhanyagoltuk, a tapasztalat szerint ez a valóságban roppant kevés.)

14) Egy évre rendelkezésünkre áll egy bizonyos összeg. Ha nem kötjük le, akkor fix 2% kamatot kapunk rá. Ha fél évre lekötjük, akkor (évi) 5% kamatot kapunk érte, ha nem nyúlunk hozzá, és 0%-ot, ha hozzányúlunk. Ha egy évre kötjük le, akkor 7% éves kamatot kapunk rá, ha nem nyúlunk hozzá, egyébként pedig 0%-ot. A tapasztalat szerint annak a valószínűsége, hogy fél év leforgása alatt szükségünk lesz rá, 0.1, hogy nem lesz rá szükségünk, 0.9. A féléves lekötést megismételhetjük, ugyanolyan feltételek mellett, és a különböző félévekben egymástól függetlenül lesz szükségünk az összegre. Hány százaléka az eredeti összegnek a kamatként kapott pénz várható értéke, ha

e) kétszer félévre kötjük le a pénzt?
f) egyszer félévre kötjük le a pénzt?
g) nem kötjük le a pénzt?
h) egy évre kötjük le pénzt?
i) Melyik az optimális az előző stratégiák közül, ha félévenként $p$ valószínűséggel van szükségünk a pénzre, ahol $0<p<1$?
j) Ha $k_1$ az éves kamat éves lekötés esetén, $k_2$ az éves kamat féléves lekötés esetén, és $p$ valószínűséggel van szükségünk egy-egy félévben a pénzre, akkor mikor lesz maximális az éves kamat várható értéke, ha a) és d) közül választhatunk?

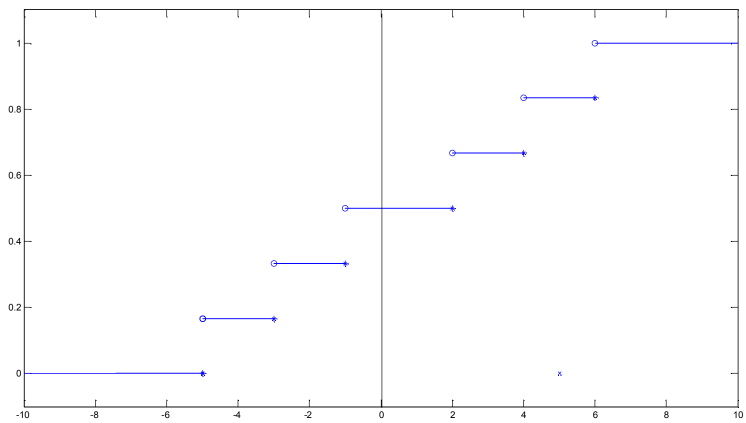
15) A várható érték tulajdonságai alapján bizonyítsa be, hogy ha a $\xi$ valószínűségi változó minden értéke az $[a,b]$ intervallumba esik, akkor $D(\xi) \le \frac{b-a}{2}$.

# Megoldások

1) $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\xi(1) = -1$, $\xi(2) = 2$, $\xi(3) = -3$, $\xi(4) = 4$, $\xi(5) = -5$, $\xi(6) = 6$.

a) $\xi$ eloszlása: (felülre írva a lehetséges értékeket, alulra a hozzájuk tartozó valószínűségeket) $\begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

b)




c) $M(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -5\cdot\frac{1}{6}+(-3)\frac{1}{6}+(-1)\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=0.5$.

d) $M(\xi^2)=25\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{91}{6}=15.17$.

$D(\xi)=\sqrt{D^2(\xi)}=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{15.17-0.25}=3.86$.

e) $P(\xi=0.5)=0$. (NEM veszi fel a várható értékét!)

2) $\Omega=\{(i,j): 1\le i\le 6,\quad 1\le j\le 6 \quad egészek\}$, $\xi((i,j))=(i-j)^2$,

a) $\xi$ eloszlása: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$, mivel

$P(\xi=0)=P(\{\omega:\xi(\omega)=0\})=P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\})=\frac{6}{36}$

$P(\xi=1)=P(\{\omega:\xi(\omega)=1\})=P(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\})=\frac{10}{36}$

$P(\xi=4)=P(\{\omega:\xi(\omega)=4\})=P(\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\})=\frac{8}{36}$

$P(\xi=9)=P(\{\omega:\xi(\omega)=9\})=P(\{(1,4),(4,1),(2,5),(5,2)(3,6),(6,3)\})=\frac{6}{36}$

$P(\xi=16)=P(\{\omega:\xi(\omega)=16\})=P(\{(1,5),(5,1),(2,6),(6,2)\})=\frac{4}{36}$

$P(\xi=25)=P(\{\omega:\xi(\omega)=25\})=P(\{(1,6),(6,1)\})=\frac{2}{36}$

b) $M(\xi)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+4\cdot\frac{8}{36}+9\cdot\frac{6}{36}+16\cdot\frac{4}{36}+25\cdot\frac{2}{36}=5.833$

c) $M(\xi^2)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+16\cdot\frac{8}{36}+81\cdot\frac{6}{36}+256\cdot\frac{4}{36}+625\cdot\frac{2}{36}=\frac{2898}{36}=80.5$

$D(\xi)=\sqrt{D^2(\xi)}=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{80.5-34.02}=6.82$.

d) $F(0)=P(\xi<0)=0$, $F(4)=P(\xi<4)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\dfrac{16}{36}$,

$F(5)=P(\xi<5)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=4)=\dfrac{24}{36}$, $F(30)=P(\xi<30)=P(\Omega)=1$.

e) $\xi$ módusza: 1, mivel az 1-hez tartozó valószínűség a legnagyobb, mediánja 4, hiszen

$F(4)=P(\xi<4)=\dfrac{16}{36}<\dfrac{1}{2}$, $F(4+)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=4)=\dfrac{24}{36}>\dfrac{1}{2}$

3) $\xi$ a két dobás minimuma, $\eta$ a két dobás maximuma.

a) $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$, mivel

$$P(\xi=1)=P(\{\omega:\xi(\omega)=1\})=P(\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\})=\frac{11}{36}$$

$$P(\xi=2)=P(\{\omega:\xi(\omega)=2\})=P(\{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\})=\frac{9}{36}$$

$$P(\xi=3)=P(\{\omega:\xi(\omega)=3\})=P(\{(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(5,3),(6,3))\})=\frac{7}{36}$$

$$P(\xi=4)=P(\{\omega:\xi(\omega)=4\})=P(\{(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)\})=\frac{5}{36}$$

$$P(\xi=5)=P(\{\omega:\xi(\omega)=5\})=P(\{(5,5),(5,6),(6,5)\})=\frac{3}{36}$$

$$P(\xi=6)=P(\{\omega:\xi(\omega)=6\})=P(\{(6,6)\})=\frac{1}{36}$$

b) $\eta$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$, mivel

$$P(\eta=1)=P(\{\omega:\eta(\omega)=1\})=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}$$

$$P(\eta=2)=P(\{\omega:\eta(\omega)=2\})=P(\{(2,1),(2,2),(1,2)\})=\frac{3}{36}$$

$$P(\eta=3)=P(\{\omega:\eta(\omega)=3\})=P(\{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\})=\frac{5}{36}$$

$$P(\eta=4)=P(\{\omega:\eta(\omega)=4\})=P(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\})=\frac{7}{36}$$

$$P(\eta=5)=P(\{\omega:\eta(\omega)=5\})=P(\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5)\})=\frac{9}{36}$$

$$P(\eta=6)=P(\{\omega:\eta(\omega)=6\})=P(\{(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6)\})=\frac{11}{36}$$

c) $M(\xi)=1\cdot\dfrac{11}{36}+2\cdot\dfrac{9}{36}+3\cdot\dfrac{7}{36}+4\cdot\dfrac{5}{36}+5\cdot\dfrac{3}{36}+6\cdot\dfrac{1}{36}=\dfrac{91}{36}=2.528$

$M(\eta)=6\cdot\frac{11}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+1\cdot\frac{1}{36}=\frac{161}{36}=4.472$

$M(\xi^2)=1\cdot\frac{11}{36}+4\cdot\frac{9}{36}+9\cdot\frac{7}{36}+16\cdot\frac{5}{36}+25\cdot\frac{3}{36}+36\cdot\frac{1}{36}=\frac{301}{36}=8.361$

$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{8.36-6.40}=1.404$

$M(\eta^2)=36\cdot\frac{11}{36}+25\cdot\frac{9}{36}+16\cdot\frac{7}{36}+9\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+1\cdot\frac{1}{36}=\frac{791}{36}=21.972$

$D(\eta)=\sqrt{M(\eta^2)-M^2(\eta)}=\sqrt{21.97-19.98}=1.404$.

d) $\xi$ módusza 1. Mediánja 2, mivel $F(2)=\frac{11}{36}<\frac{1}{2}$, $F(2+)=\frac{20}{36}>\frac{1}{2}$.

$\eta$ módusza 6. Mediánja 5, mivel $F(5)=P(\eta<5)=\frac{16}{36}<\frac{1}{2}$, $F(5+)=\frac{25}{36}>\frac{1}{2}$.

e) $P(\xi=i,\eta=j)=P(\xi=i)P(\eta=j)$ egyenlőség fennáll-e $i=1,2,3,4,5,6$, $j=1,2,3,4,5,6$, esetén?

$P(\xi=1,\eta=1)=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}\neq P(\xi=1)\cdot P(\eta=1)=\frac{11}{36}\cdot\frac{1}{36}$, tehát nem függetlenek.

f) $\xi((i,j))=\min(i,j)\le\max(i,j)=\eta((i,j))$ MINDEN $(i,j)\in\Omega$ esetén! Tehát $\xi\le\eta$ teljesül.

4) $\Omega=\{(F,F,F,F),(F,F,F,I),(F,F,I,I).......((I,I,I,I)\}$, $|\Omega|=16$,
$\xi((F,F,F,F))=|4-0|=4$, $\xi((F,F,F,I))=|3-1|=2$, $\xi((F,F,I,I))=|2-2|=0$, ….
$\xi((I,I,I,I))=|0-4|=4$.

a) $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ \frac{6}{16} & \frac{8}{16} & \frac{2}{16}\end{pmatrix}$, mivel

$P(\xi=0)=P(\{\omega:\xi(\omega)=0\}=$

$P(\{(F,F,I,I),(F,I,F,I),(F,I,I,F),(I,F,F,I)(I,I,F,F),(I,F,I,F)\}=\frac{6}{16}$

(4 helyre két $F$-et $\binom{4}{2}=6$ féleképpen lehet elhelyezni).

$P(\xi=2)=P(\{\omega:\xi(\omega)=2\}=P(\left\{\begin{matrix}(F,F,F,I),(F,I,F,F),(F,F,I,F),(I,F,F,F),\\(I,I,I,F),(I,I,F,I),(I,F,I,I),(F,I,I,I)\end{matrix}\right\})=\frac{8}{16}$

$P(\xi=4)=P(\{\omega:\xi(\omega)=4\}=P(\{(F,F,F,F),(I,I,I,I)\}=\frac{2}{16}$

b) $F(x)=\begin{cases}0 & ha\quad x\le 0\\ \frac{6}{16} & ha\quad 0<x\le 2\\ \frac{14}{16} & ha\quad 2<x\le 4\\ 1 & ha\quad x>4\end{cases}$

c) $M(\xi)=0\cdot\frac{6}{16}+2\cdot\frac{8}{16}+4\cdot\frac{2}{16}=1.5$ , $M(\xi^2)=0\cdot\frac{6}{16}+4\cdot\frac{8}{16}+16\cdot\frac{2}{16}=4$ ,

$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{4-2.25}=1.32$

d) $\xi$ módusza 2, mediánja 2.

5) $\Omega=\{(F,F,F,F),(F,F,F,I),(F,F,I,I).......((I,I,I,I)\}$, $|\Omega|=16$,

$\eta((F,F,F,F))=4^2+0^2=16$, $\eta((F,F,F,I))=3^2+1^2=10$, $\eta((F,F,I,I))=2^2+2^2=8$,

$\ldots,\eta((I,I,I,I))=0^2+4^2=16$.

a) $\eta$ eloszlása $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 16 \\ \frac{6}{16} & \frac{8}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix}$.

b) $F(x)=\begin{cases} 0 & ha \quad x\le 8 \\ \frac{6}{16} & ha \quad 8<x\le 10 \\ \frac{14}{16} & ha \quad 10<x\le 16 \\ 1 & ha \quad x>16 \end{cases}$

c) $M(\eta)=8\cdot\frac{6}{16}+10\cdot\frac{8}{16}+16\cdot\frac{2}{16}=10$, $M(\eta^2)=8^2\,\frac{6}{16}+10^2\,\frac{8}{16}+16^2\cdot\frac{2}{16}=\frac{1696}{16}=106$,

$D(\eta)=\sqrt{M(\eta^2)-M^2(\eta)}=\sqrt{106-100}=2.45$.

d) $\eta$ módusza 10, mediánja 10.

6) $P(\xi=2,\eta=10)=P(\left\{\begin{matrix}(F,F,F,I),(F,F,I,F),(F,I,F,F),(I,F,F,F)(I,I,I,F)\\(I,I,F,I),(I,F,I,I),(F,I,I,I)\end{matrix}\right\})=\frac{8}{16}$

$P(\xi=2)=\frac{8}{16}$, $P(\eta=10)=\frac{8}{16}$, $P(\xi=2,\eta=10)\ne P(\xi=2)\cdot P(\eta=10)\Rightarrow$ nem függetlenek!

Olyannyira nem függetlenek, hogy függvény-kapcsolat van köztük!

7) $\Omega=\{(F,F),(F,I),(I,F,F),(I,I,F)(I,F,I),(I,I,I)\}$; $\xi$ lehetséges értékei 0,1,2;

$P(\xi=0)=P(\{(I,I,I)\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$P(\xi=1)=P(\{(F,I),(I,I,F),(I,F,I)\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$P(\xi=2)=P(\{(F,F),(I,F,F)\})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$. Tehát $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$,

$M(\xi)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{4}{8}+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{10}{8}$, $P(\xi<M(\xi))=P(\xi<\frac{10}{8})=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{5}{8}$,

$P(\xi>M(\xi))=P(\xi>\frac{10}{8})=P(\xi=2)=\frac{3}{8}<P(\xi<M(\xi))$.

8) $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ (a nyomtatandó oldalak száma), $\xi(1) = 0$, $\xi(2) = 1$, $\xi(3) = 1$, $\xi(4) = 2$, $\xi(5) = 2$.

a) $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$, mivel
$P(\xi = 0) = P(\{\omega : \xi(\omega) = 0\}) = P(\{1\}) = 0.3$,
$P(\xi = 1) = P(\{\omega : \xi(\omega) = 1\}) = P(\{2,3\}) = 0.4 + 0.1 = 0.5$,
$P(\xi = 2) = P(\{\omega : \xi(\omega) = 2\}) = P(\{4,5\}) = 0.1 + 0.1 = 0.2$.

b) $M(\xi) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.9$, $M(\xi^2) = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 1.3$,
$D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{1.3 - 0.9^2} = \sqrt{0.49} = 0.7$

c) $P(\xi > M(\xi)) = P(\xi > 0.9) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = 0.7$.

9) $\Omega = \{(i,j,k,l) : 1 \le i,j,k,l \le 6 \quad \textit{egészek}\}$ $\xi((1,1,1,1)) = 1$, $\xi((3,2,6,1)) = 4$, $\xi((5,4,4,6)) = 3$, stb.

a) $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{6}{6^4} & \frac{210}{6^4} & \frac{720}{6^4} & \frac{360}{6^4} \end{pmatrix}$, mivel

$P(\xi = 1) = P(\text{mind a négy dobás azonos}) = P(\{(1,1,1,1),\ldots,(6,6,6,6)\}) = \frac{6}{6^4}$

$P(\xi = 2) = P(\text{egyikből 3, másikból egy}) + P(\text{kétfajtából kettő} - \text{kettő}) =$

$= P(\{(1,1,13),(1,1,3,1),\ldots\}) + P(\{(1,1,2,2),(1,2,1,2),\ldots\}) = \frac{\binom{6}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{1}}{6^4} + \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{6^4} = \frac{210}{6^4}$.

$P(\xi = 3) = P(\text{egyikből 2, a másikból egy, a harmadikból egy}) =$

$= P(\{(1,2,3,2),\ldots\}) = \frac{\binom{6}{3} \cdot 3 \cdot 12}{6^4} = \frac{720}{6^4}$.

$P(\xi = 4) = P(\text{mindegyik különböző}) = P(\{(1,5,3,6),\ldots\}) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{360}{6^4}$.

b) $M(\xi) = 1 \cdot \frac{6}{1296} + 2 \cdot \frac{210}{1296} + 3 \cdot \frac{720}{1296} + 4 \cdot \frac{360}{1296} = 3.106$.

c)
```
function kocka(szimszam)
format long
gyak=zeros(1,4);
osszeg=0;
for i=1:1:szimszam
dobas=zeros(1,4);
dobas(1,1)=floor(6*rand(1)+1);
dobas(1,2)=floor(6*rand(1)+1);
dobas(1,3)=floor(6*rand(1)+1);
dobas(1,4)=floor(6*rand(1)+1);
a=unique(dobas);
hany=length(a);
osszeg=osszeg+hany;
gyak(1,hany)=gyak(1,hany)+1;
end
relgyak=gyak/szimszam
atlag=osszeg/szimszam
```

| | $P(\xi=1)$ | $P(\xi=2)$ | $P(\xi=3)$ | $P(\xi=4)$ | Átlag |
|---|---|---|---|---|---|
| Pontos érték | 0.0046296 | 0.162037 | 0.555555 | 0.277778 | 3.106481 |
| $N$=100 | 0 | 0.2 | 0.54 | 0.26 | 3.060 |
| $N$=10000 | 0.0057 | 0.1608 | 0.5579 | 0.2756 | 3.1034 |
| $N$=1000000 | 0.0046710 | 0.161865 | 0.555669 | 0.277795 | 3.106588 |

d) Lásd a táblázat utolsó oszlopa.

10) A 90 szám közt 45 páros és 45 páratlan szám van. Legyen $\eta$ a kiválasztott páratlan számok darabszáma.

$$P(\eta=0)=\frac{\binom{45}{0}\binom{45}{5}}{\binom{90}{5}}=0.0278\,,\ P(\eta=1)=\frac{\binom{45}{1}\binom{45}{4}}{\binom{90}{5}}=0.1526\,,\ P(\eta=2)=\frac{\binom{45}{2}\binom{45}{3}}{\binom{90}{5}}=0.3196\,,$$

$$P(\eta=3)=\frac{\binom{45}{3}\binom{45}{2}}{\binom{90}{5}}=0.3196\,,\ P(\eta=4)=\frac{\binom{45}{4}\binom{45}{1}}{\binom{90}{5}}=0.1526\,,\ P(\eta=5)=\frac{\binom{45}{5}\binom{45}{0}}{\binom{90}{5}}=0.0278\,.$$

a) $\xi=10^{\eta}$. $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10^4 & 10^5 \\ 0.0278 & 0.1526 & 0.3196 & 0.3196 & 0.1526 & 0.0278 \end{pmatrix}$.

b) $M(\xi)=1\cdot 0.0278+10\cdot 0.1525+100\cdot 0.3196+1000\cdot 0.3196+10^4\cdot 0.1525+10^5\cdot 0.0278=4658$
$P(\xi\le M(\xi))=P(\xi=1)+P(\xi=10)+P(\xi=100)+P(\xi=1000))=0.8196>$
$P(\xi\ge M(\xi))=0.1804$.

c) Módusz: 100 és 1000.

11) A 90 szám között 10 darab tízzel osztható és 80 darab tízzel nem osztható szám van. Legyen $\eta$ a kivett 10-zel osztható számok száma.

$$P(\eta=0)=\frac{\binom{10}{0}\binom{80}{5}}{\binom{90}{5}}=0.547\,,\ P(\eta=1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{80}{4}}{\binom{90}{5}}=0.360\,,\ P(\eta=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{80}{3}}{\binom{90}{5}}=0.084\,,$$

$$P(\eta=3)=\frac{\binom{10}{3}\binom{80}{2}}{\binom{90}{5}}=0.009\,,\ P(\eta=4)=\frac{\binom{10}{4}\binom{80}{1}}{\binom{90}{5}}=0.0004\,,\ P(\eta=5)=\frac{\binom{10}{5}\binom{80}{0}}{\binom{90}{5}}=6\cdot 10^{-6}\,.$$

a) $\xi=100^{\eta}$, $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 100 & 10^4 & 10^6 & 10^8 & 10^{10} \\ 0.547 & 0.360 & 0.084 & 0.009 & 0.0004 & 6\cdot 10^{-6} \end{pmatrix}$

b) $M(\xi)=1\cdot 0.547+100\cdot 0.360+10^4\cdot 0.084+10^6\cdot 0.009+10^8\cdot 0.0004+10^{10}\cdot 6\cdot 10^{-6}=109877$

c) $\xi$ legvalószínűbb értéke a 1.

12)

a) $\xi$ lehetséges értékei 4,5,6,7,8,9,10. $\xi = k$ akkor, ha a kiválasztott számok között szerepel a *k*, és a többi három kiválasztott szám ennél kisebb.

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{k-1}{3}\binom{1}{1}\binom{10-k}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{10}{4}},\ k=4,5,6,7,8,9,\ 10,\ P(\xi = 4) = \frac{1}{\binom{10}{4}} = 0.0048,$$

$$P(\xi = 5) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.019,\ P(\xi = 6) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.0476,\ P(\xi = 7) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.0952,$$

$$P(\xi = 8) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.1667,\ P(\xi = 9) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.2667,\ P(\xi = 10) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{4}} = 0.4000.$$

$\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0.0048 & 0.019 & 0.0476 & 0.0952 & 0.1667 & 0.2667 & 0.4000 \end{pmatrix}$.

b) $M(\xi) = 4 \cdot 0.0048 + 5 \cdot 0.019 + 6 \cdot 0.0476 + 7 \cdot 0.0952 + 8 \cdot 0.1667 + 9 \cdot 0.2667 + 10 \cdot 0.4 = 8.8$

c) $\xi$ legvalószínűbb értéke 10.

d)
```
function maximum(szimszam)
format long
gyak=zeros(1,7);
osszeg=0;
for i=1:1:szimszam
for j=1:1:10
    vel(1,j)=j;
end
for j=1:1:100
    veletlenszam1=floor(rand(1)*10+1);
    veletlenszam2=floor(rand(1)*10+1);
    c1=vel(1,veletlenszam1);
    c2=vel(1,veletlenszam2);
    vel(1,veletlenszam1)=c2;
    vel(1,veletlenszam2)=c1;
end
vel;
kival=[vel(1,1),vel(1,2),vel(1,3),vel(1,4)];
maximum=max(kival);
osszeg=osszeg+maximum;
for j=4:1:10
    if maximum==j
    gyak(1,j-3)=gyak(1,j-3)+1;
    end
end
end
relgyak=gyak/szimszam
atlag=osszeg/szimszam
```

| | $P(\xi=4)$ | $P(\xi=5)$ | $P(\xi=6)$ | $P(\xi=7)$ | $P(\xi=8)$ | $P(\xi=9)$ | $P(\xi=10)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pontos | 0.0048 | 0.019 | 0.0476 | 0.0952 | 0.1667 | 0.2667 | 0.4000 |
| $N$=100 | 0 | 0.02 | 0.09 | 0.07 | 0.14 | 0.25 | 0.43 |
| $N$=10000 | 0.0053 | 0.0214 | 0.0509 | 0.0942 | 0.1704 | 0.2685 | 0.3893 |
| $N$=1000000 | 0.00483 | 0.018967 | 0.047426 | 0.095105 | 0.166799 | 0.267239 | 0.399634 |

13) Legyen $A$ az az esemény, hogy a 90 évet megélt állampolgár megéri a következő januárt. $\xi$ legyen a kifizetendő jubileumi jutalom. $M(\xi)=M(90000\cdot 1_A)=90000\cdot P(A)$. Jelölje $B_i$ azt az eseményt, hogy a születésnapja az $i$-edik hónapban van. Legyen $\eta$ az életéből hátralevő hónapok száma.

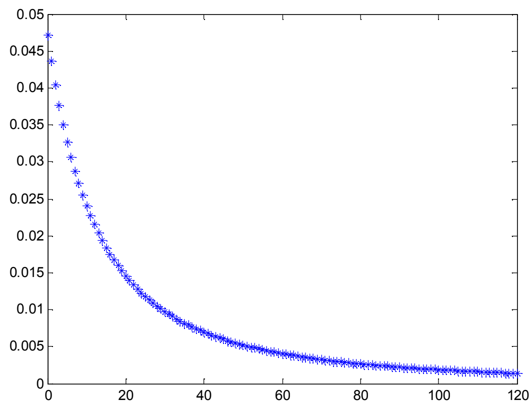
$$P(A)=\sum_{i=1}^{12}P(A\,|\,B_i)P(B_i)=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12}P(A\,|\,B_i)\,;\; P(A\,|\,B_i)=1-P(\eta\le 12-i)=1-\sum_{j=0}^{12-i}P(\eta=j)\,.$$

A $P(A\,|\,B_i)$ valószínűségeket $i=1,2,3,\ldots,12$ esetén az alábbi táblázatban láthatjuk:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.6047 | 0.6275 | 0.6515 | 0.6770 | 0.7041 | 0.7328 | 0.7635 | 0.7962 | 0.8313 | 0.8688 | 0.9093 | 0.9529 |

$P(A)$=0.76, $M(\xi)=90000\cdot 0.76=68400\,Ft$ .

A hátralevő hónapokhoz tartozó valószínűségeket az alábbi ábrán láthatjuk ábrázolva.




14) $A_1$ legyen az az esemény, hogy az első félévben nincs szükségünk az összegre, $A_2$ az az esemény, hogy a második félévben nincs szükségünk az összegre.

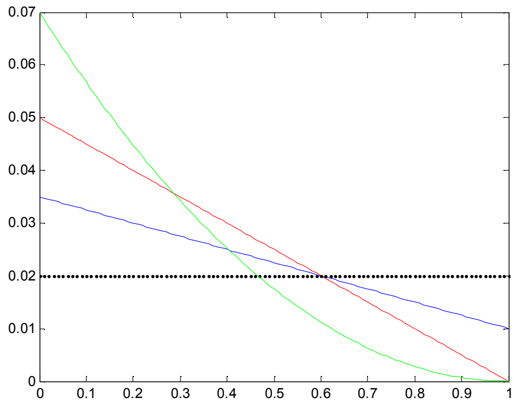
a) Jelölje $\xi$ az év végén kamatokból összegyűlt pénz arányát. $\xi=0.025\cdot 1_{A_1}+0.025\cdot 1_{A_2}$.
$M(\xi)=0.025P(A_1)+0.025P(A_2)=0.025\cdot 2\cdot 0.9=0.045$.

b) Jelölje $\eta$ az év végén kamatokból összegyűlt pénz arányát. $\eta=0.025\cdot 1_{A_1}+0.01$.
$M(\eta)=0.025P(A_1)+0.01=0.0325$.

c) Jelölje $\alpha$ az év végén kamatokból összegyűlt pénz arányát. $\alpha=0.02$. $M(\alpha)=0.02$.

d) Jelölje $\beta$ az év végén kamatokból összegyűlt pénz arányát. $\beta=0.07\cdot 1_{A_1\cap A_2}$,
$M(\beta)=0.07\cdot P(A_1\cap A_2)=0.07\cdot P(A_1)\cdot P(A_2)=0.07\cdot 0.9\cdot 0.9=0.0567$.

e) $M(\xi)=2\cdot 0.025\cdot(1-p)$, $M(\eta)=0.025(1-p)+0.01$, $M(\alpha)=0.02$,
$M(\beta)=0.07(1-p)\cdot(1-p)$.
Az egyes várható értékeket a $p$ függvényében ábrázolva láthatjuk az alábbi ábrán: (piros: $\xi$, kék: $\eta$, fekete: $\alpha$, zöld: $\beta$.)




Az ábráról leolvasható, hogy a kis $p$ értékek esetén az éves lekötés, közepes p értékek esetén a kétszer féléves, nagy $p$ értékek esetén a le nem kötés mellett maximális a kamat várható értéke.
Számszerűsítve: ha $p\le 0.2857$, akkor az éves lekötés optimális. Ha $0.2857<p\le 0.6$, akkor a kétszer féléves lekötés, ha $p>0.6$, akkor a lekötés nélküli változat optimális.

f) $M(\beta)=k_1(1-p)^2$ $\quad M(\xi)=k_2(1-p)$, $M(\xi)\le M(\beta)\Leftrightarrow \dfrac{k_2}{k_1}\le 1-p$.

15) Először lássuk be, hogy $M((\xi-M(\xi))^2)\le M((\xi-x)^2)$ minden valós $x$ esetén.
$M((\xi-x)^2)=M(\xi^2)-2xM(\xi)+x^2(M(\xi))^2$, ami $x$-nek másodfokú függvénye.
Ez akkor minimális, ha $x=M(\xi)$.
Most már ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$D^2(\xi)=M((\xi-M(\xi))^2)\le M((\xi-x)^2)\le(a-x)^2P(\xi<x)+(b-x)^2P(\xi\ge x)=$$
$$=(a-x)^2-(a-x)^2P(\xi\ge x)+(b-x)^2P(\xi\ge x)=(a-x)^2+(b-a)(b+a-2x)P(\xi\ge x).$$

$x=\dfrac{a+b}{2}$ helyettesítéssel $b+a-2x=0$, $(a-x)^2=\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$.

Kaptuk, hogy $D^2(\xi)\le\dfrac{(b-a)^2}{4}$, azaz $D(\xi)\le\dfrac{b-a}{2}$.

Az egyenlőtlenség nem javítható, mert ha $P(\xi=a)=P(\xi=b)=0.5$, akkor $D(\xi)=\dfrac{b-a}{2}$.

# Nevezetes diszkrét eloszlású valószínűségi változók

## Feladatok

1) Szabályos kockákkal gurítunk. Minek nagyobb a valószínűsége: hat kockával gurítva legalább az egyik gurítás hatos, vagy 12 kockával gurítva legalább két gurítás hatos, vagy 18 gurítás esetén legalább 3 gurítás hatos?

2) Egy termékbemutatóra meghívott házaspárok száma 15, mindegyik pár a többitől függetlenül 0.65 valószínűséggel jelenik meg a bemutatón.
   a) Adja meg a bemutatón megjelenő párok számának eloszlását!
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy 12-nél több pár jelenik meg a bemutatón?
   c) Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb pár jelenik meg a bemutatón, mint a várható értékük fele?
   d) Hány pár jelenik meg a bemutatón a legnagyobb eséllyel, és mennyi ez a valószínűség?

3) Egy jeltovábbítón jeleket továbbítanak. Minden jel a többitől függetlenül 0.05 valószínűséggel torzul. 19 jel továbbítása esetén
   a) mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2 jel torzul?
   b) mennyi a valószínűsége, hogy legalább 4 jel torzul?
   c) hány jel torzul a legnagyobb valószínűséggel és mennyi ez a valószínűség?
   d) minek nagyobb a valószínűsége: a várható értéknél több vagy kevesebb jel torzul?

4) Egy gép sok műveletet végez. A műveletek elvégzésénél 1/1000 valószínűséggel vét hibát és 999/1000 valószínűséggel hiba nélkül végzi a műveletet a korábbiaktól függetlenül.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy 2000 művelet során legfeljebb 4 hibát vét a gép?
   b) Legfeljebb hány hibát vét a gép 2000 művelet elvégzése esetén 0.99 valószínűséggel?
   c) Hány művelet elvégzése során vét legalább egy hibát a gép 0.99 valószínűséggel?

5) Egy bolha ugrál a számegyenesen. A 0 pontból indul, és minden lépése $p$ valószínűséggel balra és $1-p$ valószínűséggel jobbra történik arról a helyről, ahol éppen áll, és minden lépésben egységnyit ugrik. Legyen $\xi_n$ az $n$. lépés utáni helye a számegyenesen.
   a) Adjuk meg $\xi_n$ eloszlását!
   b) Mennyi a valószínűsége, hogy $n$ lépés megtétele után a bolha nulla pontba kerül? Hova tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$, és milyen a konvergencia nagyságrendje?

6) Egy művelet eredményére vagyunk kíváncsiak. A műveletet 3 géppel végeztetjük el párhuzamosan. Mindegyik gép a többitől függetlenül 1/1000 valószínűséggel vét hibát és 999/1000 valószínűséggel nem vét hibát. Ha a gépek hibát vétenek, akkor a vétett hibák egymástól különbözők.
   Egy művelet elvégzése után összehasonlítjuk a kapott eredményeket. Ha mindhárom gép eredménye azonos, akkor természetesen jó az eredmény, ha két gép eredménye azonos, akkor ezt tekintjük a művelet eredményének, ha mindhárom gép eredménye különböző, akkor hibásnak tekintjük az eredményt (nem találgatunk).

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 1 művelet elvégzése után hibásnak tekintett eredményt kapunk?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy 100000 művelet elvégzése esetén lesz hibásnak tekintett eredmény?
c) Mennyi a hibásnak tekintett eredmények számának várható értéke 100000 művelet esetén?
d) Hány művelet elvégzése során lesz legalább 1 hibásnak tekintett eredmény 0.99 valószínűséggel?

7) Egy postahivatalban bármely időszakban címzés nélkül feladott levelek száma Poisson eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Egy nap alatt feladott címzés nélküli levelek várható értéke 2.5.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy nap alatt legfeljebb 3 címzés nélküli levelet adnak fel a postahivatalban?
b) Hány címzés nélküli levelet adnak fel 4 nap alatt a legnagyobb eséllyel?
c) Hány nap alatt adnak fel legalább egy címzés nélküli levelet 0.99 valószínűséggel?

8) Egy számítógépre valamely időszakban érkező vírusos file-ok száma Poisson eloszlású valószínűségi változó. 40 perc leforgása alatt 0.1 valószínűséggel érkezik legalább egy vírusos file a gépre.

a) Hány vírusos file érkezik 24 óra leforgása alatt a legnagyobb eséllyel? Mekkora ez az esély?
b) Mennyi $T$ értéke, ha a $T$ idő alatt érkező vírusos file-ok számának módusza 3. (Esetleg több módusz is van, de köztük van a három is.)
c) Ha két ilyen gépünk van, és rájuk érkező vírusos file-ok száma egymástól független, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a két gépre egy óra alatt összesen legfeljebb 3 vírusos file érkezik?

9) Két kockával addig gurítunk, amíg először dupla hatost nem kapunk. Legyen $\xi$ a szükséges gurítások száma.

a) Adja meg $\xi$ eloszlását!
b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 15-ször kell gurítanunk?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy több gurítás szükséges, mint a $\xi$ várható értékének duplája?
d) Legfeljebb hány gurítás kell a sikerhez 0.9 valószínűséggel?

10) Egy szigorlatra addig járnak a hallgatók szigorlatozni, amíg az első 3 tétel valamelyikét nem húzzák (10 tétel van, egytől tízig számozzuk őket).

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy vizsgaidőszakon belül (3 próbálkozás) „sikerrel” járnak?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 vizsgaidőszak (9 alkalom) sem elég a „sikerhez”?
c) Mennyi a befizetendő díj várható értéke, ha az első két próbálkozás ingyenes, többiért pedig 1000 Ft iv díjat kell fizetni?

11) Két játékos felváltva gurít egy kockát. Az nyer, aki előbb hatost gurít, és ekkor abbahagyják a játékot. Mennyi a valószínűsége, hogy a kezdő játékos nyer?

12) Egy szerencsejátékot játszunk. Szabályos érmét dobunk fel és a nyereményünk értéke (Ft-ban) 10-nek annyiadik hatványa, ahányadik dobásra sikerül először fejet dobnunk. Nyereményünket egy banktól kapjuk meg.

a) Mennyi (lenne) a nyereményünk várható értéke, ha a bank bármekkora nyereményt ki tud(na) fizetni?

b) Mennyi (lenne) a nyeremény várható értéke, ha a bank úgy módosítja a szabályokat, hogy maximum 10 milliárd Ft értékű nyereményt fizet ki, ha több lenne a nyeremény értéke, akkor is ezt az összeget fizeti csupán?

13) Egy urnában 6 piros és 4 fehér golyó van. Addig húzunk közülük visszatevés nélkül, amíg először piros golyót húzunk. Legyen $\xi$ a szükséges húzások száma.

a) Adjuk meg $\xi$ eloszlását!

b) Számoljuk ki $\xi$ várható értékét, szórását és móduszát!

c) Hasonlítsuk össze a kapott eredmények azzal, amit visszatevéses választás esetén kapnánk!

14) Két urnánk van, amelyekbe lépésenként véletlenszerűen helyezünk el golyókat. Az első lépésben mindkét urnába 1-1 golyót rakunk. A második lépésben egy golyót helyezünk valamelyik urnába, 0.5 valószínűséggel az elsőbe, 0.5 valószínűséggel a másodikba. A következő lépésben egy golyót helyezünk valamelyik urnába oly módon, hogy annak a valószínűsége, hogy a golyó az első urnába kerül, arányos az első urnában levő golyók számával, s ugyanez igaz a második urnára. Legyen $\xi_3$ a harmadik lépés után az első urnában levő golyók száma.

a) Bizonyítsa be, hogy $\xi_3$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó!

b) Ha $\xi_n$ az *n*. lépés után az első urnában levő golyók száma, teljes indukcióval bizonyítsa be, hogy $\xi_n$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó!

15) Egy szolgáltatás révén biztosított bevétel maximalizálásában érdekelt egy cég. A kiszolgáló kapacitása (azaz kiszolgálható igények maximuma) *k*. Amennyiben egy igényt kiszolgálnak, azon 10 egység haszon van. Ha egy kiszolgálóegység kihasználatlanul marad, akkor 1 egység fenntartási költség terheli, azaz 1 egység kár keletkezik minden egyes kihasználatlan egységen. Mekkora legyen *k* értéke, hogy a haszon várható értéke maximális legyen, ha a kiszolgálandó igények száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 100$ várható értékkel?

# Megoldások

1) Legyen $\xi_6$ a dobott hatosok száma, ha 6 kockával dobunk, $\xi_{12}$ a dobott hatosok száma, ha 12 kockával dobunk, és $\xi_{18}$ a dobott hatosok száma, ha 18 kockával dobunk. $\xi_6$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n_6 = 6$ $p = \frac{1}{6}$, $\xi_{12}$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n_{12} = 12$, $p = \frac{1}{6}$, és $\xi_{18}$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n_{18} = 18$, $p = \frac{1}{6}$ paraméterekkel.

$$P(\xi_6 \geq 1) = 1 - P(\xi_6 = 0) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665\,.$$

$$P(\xi_{12}) \geq 2) = 1 - (P(\xi_{12} = 0) + P(\xi_{12} = 1)) = 1 - (\binom{12}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{12-1}) = 0.619\,.$$

$$P(\xi_{18}) \geq 3) = 1 - (P(\xi_{18} = 0) + P(\xi_{18} = 1) + P(\xi_{18} = 3) =$$

$$1 - (\binom{18}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{18} + \binom{18}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{18-1} + \binom{18}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18-2}) = 1 - 0.403 = 0.597\,.$$

Annak a legnagyobb a valószínűsége, hogy hat kockával dobva legalább 1 hatost dobunk.

2) Jelölje $\xi$ a megjelenő házaspárok számát. 15-ször ismétlem azt a kísérletet, hogy leellenőrzöm, hogy a meghívott házaspár megjelenik-e a bemutatón. $\xi$ az az szám, ahányszor az $A$= 'a pár megjelent' esemény bekövetkezik a 15 független kísérlet során.

   a) $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=15, $p$=0.65 paraméterrel, azaz $\xi$ lehetséges értékei $0,1,2,...,15$ és $P(\xi = k) = \binom{15}{k} 0.65^k (1-0.65)^{15-k}$.

   b) $P(\xi > 12) = P(\xi = 13) + P(\xi = 14) + P(\xi = 15) =$
   $= \binom{15}{13} 0.65^{13} \cdot 0.35^2 + \binom{15}{14} 0.65^{14} \cdot 0.35^1 + \binom{15}{15} 0.65^{15} \cdot 0.35^0 = 0.062$.

   c) $M(\xi) = np = 15 \cdot 0.65 = 9.75, \dfrac{M(\xi)}{2} = 4.875$.

   $P(\xi < 4.875) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \binom{15}{0} 0.65^0 \cdot 0.35^{15} +$
   $+ \binom{15}{1} 0.65^1 \cdot 0.35^{14} + \binom{15}{2} 0.65^2 \cdot 0.35^{13} + \binom{15}{3} 0.65^3 \cdot 0.35^{12} + \binom{15}{4} 0.65^4 \cdot 0.35^{11} = 0.003$.

   d) $\xi$ legvalószínűbb értéke $[(n+1) \cdot p] = [10.4] = 10$, $P(\xi = 10) = \binom{15}{10} 0.65^{10} \cdot 0.35^5 = 0.212$.

3) $\xi$ legyen a torzult jelek száma. $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=19, $p$=0.05 paraméterrel. (19-szer ismételjük azt a kísérletet, hogy továbbítjuk a jelet, minden kísérletnél azt figyeljük, hogy az $A$="a jel torzult" esemény bekövetkezik-e. $\xi$ az a szám, ahányszor az $A$ esemény bekövetkezik a 19 kísérlet során.) Ez azt jelenti, hogy $\xi$ lehetséges értékei 0,1,2,...,19 és
$P(\xi = k) = \binom{19}{k} 0.05^k (1-0.05)^{19-k}$.

   a) $P(\xi \le 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) = \binom{19}{0} 0.05^0 (1-0.05)^{19} + \binom{19}{1} 0.05^1 (1-0.05)^{18} +$
   $+ \binom{19}{2} 0.05^2 (1-0.05)^{19-2} = 0.933$.

   b) $P(\xi \ge 4) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) = 0.013$.

   c) $\xi$ legvalószínűbb értékének megkeresése: $(n+1) \cdot p = 20 \cdot 0.05 = 1$, ez egész szám, ezért két módusz is van, $(n+1)p = 1$ és $(n+1)p - 1 = 0$. $P(\xi = 0) = 0.377 = P(\xi = 1)$.

   d) $M(\xi) = n \cdot p = 0.95$, $P(\xi > 0.95) = 1 - P(\xi = 0) = 0.623$,
   $P(\xi < 0.95) = P(\xi = 0) = 0.377$.
   Annak a valószínűsége a nagyobb, hogy a torzult jegyek száma több, mint a várható értékük.

4) $\xi$ a gép által vétett hibák száma 2000 művelet elvégzése esetén. $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=2000, $p$=0.001 paraméterrel. Ez azt jelenti, hogy $\xi$ lehetséges értékei 0,1,…,2000 és $P(\xi = k) = \binom{2000}{k} (0.001)^k (1-0.001)^{2000-k}$.

a) $P(\xi \le 4) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0.947$.

b) $m$=? $P(\xi \le m) = 0.99$, $m = 5$ még nem elég, mert $P(\xi \le 5) = 0.983 < 0.99$.
$P(\xi \le 6) = 0.995$ >0.99. Tehát a keresett $m$ értéke 6.

c) $\xi_n$ $n$ művelet elvégzése esetén a vétett hibák száma. $\xi_n$ binomiális eloszlású az ismeretlen $n$ és $p$=0.001 paraméterekkel.
$P(\xi_n \ge 1) = 1 - P(\xi_n = 0) = 0.99$, $P(\xi_n = 0) = 0.01$,
$\binom{n}{0} \cdot 0.001^0 \cdot 0.999^n = 0.01$, $0.999^n = 0.01$, $n = \dfrac{\ln 0.01}{\ln 0.999} = 4602.29$,
$1 - 0.999^{4603} = 1 - 0.009998 > 0.99$, $1 - 0.999^{4602} = 1 - 0.0100080 < 0.99$.
A keresett szám 4603.

5)

a) $\eta_n$ legyen $n$ lépés során a jobbra történő ugrások száma. $\eta_n$ binomiális eloszlású $n$ és 1-$p$ paraméterrel. $P(\eta_n = k) = \binom{n}{k}(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k} = \binom{n}{k}(1-p)^k \cdot p^{n-k}$, $k = 0,1,2,...,n$.
Ekkor a balra történő ugrások száma $n - \eta_n$, így a bolha helye
$\xi_n = \eta_n - (n - \eta_n) = 2 \cdot \eta_n - n$.
Így $\xi_n$ lehetséges értékei $-n, -n+2, ..., n-2, n$, amelyek mind párosak, ha $n$ páros és mind páratlanok, ha $n$ páratlan. Mivel $\eta_n = \dfrac{\xi_n + n}{2}$, ezért ha $\xi_n = k$, akkor $\eta_n = \dfrac{k+n}{2}$, vagyis

$$P(\xi_n = k) = P\left(\eta_n = \frac{k+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{(n+k)/2} \cdot p^{(n-k)/2}, \quad k = -n, -n+2, ...., n-2, n.$$

b) Ha $n$ páratlan, akkor $P(\xi_n = 0) = 0$, ha $n$ páros, akkor

$$P(\xi_n = 0) = \binom{n}{\frac{n}{2}}(1-p)^{n/2} \cdot p^{n/2}. \; P(\xi_n = 0) = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}(1-p)^{n/2} \cdot p^{n/2} \sim$$

$$\sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}\sqrt{\pi n} \cdot \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}\sqrt{\pi n}}(1-p)^{n/2} p^{n/2}$$

$$= 2^n (1-p)^{n/2} p^{n/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} = (4(1-p)p)^{n/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Amennyiben $p = \dfrac{1}{2}$, akkor az utóbbi formula $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$-re egyszerűsödik, tehát a valószínűség $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ nagyságrendben tart nullához.

Amennyiben $0 < p < 1$, $p \ne \dfrac{1}{2}$, akkor $0 < (1-p)p < \dfrac{1}{4}$ miatt $4(1-p)p < 1$,
$(4(1-p)p)^{n/2} \to 0$,

$$(4(1-p)p)^{n/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \text{ exponenciális nagyságrendben.}$$

6) $H$ legyen az az esemény, hogy egy művelet elvégzése esetén hibásnak tekintett eredményt kapunk. Jelölje $\xi$ az egy művelet elvégzése esetén a hibázó gépek számát. $\xi$ binomiális eloszlású $n$=3, $p$=0.001 paraméterrel, vagyis $\xi$ értéke lehet 0,1,2,3 és $P(\xi = k) = \binom{3}{k} \cdot 0.001^k 0.999^{3-k}$.

a) $P(H) = P(\xi \geq 2) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.000002998 = 2.998 \cdot 10^{-6}$.

b) $\eta_{100000}$ a százezer művelet elvégzése esetén hibásnak tekintett eredmények száma. $\eta_{100000}$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=100000, $p=P(H)$ paraméterrel.
$P(\eta_{100000} \geq 1) = 1 - P(\eta_{100000} = 0) = 1 - (1 - 2.998 \cdot 10^{-6})^{100000} = 0.259$.

c) $M(\eta_{100000}) = 100000 \cdot 2.998 \cdot 10^{-6} = 0.2998 = 0.3$.

d) $\eta_n$ $n$ művelet elvégzése után a hibásnak tekinthető eredmények száma.
$P(\eta_n \geq 1) = 1 - P(\eta_n = 0) = 1 - (1 - 2.998 \cdot 10^{-6})^n = 0.99$,

$$n = \frac{\ln 0.01}{\ln(1 - 2.998 \cdot 10^{-6})} = 1.536 \cdot 10^6 .$$

7) Jelölje $\xi_1$ az egy nap alatt feladott címzés nélküli levelek számát.

a) $P(\xi_1 \leq 3) = P(\xi_1 = 0) + P(\xi_1 = 1) + P(\xi_1 = 2) + P(\xi_1 = 3) =$

$$= \frac{2.5^0}{0!}e^{-2.5} + \frac{2.5^1}{1!}e^{-2.5} + \frac{2.5^2}{2!}e^{-2.5} + \frac{2.5^3}{3!}e^{-2.5} = 0.758.$$

b) $\xi_4$ a négy nap alatt címzés nélkül feladott levelek száma. $\xi_4$ Poisson eloszlású $\lambda_4 = 4 \cdot 2.5 = 10$ paraméterrel. Mivel $\lambda_4$ egész, ezért $\xi_4$-nek két módusza van, a $\lambda_4 = 10$ és a $\lambda_4 - 1 = 9$ érték.

c) A $T$ nap alatt címzés nélkül feladott levelek számát jelölje $\xi_T$. Ekkor $\xi_T$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda_T = 2.5T$ paraméterrel. $P(\eta_T \geq 1) = 0.99$.
$P(\eta_T \geq 1) = 1 - P(\eta_T = 0) =$

$$= 1 - \frac{(2.5T)^0}{0!}e^{-2.5T} = 0.99, \quad P(\eta_T = 0) = e^{-2.5T} = 0.01, \quad 2.5T = -\ln 0.01,$$

$$T = \frac{-\ln 0.01}{2.5} = 1.842 .$$

8) $\xi_{40}$ 40 perc alatt a gépre érkező vírusos file-ok száma. $\xi_{40}$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda$ (egyelőre ismeretlen) paraméterrel. $P(\xi_{40} \geq 1) = 0.1$, $1 - P(\xi_{40} = 0) = 0.1$,

$$P(\xi_{40} = 0) = 0.9, \quad \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 0.9. \quad \lambda = -\ln 0.9 = 0.105 .$$

a) $\eta_{1440}$ 24 óra alatt érkező vírusos file-ok száma. $\eta_{1440}$ Poisson eloszlású

$$\lambda_{1440} = \frac{1440}{40} \cdot 0.105 = 3.78 .$$

Mivel $\lambda_{1440}$ nem egész szám, ezért egy módusz van, $[\lambda_{1440}] = [3.78] = 3$.

$P(\xi_{1440} = 3) = \dfrac{3.78^3}{3!}e^{-3.78}$ =0.205.

b) $\xi_T$ a $T$ idő alatt érkező vírusos file-ok száma. $\eta_T$ Poisson eloszlású $\lambda_T = \dfrac{T}{40}(-\ln 0.9)$ paraméterrel.

$\xi_T$ módusza $[\lambda_T] = \left[\dfrac{T}{40}(-\ln 0.9)\right]$, ha $\lambda_T$ nem egész, és $\lambda_T$ valamint $\lambda_T$ -1, ha $\lambda_T$ egész. Ahhoz, hogy a 3 módusz legyen, az kell, hogy $3 \le \lambda_T \le 4$. $3 \le \dfrac{T}{40}(-\ln 0.9) \le 4$,

azaz $\dfrac{3\cdot 40}{-\ln 0.9} \le T \le \dfrac{4\cdot 40}{-\ln 0.9}$, $1138.9(perc) \le T \le 1518.6(perc)$.

c) $\xi_{60}^1$ az első gépre 60 perc alatt érkező vírusos file-ok száma, $\xi_{60}^2$ a második gépre 60 perc alatt érkező vírusos file-ok száma, $\xi_{60}^1$ és $\xi_{60}^2$ egymástól függetlenek, a két gépre összesen érkező vírusos file-ok száma $\xi_{60}^1 + \xi_{60}^2$ is Poisson eloszlású $\lambda_{össz} = 2\cdot\lambda_{60} = 2\cdot\dfrac{60}{40}\cdot 0.105 = 0.315$ paraméterrel.

$$P(\xi_{60}^1+\xi_{60}^2 \le 3) = P(\xi_{60}^1+\xi_{60}^2 = 0) + P(\xi_{60}^1+\xi_{60}^2 = 1) + P(\xi_{60}^1+\xi_{60}^2 = 2) + P(\xi_{60}^1+\xi_{60}^2 = 3)$$

$$= = \frac{0.315^0}{0!}e^{-0.315} + \frac{0.315^1}{1!}e^{-0.315} + \frac{0.315^2}{2!}e^{-0.315} + \frac{0.315^3}{3!}e^{-0.315} = 0.99968 .$$

9)

a) $\xi$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p = \dfrac{1}{36}$ paraméterrel, azaz $\xi$ lehetséges értékei 1,2,3,...,$k$,... és $P(\xi = k) = \dfrac{1}{36}\cdot\left(\dfrac{35}{36}\right)^{k-1}$. (Addig ismételjük az „elgurítunk két kockát” kísérletet, amíg az $A$=’ dupla hatos sikerült’ esemény be nem következik. Az egyes kísérletek kimenetelei egymástól függetlenek. )

b) $$P(\xi \le 15) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + \ldots + P(\xi = 15) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36} + \ldots. + \frac{1}{36}\cdot\left(\frac{35}{36}\right)^{14} = \frac{1}{36}\frac{\left(\frac{35}{36}\right)^{15} - 1}{\frac{35}{36} - 1} =$$

$$= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{15} = 1 - 0.655 = 0.345 .$$

c) $M(\xi) = \dfrac{1}{p} = 36$. $P(\xi > 72) = 1 - P(\xi \le 72) = 1 - (1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{72}) = \left(\dfrac{35}{36}\right)^{72} = 0.132$.

d) $P(\xi \le n) = 0.9$ $n$=?, $P(\xi \le n) = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n$, $1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n = 0.9$, $\left(\dfrac{35}{36}\right)^n = 0.1$,

$n = \dfrac{-\ln 0.1}{\ln(\frac{35}{36})} = 81.7$, $P(\xi \le 81) = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{81} = 0.898 < 0.9$, $n$=81 még nem elég,

$P(\xi \le 82) = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^{82} = 0.9007 > 0.9$, $n$=82 már elég. Tehát a legkisebb olyan dobás-szám, ami már elég, a 82.

10) Legyen $\xi$ a próbálkozások száma. $\xi$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p=\frac{3}{10}$ paraméterrel. (Addig ismételjük az 'elmegyünk szigorlatozni' kísérletet, amíg az $A$='no végre, az első három tétel valamelyikét húztam' esemény be nem következik. Az egyes kísérletek kimenetelei függetlennek tekinthetők.)

a) $P(\xi \le 3) = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.7^2 = 0.657$.

b) $P(\xi > 9) = 1 - P(\xi \le 9) = \left(\frac{7}{10}\right)^9 = 0.040$.

c) Jelölje $\eta$ a befizetendő díj várható értékét!

$M(\eta) = M(1000 \cdot \xi) - (1000 \cdot 0.3 + 1000 \cdot 0.3 \cdot 0.7) = 1000 \cdot \frac{1}{p} - 510 = 1000 \cdot \frac{1}{0.3} - 510 = 2823$

11) Legyen $\xi$ a kockagurítások száma mindaddig, amíg el nem dől a játék. $\xi$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p=\frac{1}{6}$ paraméterrel. Akkor nyer a kezdő játékos, ha $\xi$ értéke páratlan. $P(\text{a kezdő nyer}) = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^{2i} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{\infty}\left((1-p)^2\right)^i = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^i = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{25}{36}} = 0.545$.

12) $\eta$ annyi, ahányadik dobásra először fejet dobunk. $\eta$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p=\frac{1}{2}$ paraméterrel, lehetséges értékei $1,2,\ldots,k,\ldots$, $P(\eta = k) = \frac{1}{2^k}$. $\xi = 10^\eta$, $P(\xi = 10^k) = \frac{1}{2^k}$.

a) $M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} 10^k \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 5^k = \infty$

b) $\xi_1 = 10^\eta$, ha $\eta \le 9$, $\xi_1 = 10^{10}$, ha $\eta \ge 10$, $P(\eta \ge 10) = \sum_{i=10}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^9}$, $\xi_1$ eloszlása

$$\begin{pmatrix} 10 & 100 & 1000 & & 10^9 & 10^{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \ldots\ldots & \frac{1}{2^9} & \frac{1}{2^9} \end{pmatrix},$$

$M(\xi_1) = \sum_{i=1}^{9} 10^i \cdot \frac{1}{2^i} + 10^{10} \cdot \frac{1}{2^9} = \sum_{i=1}^{9} 5^i + 5^9 \cdot 10 = 21972656$.

13)

a) $\xi$ lehetséges értékei 1,2,3,4,5 (az ötödik húzásra legkésőbb piros lesz, mert addigra elfogynak a fehérek)

$P(\xi = 1) = \frac{6}{10}$,

$P(\xi = 2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0.267$ (kétszer húzok, első golyó nem piros, a második piros)

$P(\xi=3)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=0.1$ (háromszor húzok, az első kettő golyó nem piros, a harmadik piros)

$P(\xi=4)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=0.029$, $P(\xi=5)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{6}=0.005$

b) $M(\xi)=1\cdot 0.6+2\cdot 0.267+3\cdot 0.1+4\cdot 0.029+5\cdot 0.005=1.575$,

$M(\xi^2)=1\cdot 0.6+4\cdot 0.267+9\cdot 0.1+16\cdot 0.029+25\cdot 0.005=3.157$,

$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{3.157-1.575^2}=0.822$. Módusz: 1.

c) $\eta$-val jelölve a szükséges próbálkozások számát visszatevéses húzás esetén $\eta$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p=0.6$ paraméterrel.

$P(\eta=1)=0.6$, $P(\eta=2)=0.6\cdot 0.4=0.24<P(\xi=2)$, $P(\eta=3)=0.6\cdot 0.4^2=0.096<P(\xi=3)$,

$P(\eta=4)=0.6\cdot 0.4^3=0.0384>P(\xi=4)$, $P(\eta=5)=0.6\cdot 0.4^4=0.006>P(\xi=5)$,

$P(\eta=i)\neq 0 \quad i=6,7,\ldots$, $M(\eta)=\frac{1}{0.6}=\frac{10}{6}=1.667$, $D(\eta)=\frac{\sqrt{1-p}}{p}=\frac{\sqrt{0.4}}{0.6}=1.054$,

módusz: 1.

14)

a) Legyen $\xi_2$ a második lépés után az első urnában levő golyók száma. $\xi_2$ lehetséges értékei $1,2$, $P(\xi_2=1)=P(\xi_2=2)=\frac{1}{2}$. Jelölje $A_3$ azt az eseményt, hogy a harmadik lépés során az urnába rakott golyó az első urnába kerül. $P(\xi_3=1)=P(\overline{A}_3\mid\xi_2=1)P(\xi_2=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$P(\xi_3=2)=P(A_3\mid\xi_2=1)P(\xi_2=1)+P(\overline{A}_3\mid\xi_2=2)P(\xi_2=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

$P(\xi_3=3)=P(A_3\mid\xi_2=2)P(\xi_2=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. $\xi$ eloszlása $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, diszkrét egyenletes eloszlás.

b) $A_n$ legyen az az esemény, hogy az *n.* lépés során elhelyezett golyó az 1. urnába kerül. Az indukciós feltevés értelmében $\xi_{n-1}$ lehetséges értékei $1,2,\ldots,n-1$ és $P(\xi_{n-1}=i)=\frac{1}{n-1}$.

Ekkor $\xi_n$ lehetséges értékei $1,2,\ldots,n$

- $\xi_n$ akkor 1, ha $\xi_{n-1}=1$ és utoljára a golyó nem az első urnába kerül,
- $\xi_n$ akkor *i*, ha $\xi_{n-1}=i-1$ és utoljára a golyó az első urnába kerül vagy $\xi_{n-1}=i$ és utoljára a golyó nem az első urnába kerül $i=2,3,\ldots,n-1$.
- $\xi_n$ akkor *n*, ha $\xi_{n-1}=n-1$ és utoljára a golyó az első urnába kerül.

$P(\xi_n=1)=P(\overline{A_n}\mid\xi_{n-1}=1)P(\xi_{n-1}=1)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$ (a második urnában *n*-1 darab golyó van az összes *n*-ből)

$P(\xi_n=i)=P(A_n\mid\xi_{n-1}=i-1)P(\xi_{n-1}=i)+P(\overline{A_n}\mid\xi_{n-1}=i)P(\xi_{n-1}=i)=\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}+\frac{n-i}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=$

$=\frac{i-1+n-i}{n(n-1)}=\frac{n-1}{n(n-1)}=\frac{1}{n}$. $(2\le i\le n-1)$

(ha $\xi_{n-1} = i-1$, akkor az első urnában $i-1$ darab golyó van az $n$-ből, ha $\xi_{n-1} = i$, akkor a második urnában $n$-$i$ golyó van az $n$-ből)

$P(\xi_n = n) = P(A_n \mid \xi_{n-1} = n-1)P(\xi_{n-1} = n-1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$. (az első urnában $n$-$1$ darab golyó van az $n$-ből). Így $\xi_n$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots\ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, ami szintén diszkrét egyenletes eloszlás.

15) Legyen $\xi$ a kiszolgálandó igények száma. $k$ kiszolgáló egység esetén a haszon

$$\eta_k = \begin{cases} 10k & ha \quad \xi \ge k \\ 10\xi - (k-\xi) & ha \quad \xi < k \end{cases}.$$

$\eta_k = 10k \cdot 1_{\xi \ge k} + (11\xi - k) \cdot 1_{\xi < k}$. $M_k = M(\eta_k) =$

$$= \sum_{i=k}^{\infty} 10k \cdot P(\xi = i) + \sum_{i=0}^{k-1} (11i - k)P(\xi = i),$$

$$M_{k-1} = \sum_{i=k-1}^{\infty} 10(k-1) \cdot P(\xi = i) + \sum_{i=0}^{k-2} (11i - k + 1)P(\xi = i).$$

$$M_k - M_{k-1} = 10\sum_{i=k-1}^{\infty} P(\xi = i) - 11P(\xi = k-1) - \sum_{i=0}^{k-2} P(\xi = i) = 10 \cdot (1 - \sum_{i=0}^{k-2} P(\xi = i)) - 11P(\xi = k-1)$$
$$- \sum_{i=0}^{k-2} P(\xi = i) = 10 - 11\sum_{i=0}^{k-1} P(\xi = i).$$

$0 \le M_k - M_{k-1}$, ha $\sum_{i=0}^{k-1} P(\xi = i) \le \frac{10}{11}$, és $M_k - M_{k-1} < 0$, ha $\frac{10}{11} < \sum_{i=0}^{k-1} P(\xi = i)$.

Tehát a haszon várható értéke azon $k$ értékig nő, amíg $\sum_{i=0}^{k-1} P(\xi = i) \le \frac{10}{11}$ teljesül, ennél nagyobb $k$ értékekre már csökken. Mivel $\sum_{i=0}^{\infty} P(\xi = i) = 1$, ezért létezik az a legnagyobb $k$ érték, amire $\sum_{i=0}^{k-1} P(\xi = i) \le \frac{10}{11}$, s ezen $k$-ra maximális a haszon várható értéke. Poisson eloszlású $\xi$ esetén $\lambda = 100$ mellett $k = 112$.

# Folytonos eloszlású valószínűségi változók

## Feladatok

1) Legyen egy $\xi$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & \text{ha } \ e\le x\le A\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

a) Mekkora $A$ értéke?
b) Adjuk meg a $\xi$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
c) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke kisebb 5-nél?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke nagyobb 3-nál?
e) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke az [5,6] intervallumba esik?
f) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke az [$A$-1, $A$] intervallumba esik?
g) Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke a [7,8] intervallumba esik?
h) Mely értéknél kisebb $\xi$ értéke 0.9 valószínűséggel?
i) Mely értéknél nagyobb $\xi$ értéke 0.9 valószínűséggel?
j) Adjunk olyan intervallumot, amibe $\xi$ értéke 0.9 valószínűséggel esik!
k) Számoljuk ki $\xi$ várható értékét!
l) Számoljuk ki $\xi$ szórását!

2) Egy rendelőben várakozunk a bekerülésre. A várakozási idő legalább 10 perc, legfeljebb 2 óra, ezen belül véletlentől függő mennyiség. A megérkezés és a bekerülés közti idő egy olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{x}}, & ha \ \ \dfrac{1}{6}\le x\le 2\\ 0 & különben\end{cases}.$$

a) Mekkora $c$ értéke?
b) Adjuk meg a várakozási idő eloszlásfüggvényét!
c) Mennyi a valószínűsége, 20 percnél kevesebbet kell várnunk?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy 1 óránál többet kell várnunk?
e) Mennyi a valószínűsége, hogy a várakozási idő negyed óra és fél óra közé esik?
f) Mennyi időnél kell többet várnunk 0.75 valószínűséggel?
g) Mennyi időnél kell kevesebbet várnunk 0.75 valószínűséggel?
h) Mennyi a várakozási idő várható értéke?
i) Mennyi az esélye, hogy többet kell várnunk a várakozási idő várható értékénél?
j) Mennyi a várakozási idő mediánja?
k) Mennyi a várakozási idő szórása?

3) Méréseket végzünk a laborban. A mérések hibája (azaz a mért és a valós érték közti különbség) egy olyan $\xi$ valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye $f(x)=0.5e^{-|x|}$ bármely $x$ esetén!

a) Igazoljuk, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény!
b) Adjuk meg a mérési hiba eloszlásfüggvényét!
c) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a mérési hiba abszolút értéke nagyobb 2-nél!

d) Adjunk olyan intervallumokat, amibe a mérési hiba 0.9 valószínűséggel beleesik!
e) Számoljuk ki a mérési hiba várható értékét!

4) Egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+2}, & ha \quad 1 \le x \\ 0 & különben \end{cases}$

a) Igazolja, hogy $F(x)$ eloszlásfüggvény!
b) Mennyi az esélye, hogy a valószínűségi változó értéke 2 és 3 közé esik?
c) Mennyi az esélye, hogy a valószínűségi változó értéke nagyobb, mint 10?
d) Mely értéknél nagyobb a valószínűségi változó értéke 0.95 valószínűséggel?
e) Számítsa ki a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
f) Adja meg a valószínűségi változó mediánját!

5) Választunk két számot egymástól függetlenül a [0,1] intervallumon a geometriai valószínűség szerint. Legyen $\xi$ a két szám összege.

a) Adja meg $\xi$ eloszlásfüggvényét!
b) Adja meg $\xi$ sűrűségfüggvényét!
c) Számolja ki $\xi$ várható értékét!
d) Számolja ki $\xi$ móduszát és mediánját!

6) Választunk két számot egymástól függetlenül a [0,1] intervallumon a geometriai valószínűség szerint. Legyen $\xi$ a két szám egymástól való eltérése.

a) Adja meg $\xi$ eloszlásfüggvényét!
b) Adja meg $\xi$ sűrűségfüggvényét!
c) Számolja ki $\xi$ várható értékét!
d) Számolja ki $\xi$ mediánját!

7) Választunk egy számot a [0,1] intervallumon a geometriai valószínűség szerint, és képezzük a számnál eggyel nagyobb érték reciprokát. Jelölje $\eta$ az így kapott véletlen számot.

a) Adja meg $\eta$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
b) Számolja ki $\eta$ várható értékét!
c) Generáljon egy véletlen számot a számítógéppel, végezze el az adott műveletet és az így kapott számoknak képezze az átlagát. Hasonlítsa össze az így kapott átlagot az előzőleg kiszámolt várható értékkel! Mekkora eltérést tapasztal 100, 10000, 1000000 és $10^8$ szimuláció esetén?

8) Választunk egy pontot a $[0,1]x[0,1]$ négyzetről a geometriai valószínűség szerint. Legyen $\xi$ a választott pont origótól való távolsága

a) Adja meg $\xi$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!
b) Rajzolja fel az eloszlásfüggvényt és „közelítse" az értékeit a $\{\xi < x\}$ események relatív gyakoriságával! Mekkora eltérést tapasztal $10^6$ szimuláció esetén?

9) Választunk egy pontot a $[0,1]x[0,1]$ négyzetről a geometriai valószínűség szerint. Legyen $\xi$ a választott pont origótól való távolsága, $\eta$ pedig a kiválasztott ponthoz vezető vektor $x$ tengellyel bezárt szöge.

a) Adja meg $\eta$ eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

b) Független-e az előző feladatban megadott $\xi$ és $\eta$?

10) Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n}, & ha \quad x \ge 1 \\ 0 & különben \end{cases}.$$

a) Mekkora $n$ értéke?
b) Mennyi az esélye, hogy a valószínűségi változó értéke kisebb 3-nál?
c) Mennyinél kisebb a valószínűségi változó értéke 0.9 valószínűséggel?
d) Mennyi a valószínűségi változó várható értéke?

11) Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{x}^{\alpha}}, & \mathrm{ha} \quad \mathrm{x} \ge 1 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}.$$

(hatványeloszlás)

a) Mekkora $c$ értéke?
b) Mely „$\alpha$” értékek esetén lesz a valószínűségi változó várható értéke véges, de szórása nem?
c) Mely $\alpha$ értékek esetén lesz a valószínűségi változó véges szórása nagyobb, mint a várható értéke?

12) Egy izzó élettartama olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^{\beta}}, ha & x \ge 0 \\ 0 \quad különben \end{cases}$$

($\lambda > 0$, $\beta > 0$ paraméterek –Weibull eloszlás)

Annak a valószínűsége, hogy az izzó 500 órán belül tönkremegy 0.3, annak a valószínűsége, hogy 1200 órán belül sem megy tönkre 0.1. Mennyi időn belül megy tönkre az izzó 0.5 valószínűséggel?

13) Legyen $0 \le F(x) \le 1$ olyan szigorúan monoton növő folytonos függvény egy intervallumon, amelynek értékkészlete [0,1] (esetleg valamely végpont kivételével). Válasszon egy számot a [0,1] intervallumról a geometriai valószínűség szerint. Képezze $F$ inverz függvényét és helyettesítse be ebbe a választott véletlen számot. Adja meg a behelyettesítés után kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

14) Egy részecske sebessége olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} \tanh^m ax^n, & ha \quad x \ge 0 \\ 0 \quad különben \end{cases}$$

a) Milyen értékeket vehetnek fel az egyes paraméterek, ha $F(x)$ eloszlásfüggvény?

b) Rajzolja fel az eloszlásfüggvényt és a sűrűségfüggvényt $a$=1, $m$=1, $n$=1; $a$=1; $m$=2, $n$=1; $a$=1, $n$=2, $m$=1; $a$=1, $m$=0.5, $n$=0.5 paraméterértékek esetén!

c) Számolja ki a várható értéket $a$=1, $m$=2, $n$=1 paraméterértékek esetén!

d) Számolja ki a „közelítőleg” a várható értéket oly módon, hogy generál ilyen eloszlású valószínűségi változó értékeket és átlagolja őket!

e) Számolja ki a „közelítőleg” a várható értéket $a$=1 $m=0.5$, $n=0.5$ paraméterek esetén oly módon, hogy generál ilyen eloszlású valószínűségi változó értékeket és átlagolja őket!

15) Egy szolgáltató egység nyereményjátékot szervez. Az ügyfél bizonyos összeg csekken történő befizetése esetén részt vehet egy nyereményjátékon, és ha szerencsés, akkor visszanyerheti a szolgáltató egység számára általa befizetett pénzösszeget, maximum 100 ezer Ft-ot. A befizetett díj olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye (10 ezer Ft-ban megadva)

$f(x)=0.25\cdot xe^{-x}+0.75x^4e^{-x}/24$ ($x$>0 esetén).

a) Mennyi egy nyertes csekkre visszafizetett összeg várható értéke?
b) Mennyi egy játékban részvevő csekkre visszafizetett összeg várható értéke, amennyiben minden ezredik befizetés nyer?
c) Ha csak akkor vesznek részt az emberek a játékban, ha 100 ezer Ft vagy annál nagyobb a befizetett összeg, mennyi az egy csekken visszanyert összeg várható értéke, amennyiben minden ezredik csekk nyer?

# Megoldások

1)

a) $f(x)\geq 0$ teljesül, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ -nek kell még fennállnia.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{e}0dx+\int\limits_{e}^{A}\frac{1}{x}dx+\int\limits_{A}^{\infty}0dx=\int\limits_{e}^{A}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_e^A=\ln A-\ln e=\ln A-1=1, \qquad \ln A=2,$$

$A=e^2$.

b) $$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & ha \quad x<e\\ \ln x-1, & ha \quad e\leq x\leq e^2,\\ 1, & ha \quad e^2<x\end{cases}$$

mivel $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x}0dt=0, \quad ha\; x<e \quad ;$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{e}0dt+\int\limits_{e}^{x}\frac{1}{t}dt=0+[\ln t]_e^x=\ln x-\ln e=\ln x-1, \quad ha\; e\leq x\leq e^2;$$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{e}0dt+\int\limits_{e}^{e^2}\frac{1}{t}dt+\int\limits_{e^2}^{x}0dt=0+[\ln t]_e^{e^2}+0=0+\ln e^2-\ln e+0=1, \quad ha \quad e^2<x$$

c) $P(\xi<5)=F(5)=\ln 5-1=0.609$.

d) $P(\xi>3)=P(\xi\geq 3)=1-F(3)=1-(\ln 3-1)=2-\ln 3=0.901$.

e) $P(5\leq\xi\leq 6)=P(5\leq\xi<6)=F(6)-F(5)=\ln 6-1-(\ln 5-1)=0.182$.

f) $P(A-1\leq\xi\leq A)=P(e^2-1\leq\xi<e^2)=F(e^2)-F(e^2-1)=\ln(e^2)-1-(\ln(e^2-1)-1)=0.145$

g) $P(7\leq\xi\leq 8)=F(8)-F(7)=1-(\ln 7-1)=0.054$.

h) $x$=?, $P(\xi<x)=0.9$, $F(x)=0.9$, $\ln x-1=0.9$, $\ln x=1.9$, $x=e^{1.9}=6.686$.

i) $x$=?, $P(\xi>x)=0.9$, $1-F(x)=0.9$, $F(x)=0.1$, $\ln x-1=0.1$, $\ln x=1.1$, $x=e^{1.1}=3.004$.

j) [e,6.686], [3.004, $e^2$], További ilyen intervallum pl: $[a,b]$, amennyiben $P(\xi<a)=0.05$, $P(\xi>b)=0.05$. Ekkor $a=e^{1.05}=2.858$, $b=e^{1.95}=7.029$.

k) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{e}^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}dx=\int_{e}^{e^2} 1dx=[x]_e^{e^2}=e^2-e=4.671$.

l) $M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_{e}^{e^2} x^2\frac{1}{x}dx=\int_{e}^{e^2} xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_e^{e^2}=23.605$,

$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{23.605-4.671^2}=1.336$.

2) Jelölje $\xi$ a várakozási időt.

a) $f(x)\geq 0$, ha $c\geq 0$.

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{1/6}^{2}\frac{c}{\sqrt{x}}dx=c\left[\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}\right]_{1/6}^{2}=c\cdot 2\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{6}})=2c\left(\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{6}}\right),$$

$$c=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{6}}}=0.497\approx 0.5.$$

b) A $c$=0.5 kerekített értékkel számolva: $F(x)=\begin{cases}0 & ,ha\quad x<\frac{1}{6}\\ \sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{6}} & ,ha\quad \frac{1}{6}\leq x\leq 2\\ 1 & ,ha\quad 2<x\end{cases}$

c) $P(\xi<\frac{1}{3})=F(\frac{1}{3})=\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}}=0.17$.

d) $P(\xi>1)=1-F(1)=1-(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{1}{6}})=\sqrt{\frac{1}{6}}=0.41$.

e) $P(\frac{1}{4}<\xi<\frac{1}{2})=F(\frac{1}{2})-F(\frac{1}{4})=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{6}}-(\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{6}})=0.21$.

f) $x$=?, $P(\xi>x)=0.75$, $1-F(x)=0.75$, $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{6}}=0.25$, $x$=0.43.

g) $P(\xi<x)=0.75$, $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{6}}=0.75$, $x$=1.34.

h) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{1/6}^{2} x\cdot 0.5\frac{1}{\sqrt{x}}dx=0.5\int_{1/6}^{2}\sqrt{x}dx=0.5\cdot\left[\frac{\sqrt{x^3}}{\frac{3}{2}}\right]_{1/6}^{2}=0.92$.

i) $P(\xi>0.92)=1-F(0.92)=1-(\sqrt{0.92}-\sqrt{\frac{1}{6}})=0.45\neq 0.5$.

j) $F(x)=0.5$, $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{6}}=0.5$, $x$=0.82.

k) $M(\xi^2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int\limits_{1/6}^{2}x^2\frac{0.5}{\sqrt{x}}dx=0.5\left[\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_{1/6}^{2}=1.13,$

$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{1.13-0.92^2}=0.53.$

3)

a) $f(x)\ge 0$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=0.5(\int\limits_{-\infty}^{0}e^x dx+\int\limits_{0}^{\infty}e^{-x}dx)=0.5(\lim\limits_{y\to\infty}\left[e^x\right]_y^0+\lim\limits_{y\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^y)=0.5(1-\lim\limits_{y\to-\infty}e^y+(-\lim\limits_{x\to\infty}e^{-y}+1)=1$

b) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0.5\cdot e^x & ,ha \quad x\le 0\\ 1-0.5e^{-x} & ,ha \quad x>0\end{cases}.$

c) $P(|\xi|>2)=1-P(-2\le\xi\le 2)=1-(F(2)-F(-2))=1-(1-0.5\cdot e^{-2}-0.5\cdot e^{-2})=e^{-2}.$

d) $(-\infty,x)$ alakú intervallum esetén $F(x)=0.9$, $1-0.5\cdot e^{-x}=0.9$, $e^{-x}=0.2$, $x=-\ln 0.2$.
$(x,\infty)$ alakú intervallum esetén $1-F(x)=0.9, F(x)=0.1$ $0.5\cdot e^x=0.1$, $e^x=0.2$, $x=\ln 0.2$.
$[a,b]$ alakú intervallum esetén $P(\xi<a)=0.05$, $P(\xi>b)=0.05$ tulajdonsággal:
$F(a)=0.05$, $0.5\cdot e^a=0.05$, $e^a=0.1$, $a=\ln 0.1$,
$1-F(b)=0.05$, $F(b)=0.95$, $1-0.5e^{-b}=0.95$, $e^{-b}=0.1$, $b=-\ln 0.1$.

e) $M(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=0$. Az improprius integrál konvergens, $f(x)$ páros, ezért az integrál 0.

4)

a) $F(x)\ge 0$ (mind a számláló, mind a nevező nemnegatív,

$f(x)=F'(x)=\frac{((x+2)-(x-1))}{(x+2)^2}=\frac{3}{(x+2)^2}>0$, így $F(x)$ monoton nő,

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}0=0$, $F(x)$ folytonos minden pontban.

b) $P(2<\xi<3)=F(3)-F(2)=\frac{3-1}{3+2}-\frac{2-1}{1+2}=0.067.$

c) $P(\xi>10)=1-F(10)=1-\frac{10-1}{10+2}=0.25.$

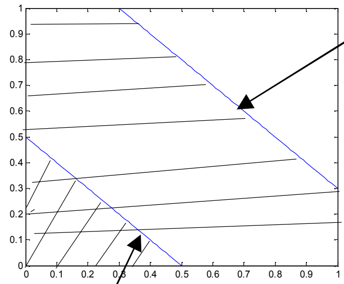
d) $x$=? $P(\xi>x)=0.95$, $1-F(x)=0.95$, $F(x)=\frac{x-1}{x+2}=0.05$, $x-1=0.05x+0.1$, $x=1.16$.

e) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{3}{(x+2)^2}, & ha \quad 1<x\\ 0, \quad ha \quad x<1\end{cases}.$

f) $F(x)=0.5$, $x=4$.

5)

a) Jelöljük $u$-val az elsőre, $v$-vel a másodszorra választott számot. $\xi = u + v$. Mivel $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 1$, így $0 \le \xi \le 2$. Legyen $0 \le x \le 2$.




Ekkor az ábra alapján látható, hogy $P(\xi < x) = P(u + v < x) = \dfrac{x^2}{2}$, $ha \quad x \le 1$.

Amennyiben $1 \le x$, akkor az $u + v = x$ egyenes a $v = x - 1$ -nél metszi az $u = 1$ egyenest, így a felső (be nem satírozott) háromszög oldala $1-(x-1) = 2 - x$, tehát a háromszög területe $(2-x)^2$. Vagyis $P(u+v<x) = 1-(2-x)^2/2$. Összefoglalva

$$F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, & ha \quad 0 < x \le 1 \\ 1-(2-x)^2/2, & ha \quad 1 < x \le 2 \\ 1, & ha \quad 2 < x \end{cases}.$$

b) $$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ x, & ha \quad ha \quad 0 < x \le 1 \\ 2-x, & ha \quad 1 < x \le 2 \\ 0, & ha \quad 2 < x \end{cases}$$

c) $$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot xdx + \int_{1}^{2} x\cdot(2-x)dx + \int_{2}^{\infty} x \cdot 0dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1$$

d) A sűrűségfüggvény lokális maximuma $x$=1-ben van, ezért a módusz 1. $F(x) = \dfrac{1}{2}$ éppen $x$=1-nél, ezért $x$=1 a medián is.

6) Jelölje $u$ és $v$ a két választott számot, $\xi = |u - v|$. Mivel $u$ és $v$ egyaránt 0 és 1 között helyezkedik el, ezért a két szám egymástól való eltérése legalább nulla és legfeljebb egy.

a) Legyen $0 < x \le 1$. $F(x) = P(\xi < x) = P(|u - v| < x) = 1 - \dfrac{(1-x)^2}{2}$. (Vesd össze Geometriai valószínűség fejezet 6) d) !)

Tehát $F(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ 1-(1-x)^2, & ha \quad 0<x\le 1\\ 1, & ha \quad 1<x\end{cases}.$

b) $f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x<0\\ 2-2x, & ha \quad 0<x\le 1\\ 0, & ha \quad 1<x\end{cases}.$

c) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot(2-2x)dx=\left[x^2\right]_0^1-\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$

d) $F(x)=\frac{1}{2}$, $1-(1-x)^2=0.5$, $x=0.293$.

7) $\Omega=[0,1]$, legyen $\xi$ a választott szám. $\eta=\frac{1}{\xi+1}$. Mivel $0\le\xi\le 1$, ezért $0.5\le\eta\le 1$.

a) Legyen $0.5\le x\le 1, F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\frac{1}{x}-1<\xi)=\frac{1-(\frac{1}{x}-1)}{1}=2-\frac{1}{x}.$

Azaz az eloszlás-függvény $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0.5\\ 2-\frac{1}{x}, & ha \quad 0.5<x\le 1,\\ 1, & ha \quad 1<x\end{cases}$

és a sűrűségfüggvény $f_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x<0.5\\ \frac{1}{x^2}, & ha \quad 0.5<x<1.\\ 0, & ha \quad 1<x\end{cases}$

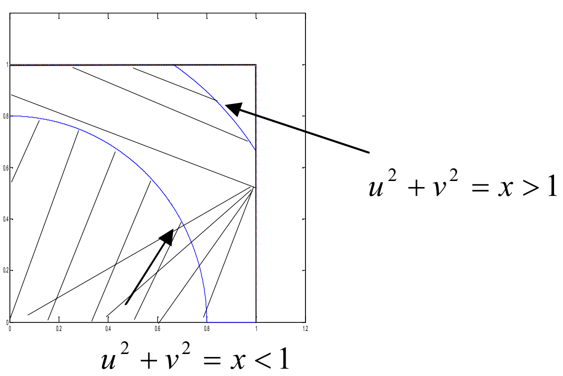
b) $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0.5}^{1} x\cdot\frac{1}{x^2}dx=\int_{0.5}^{1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_{0.5}^{1}=0.693.$

c)

| *N*= | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| átlag | 0.67914631 | 0.693257656 | 0.693168932 | 0.69314016174 |
| eltérés | 0.0140 | 0.00011 | 0.00002 | $7\cdot 10^{-6}$ |

8)

a)



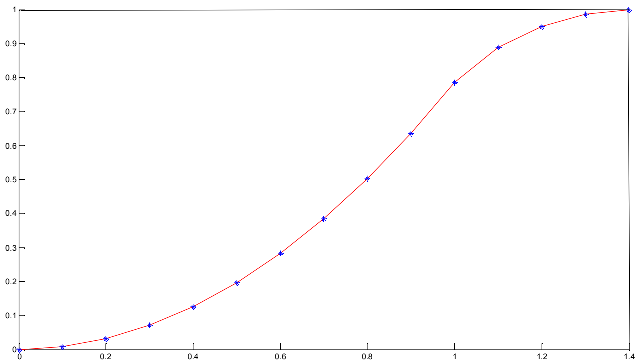
Ennek területe két derékszögű háromszög és egy körcikk területéből adódik össze. A derékszögű háromszögek területe egyenként $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}$, a körcikk középponti szöge $\frac{\pi}{2}-2arctg(\sqrt{x^2-1})$, az összes terület $\sqrt{x^2-1}+x^2(\pi/4-arctg\sqrt{x^2-1})$. Ez azt jelenti, hogy

$$F(x)=P(\xi<x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ \frac{x^2\pi}{4}, & ha \quad 0<x\le 1\\ \sqrt{x^2-1}+x^2(\frac{\pi}{4}-arctg\sqrt{x^2-1}), & ha \quad 1<x\le\sqrt{2}\\ 1, & ha \quad \sqrt{2}<x\end{cases},$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x<0\\ \frac{x\pi}{2}, & ha \quad 0<x<1\\ \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+2x(\frac{\pi}{4}-arctg\sqrt{x^2-1})+x^2(-\frac{1}{1+x^2-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}), & ha \quad 1<x<\sqrt{2}\\ 0, & ha \quad \sqrt{2}<x\end{cases}$$

b)

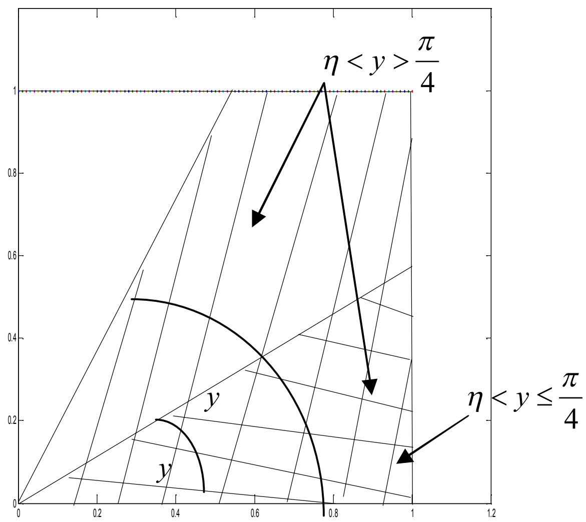
```
function eloszfv(szimszam)
format long
z=0:0.1:1
v=z.*z*pi/4;
x=1.1:0.1:1.4;
y=sqrt(x.*x-1)+(pi/4-atan(sqrt(x.*x-1))).*(x.*x);
x=[z,x];
y=[v,y]
figure(1)
hold on
plot(x,y,'r')
jo=zeros(1,15);
for j=1:1:15
   for i=1:1:szimszam
    v1=rand(1);
    v2=rand(1);
    if v1*v1+v2*v2<x(j)*x(j)
        jo(1,j)=jo(1,j)+1;
    end
   end
end
relgyak=jo/szimszam
figure(1)
hold on
plot(x,relgyak,'*')
kul=abs(relgyak-y)
m=max(kul)
```



Az eloszlásfüggvény és közelítése relatív gyakoriságokkal 100000 szimuláció esetén (maximális eltérés: $6.8\cdot 10^{-4}$).

9)

a) $0 \le \eta < \dfrac{\pi}{2}$.




$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & ha \quad y \le 0 \\ \dfrac{tg\, y}{2}, & ha \quad 0 < y \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 - tg(\dfrac{\pi}{2} - y)/2, & ha \quad \dfrac{\pi}{4} < y \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & ha \quad \dfrac{\pi}{2} < y \end{cases}.$$

$$f_\eta(y) = F_\eta^{'}(y) = \begin{cases} 0, & ha \quad y < 0 \\ \dfrac{1}{2\cos^2(y)}, & ha \quad 0 < y < \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{2\cos^2(\dfrac{\pi}{2} - y)}, & ha \quad \dfrac{\pi}{4} < y < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & ha \quad \dfrac{\pi}{2} < y \end{cases}.$$

o) A függetlenség akkor teljesülne,
ha minden $x$, $y$ esetén $P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$ fennállna .
Legyen $0 < y < \frac{\pi}{4}$, $x = \sqrt{tg^2 y + 1}$. Erre az $x,y$ párra $P(\xi < x, \eta < y) = \frac{tg\ y}{2} \neq$
$\neq P(\xi < x) \cdot P(\eta < y)$, de persze sok más párt is lehet találni, amire nem áll fenn az egyenlőség. Tehát nem független $\xi$ és $\eta$.

10)

a) Ha $n \le 1$, akkor a $\int_1^{\infty} f(x)dx$ nem konvergens. Ha $n > 1$, akkor

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} = 0 - \frac{1}{-n+1} = 1, \text{ vagyis } n = 2.$$

b) $P(\xi < 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{2}{3}$.

c) $F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & ha \quad 1 < x \end{cases}$, $P(\xi < x) = F(x) = 0.9$, $x = 10$.

d) $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{1}{x^2}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty$. Nem véges a várható érték.

11)

a) $\int_1^{\infty} \frac{c}{x^{\alpha}}dx = 1$, $c = \alpha - 1$, $1 < \alpha$

b) $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = (\alpha - 1)\int_1^{\infty} x^{-\alpha+1}dx = (\alpha - 1)\left[\frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & ha \quad 2 < \alpha \\ \infty, & ha \quad 1 < \alpha < 2 \end{cases}$.

$\alpha = 2$ esetén $M(\xi) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty$. Tehát ha $\alpha \le 2$, akkor a várható érték nem véges.

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = (\alpha - 1)\int_1^{\infty} x^{-\alpha+2}dx = (\alpha - 1)\left[\frac{x^{-\alpha+3}}{-\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \begin{cases} \frac{\alpha-1}{\alpha-3}, & ha \quad 3 < \alpha \\ \infty, & ha \quad 1 < \alpha < 3 \end{cases}.$$

Ha $\alpha = 3$, $M(\xi^2) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{\infty} = \infty$ .Tehát $2 < \alpha \le 3$ esetén a várható érték véges, de a szórás nem.

c) $D(\xi) = \sqrt{M(\xi^2) - M^2(\xi)} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha-3} - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2} > \frac{\alpha-1}{\alpha-2}$, $\quad \frac{\alpha-1}{\alpha-3} > 2 \cdot \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2$,
$3 < \alpha < 2 + \sqrt{2}$.

12) Jelölje $\xi$ az izzó élettartamát.

$$P(\xi < 500) = F(500) = 1 - e^{-\lambda\, 500^{\beta}} = 0.3\,,\; P(\xi \ge 1200) = 1 - F(1200) = e^{-\lambda\, 1200^{\beta}} = 0.1\,,$$

$$\lambda \cdot 500^{\beta} = -\ln 0.7\,, \qquad \lambda \cdot 1200^{\beta} = -\ln 0.1\,, \qquad \left(\frac{1200}{500}\right)^{\beta} = \frac{\ln 0.1}{\ln 0.7}\,, \qquad \beta = \frac{\ln\left(\frac{\ln 0.1}{\ln 0.7}\right)}{\ln\frac{1200}{500}} = 2.13\,,$$

$$\lambda = 6.36 \cdot 10^{-7}\;\; F(x) = 0.5\,,\; x^{\beta} = \ln 0.5/(-\lambda)\,,\; x = \sqrt[\beta]{\ln 0.5/(-\lambda)}\,,\; x = 683\,.$$

13) $0 \le F(x) \le 1$, $F^{-1}:[0,1] \to R$. Jelölje $\xi$ a választott számot. $P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x < 0 \\ x, & ha \quad 0 \le x \le 1 \\ 1, & ha \quad 1 < x \end{cases}$

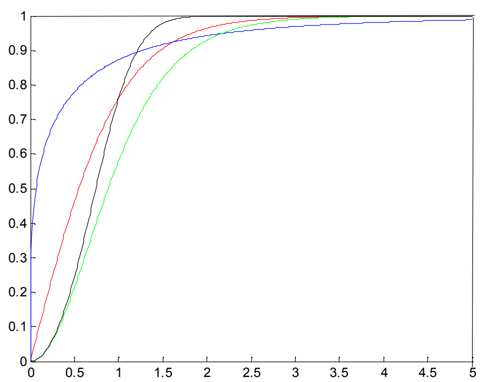
$P(F^{-1}(\xi) < x) = P(\xi < F(x)) = F(x)$. Azaz $F^{-1}(\xi)$ eloszlásfüggvénye $F(x)$.

14)

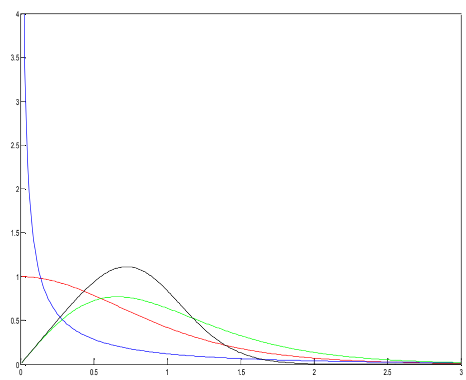
a) A $\tanh x$ függvény negatív argumentum esetén negatív, tehát $0 < a$, továbbá a tanhx függvény nő, ha argentuma pozitív.Tehát ha $ax^n$ nő, úgy az $m$ kitevőnek pozitívnak, ellenkező esetben negatívnak kell lennie. $ax^n$ nő, ha $0 < a$ *és* $0 < n$, és $ax^n$ fogy, ha $n < 0$, ekkor tehát $m < 0$.

De a $\tanh x$ függvény értékei 0 és 1 között helyezkednek el pozitív argumentum esetén, ha ezt negatív hatványra emeljük, akkor a kapott függvényértékek 1-nél nagyobbak lesznek, vagyis $m < 0$ esetén *F(x)* nem eloszlásfüggvény. Ha $0 < a$, $0 < n$ *és* $0 < m$ is teljesül, akkor a függvény 0-ban is folytonos, valamint a határértéke $\infty$-ben 1, vagyis ekkor eloszlásfüggvénnyel állunk szemben.

b) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x < 0 \\ m \cdot n \cdot a \cdot (\tanh^{m-1} ax^n) \cdot \dfrac{1}{ch^2(ax^n)} \cdot x^{n-1}, & ha \quad 0 < x \end{cases}$




eloszlásfüggvények



sűrűségfüggvények

piros: *a*=1,*m*=1,*n*=1, kék: *a*=1, *m*=0.5, *n*=0.5, zöld: *a*=1, *m*=2, *n*=1, fekete: *a*=1,*m*=1,*n*=2.

c) Mivel nemnegatív értékű valószínűségi változóról van szó,

$$M(\xi)=\int_0^\infty (1-F(x))dx=\int_0^\infty (1-\tanh^2(x))dx=[\tanh x]_0^\infty=1.$$

d) $F^{-1}(x)=area\tanh(\sqrt{x}),\quad ha\quad 0\le x$. Ebbe behelyettesítve a számítógép által generált véletlen számokat, a kapott értékek átlaga a következő lett:

| *N*= | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| átlag | 1.073939 | 0.995656 | 0.9994698 | 0.999860395 |

e) $m$=0.5, $n$=0.5, $a$=1 esetén $F^{-1}(x)=\left(area\tanh x^2\right)^2$, $0<x$.
Ebbe behelyettesítve a számítógép által generált véletlen számokat, a kapott értékek átlaga a következő lett:

| *N*= | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| átlag | 0.46956 | 0.4561835 | 0.45960969 | 0.4588740 |

Ez alapján a várható érték 0.45 és 0.46 között helyezkedhet el.

15) $\xi$ a befizetett díj. $\eta$ a nyereményként kifizetett díj. $\eta=\xi\cdot 1_{\xi\le 10}+10\cdot 1_{\xi>10}$.

a) $$M(\eta)=\int_0^{10} xf(x)dx+10\cdot P(\xi>10)=\int_0^{10} x(0.25\cdot xe^{-x}+0.75x^4e^{-x}/24)dx+$$

$$+10\int_{10}^{\infty} 0.25\cdot xe^{-x}+0.75x^4e^{-x}/24dx=4.215\ (10000)=42150\text{Ft}.$$

b) Legyen $\nu$ egy csekkre visszanyert díj. $\nu=\begin{cases}0, & ha\quad nem\quad nyer\\ \eta, & ha\quad nyer\end{cases}=\eta\cdot 1_A$, ahol $A$ az az esemény, hogy a befizetett csekk nyer. $\eta$ és $1_A$ függetlenek.
$M(\nu)=M(\eta)\cdot M(1_A)=M(\eta)\cdot P(A)=42150\cdot 0.001=42.15Ft$.

c) $\theta$ a 100000 Ft-os vagy annál nagyobb befizetéssel visszanyert díj. $\theta=10\cdot 1_A$. Ennek várható értéke $M(\theta)=10\cdot P(A)=10\cdot\dfrac{1}{1000}=0.01$ (10000)Ft=100 Ft.

# Nevezetes folytonos eloszlású valószínűségi változók

## Feladatok

1) Választunk egy számot a [-10,20] intervallumról az egyenletes eloszlás szerint.

a) Mennyi az esélye, hogy a választott szám kisebb 8-nál?
b) Mennyi az esélye, hogy a választott szám 5 és 15 közé esik?
c) Mennyi az esélye, hogy a választott szám nagyobb 12-nél?
d) Mennyi az esélye, hogy a választott szám abszolút értéke kisebb 6-nál?
e) Mennyi az esélye, hogy a választott szám abszolút értéke nagyobb 8-nál?
f) Adjunk legalább 3 darab olyan intervallumot, amibe a választott szám 0.9 valószínűséggel beleesik!

2) Egy úton az első útfelbontás helye egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Az első útfelbontás 0 és 150 (egység) között bárhol lehet.

a) Mennyi az esélye, hogy az első útfelbontás a várható értékén túl található?
b) Feltéve, hogy 70 egységen belül nincs útfelbontás, mennyi az esélye, hogy az első útfelbontás 100 egységen belül van?
c) Feltéve, hogy 100 egységen belül nincs útfelbontás, mennyi az esélye, hogy 130 egységen belül sincs?

3) Egy izzó élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az izzó élettartamának várható értéke 5000 óra.

a) Mennyi az esélye, hogy az izzó 2000 órán belül kiég?
b) Mennyi az esélye, hogy az izzó 5000 órán belül kiég?
c) Mennyi az esélye, hogy az izzó élettartama 5000 és 8000 óra közé esik?
d) Mennyi az esélye, hogy az izzó 10000 órán túl is világít?
e) Mennyi időn belül ég ki az izzó 0.9 valószínűséggel?
f) Feltéve, hogy az izzó 5000 órán belül nem ég ki, mennyi az esélye, hogy 8000 órán belül kiég?
g) Feltéve, hogy az izzó 5000 órán belül nem ég ki, mennyi az esélye, hogy 12000 órán túl is világít?
h) Feltéve, hogy az izzó 5000 órán belül kiég, mennyi az esélye, hogy 1000 órán belül kiég?

4) Egy adott típusú radioaktív atom élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Az atom 32 év leforgása alatt 0.5 valószínűséggel bomlik el.

a) Mennyi az esélye, hogy az atom 24 év alatt se bomlik el?
b) Mennyi időn belül bomlik el az atom 0.95 valószínűséggel?
c) Mennyi az atom élettartamának várható értéke?
d) Ha $N$ darab ilyen típusú atom van, akkor mennyi a 24 év leforgása alatt lebomló atomok számának várható értéke?

5) Egy sorban a várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Annak az esélye, hogy 2 perc és 4 perc között van a várakozási idő 0.2. Mennyi időn belül kerülünk sorra 0.95 valószínűséggel?

6) Legyen $\xi \sim N(0,1)$. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) $\xi$ értéke kisebb 1.5-nél?
b) $\xi$ értéke nagyobb 2.58-nál?
c) $\xi$ értéke kisebb -0.72-nél?
d) $\xi$ értéke nagyobb -1.37-nél?
e) $\xi$ értéke -1.5 és 2.5 közé esik?
f) $\xi$ abszolút értéke kisebb 1.95-nél?

7) Legyen $\xi \sim N(0,1)$.

a) Mely értéknél kisebb $\xi$ értéke 0.7580 valószínűséggel?
b) Mely értéknél kisebb $\xi$ értéke 0.2 valószínűséggel?
c) Mely értéknél nagyobb $\xi$ értéke 0.9 valószínűséggel?
d) Adjunk olyan 0-ra szimmetrikus intervallumot, amibe $\xi$ értéke 0.8 valószínűséggel beleesik!

8) Legyen $\xi \sim N(3,5)$. Mennyi a valószínűsége, hogy

a) $\xi$ értéke kisebb 7-nél?
b) $\xi$ értéke nagyobb 10-nél?
c) $\xi$ értéke kisebb 1-nél?
d) $\xi$ értéke nagyobb 0-nál?
e) $\xi$ értéke -2 és 8 közé esik?
f) $\xi$ abszolút értéke kisebb 10-nél?

9) Legyen $\xi \sim N(-1, 0.2)$.

a) Mely értéknél kisebb $\xi$ értéke 0.85 valószínűséggel?
b) Mely értéknél nagyobb $\xi$ értéke 0.99 valószínűséggel?
c) Adjunk olyan -1-re szimmetrikus intervallumot, amibe $\xi$ értéke 0.99 valószínűséggel beleesik!

10) Egy adagológép cukorkákat adagol. A beadagolt cukorka mennyisége normális eloszlású valószínű-ségi változó 100 gramm várható értékkel és 1.5 gramm szórással.

a) Mennyi az esélye, hogy egy zacskóba beadagolt cukorka mennyisége kevesebb 102 grammnál?
b) Mennyi az esélye, hogy egy zacskóba beadagolt cukorka mennyisége több 97 grammnál?
c) Mennyi az esélye, hogy egy zacskóba beadagolt cukorka mennyisége 98 és 103 gramm közé esik?
d) Hány grammnál több a beadagolt cukorka mennyisége 0.98 valószínűséggel?
e) Adjunk olyan 100 grammra szimmetrikus intervallumot, amibe a beadagolt cukorka mennyisége 0.95 valószínűséggel beleesik!
f) Adjunk olyan 2500 grammra szimmetrikus intervallumot, amibe 25 zacskóba beadagolt cukorka összes tömege 0.95 valószínűséggel beleesik!
g) Adjunk olyan 100 grammra szimmetrikus intervallumot, amibe 25 zacskóba beadagolt cukorka tömegének átlaga 0.95 valószínűséggel beleesik!
h) Hány zacskó tömegét mérjük meg és átlagoljuk, ha azt szeretnénk, hogy a mérések átlaga a betöltött cukorka mennyiségének várható értékétől legfeljebb 0.5 grammra térjen el 0.95 valószínűséggel?
(Az egyes zacskókba beadagolt cukorka mennyiségét egymástól függetlennek tekintjük.)

11) A felnőtt emberek magassága normális eloszlású valószínűségi változó 177 cm várható értékkel és 8 cm szórással.

a) Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember magassága 160 cm és 180 cm közé esik?
b) Mely értéknél lesz kisebb egy véletlenszerűen kiválasztott ember magassága 0.9 valószínűséggel?
c) Mely értéknél lesz nagyobb egy véletlenszerűen kiválasztott ember magassága 0.995 valószínűséggel?
d) 10 embert véletlenszerűen kiválasztva és megvizsgálva őket, mennyi az esélye, hogy közülük 6 magassága esik 160 cm és 180 cm közé, ha megvizsgált emberek magasságát független valószínűségi változóknak tekintjük?

12) Legyen $\xi$ normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke 0.7 . Mennyi $\xi$ szórása, ha $\xi$ értéke kisebb 1-nél 0.85 valószínűséggel ?

13) Egy mérés hibája normális eloszlású valószínűségi változó 0 várható értékkel. A mérés hibája -1 és 1 közé esik 0.95 valószínűséggel. Mely 0-ra szimmetrikus intervallumba esik 100 független mérés hibájának átlaga 0.95 valószínűséggel?

14) Egy liftet szeretnének 6 emberre méretezni. Mennyi legyen a lift teherbíró képessége, ha a beszálló emberek tömegét egymástól független normális eloszlású valószínűségi változóknak tekintjük 75 kg várható értékkel és 10 kg szórással, és azt szeretnénk, hogy 0.98 valószínűséggel ne gyulladjon ki a túlterhelést jelző lámpa?

15) Egy befőttesüvegbe gyümölcsöt és szirupot töltenek. A betöltendő gyümölcs tömege normális eloszlású valószínűségi változó 300 gramm várható értékkel és 15 gramm szórással, a szirup tömege normális eloszlású valószínűségi változó 400 gramm várható értékkel és 10 gramm szórással, és az üveg tömege normális eloszlású valószínűségi változó 100 gramm várható értékkel és 7 gramm szórással. Legalább mennyi egy megtöltött üveg teljes tömege 0.96 valószínűséggel, ha a betöltendő gyümölcs, szirup és az üveg tömege független?

# Megoldások

1) $$F(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le -10\\ \dfrac{x-(-10)}{20-(-10)}=\dfrac{x+10}{30}, & ha \quad -10<x\le 20\\ 1, & ha \quad x<20\end{cases}.$$

a) $P(\xi<8)=F(8)=\dfrac{18}{30}=0.6$.

b) $P(5<\xi<15)=F(15)-F(5)=\dfrac{25}{30}-\dfrac{15}{30}=0.333$.

c) $P(\xi>12)=1-F(12)=1-\dfrac{22}{30}=\dfrac{8}{30}=0.267$.

d) $P(|\xi|<6=P(-6<\xi<6)=F(6)-F(-6)=\dfrac{16}{30}-\dfrac{4}{30}=0.4$.

e) $P(|\xi|>8)=P(\xi>8\cup\xi<-8)=P(\xi>8)+P(\xi<-8)=1-F(8)+F(-8)=0.467$.

f) $P(\xi < x) = 0.9 \Rightarrow x = 17$, intervallum: $[-10,17]$ $P(\xi > x) = 0.9 \Rightarrow x = -7$, intervallum: $[-7,20]$, $P(\xi < y) = 0.05$ *és* $P(\xi > z) = 0.05 \Rightarrow y = -8.5$ $z = 18.5$, intervallum: $[-8.5; 18.5]$.

2) Jelölje $\xi$ az első útfelbontás helyét. $F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ \dfrac{x}{150}, & ha \quad 0 < x \le 150 \\ 1, & ha \quad 150 < x \end{cases}$.

a) $M(\xi) = \dfrac{a+b}{2} = 75$. $P(\xi > M(\xi)) = 1 - F(75) = 1 - 0.5 = 0.5$.

b) $P(\xi < 100 \mid \xi \ge 70) = \dfrac{P(\xi < 100 \cap \xi \ge 70)}{P(\xi \ge 70)} = \dfrac{F(100) - F(70)}{1 - F(70)} = \dfrac{\frac{30}{150}}{\frac{80}{150}} = 0.375$.

c) $P(\xi \ge 130 \mid \xi \ge 100) = \dfrac{P(\xi \ge 130)}{P(\xi \ge 100)} = \dfrac{1 - F(130)}{1 - F(100)} = \dfrac{\frac{20}{150}}{\frac{50}{150}} = 0.4$.

3) Jelölje $\xi$ az izzó élettartamát. $F(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & ha \quad 0 < x \end{cases}$.

$M(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = 5000 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{5000}$.

a) $P(\xi < 2000) = F(2000) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}\cdot 2000} = 0.330$.

b) $P(\xi < 5000) = F(5000) = 1 - e^{-\frac{1}{5000}\cdot 5000} = 0.632$.

c) $P(5000 < \xi < 8000) = F(8000) - F(5000) = 1 - e^{-\frac{8000}{5000}} - (1 - e^{-\frac{5000}{5000}}) = 0.166$.

d) $P(\xi > 10000) = 1 - F(10000) = 1 - (1 - e^{-2}) = 0.135$.

e) $x = ?$ $P(\xi < x) = 0.9$, $1 - e^{-\lambda x} = 0.9$, $x = -5000 \ln 0.1 = 11513$ óra.

f) $P(\xi < 8000 \mid \xi \ge 5000) = \dfrac{P(5000 < \xi < 8000)}{P(\xi \ge 5000)} = \dfrac{F(8000) - F(5000)}{1 - F(5000)} = \dfrac{1 - e^{-\frac{8}{5}} - (1 - e^{-1})}{1 - (1 - e^{-1})} =$

$\dfrac{e^{-1} - e^{-\frac{8}{5}}}{e^{-1}} = 1 - e^{-\frac{3000}{5000}} = F(3000) = P(\xi < 3000)$ (örökfjú tulajdonság).

g) $P(\xi \ge 12000 \mid \xi \ge 5000) = P(\xi \ge 7000) = 1 - F(7000) = e^{-\frac{7}{5}} = 0.247$ (örökfjú tulajdonság).

h) $P(\xi < 1000 \mid \xi < 5000) = \dfrac{P(\xi < 1000)}{P(\xi < 5000)} = \dfrac{F(1000)}{F(5000)} = \dfrac{1 - e^{-\frac{1}{5}}}{1 - e^{-1}} = 0.287$.

4) $\xi$ jelölje az atom élettartamát. $F(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ 1-e^{-\lambda\cdot x} & ha \quad 0<x\end{cases}$.

$P(\xi<32)=F(32)=1-e^{-\lambda\, 32}=0.5$, $\lambda=-\dfrac{\ln 0.5}{32}=0.021667\approx 0.022$.

a) $P(\xi\ge 24)=1-F(24)=e^{-\lambda\cdot 24}=0.595$.

b) $x$=? $P(\xi<x)=0.95$, $F(x)=1-e^{-\lambda\cdot x}=0.95$, $x=138.3$ (a számítógépbe való beütésnél a nem kerekített értéket használtam)

c) $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}=46.2$.

d) $\eta$ a 24 év alatt lebomló atomok száma. $\eta$ binomiális eloszlású $N, p=0.405$ paraméterekkel. $M(\eta)=Np=N\cdot 0.405$.

5) Legyen $\xi$ a várakozási idő, és $x$ a keresett szám.

$P(2<\xi<4)=F(4)-F(2)=1-e^{-\lambda\cdot 4}-(1-e^{-\lambda\cdot 2})=e^{-2\lambda}-e^{-4\lambda}=0.2$. $e^{-2\lambda}=A$,

$-A^2+A=0.2$, $A_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-0.8}}{2}$, $A_1=0.276=e^{-2\cdot\lambda}\Rightarrow\lambda=\dfrac{\ln 0.276}{-2}=0.644$,

$x=\dfrac{\ln 0.05}{-0.644}=4.65$.

$A_2=0.724=e^{-2\cdot\lambda}\Rightarrow\lambda=\dfrac{\ln 0.724}{-2}=0.161, x=\dfrac{\ln 0.05}{-0.161}=18.61$.

6)

a) $P(\xi<1.5)=\phi(1.5)=0.9332$ (táblázat!).

b) $P(\xi>2.58)=1-\phi(2.58)=1-0.9951=0.0049$.

c) $P(\xi<-0.72)=\phi(-0.72)=1-\phi(0.72)=1-0.7642=0.2358$.

d) $P(\xi>-1.37)=1-\phi(-1.37)=1-(1-\phi(1.37))=\phi(1.37)=0.9147$.

e) $P(-1.5<\xi<2.5)=\phi(2.5)-\phi(-1.5)=0.9938-(1-0.9332)=0.9270$.

f) $P(|\xi|<1.95)=P(-1.95<\xi<1.95)=\phi(1.95)-\phi(-1.95)=2\cdot\phi(1.95)-1=$
$2\cdot 0.977-1=0.9488$.

7)

a) $x=?$ $P(\xi<x)=0.7580$. $\phi(x)=0.7580$, $\phi(0.70)=0.7580$, tehát $x$=0.7.

b) $P(\xi<x)=0.2$. $\phi(x)=0.2<0.5\Rightarrow x<0$. Legyen $x=-a$.
$\phi(x)=\phi(-a)=1-\phi(a)=0.2\Rightarrow\phi(a)=0.8$, $a=0.84$, $x=-0.84$.

c) $x=?$ $P(\xi>x)=0.9$, $1-\phi(x)=0.9$, $\phi(x)=0.1<0.5\Rightarrow x<0$. Legyen $x=-a$.
$\phi(x)=\phi(-a)=1-\phi(a)=0.1\Rightarrow\phi(a)=0.9$, $a=1.28$, $x=-1.28$.

d) $x=?$ $P(-x<\xi<x)=0.8$, $\phi(x)-\phi(-x)=0.8$, $\phi(x)-(1-\phi(x))=0.8$, $2\phi(x)-1=0.8$,
$\phi(x)=0.9$, $x=1.28$, az intervallum: $(-1.28; 1.28)$.

8)

a) $P(\xi<7)=F(7)=\phi(\dfrac{7-3}{5})=\phi(0.8)=0.7881$.

b) $P(\xi>10)=1-F(10)=1-\phi(\dfrac{10-3}{5})=1-\phi(1.4)=1-0.9192=0.0808$.

c) $P(\xi<1)=F(1)=\phi(\frac{1-3}{5})=\phi(-0.4)=1-\phi(0.4)=1-0.6554=0.3446$.

d) $P(\xi>0)=1-F(0)=1-\phi(\frac{0-3}{5})=1-(1-\phi(0.6))=\phi(0.6)=0.7257$.

e) $P(-2<\xi<8)=F(8)-F(-2)=\phi(\frac{8-3}{5})-\phi(\frac{-2-3}{5})=\phi(1)-\phi(-1)=2\phi(1)-1=$
$=2\cdot 0.8413-1=0.6826$.

f) $P(|\xi|<10)=P(-10<\xi<10)=F(10)-F(-10)=\phi(\frac{10-3}{5})-\phi(\frac{-10-3}{5})=$
$\phi(1.4)-\phi(-2.6)=0.9192-(1-0.9953)=0.9145$.

9)

a) $x=?$, $P(\xi<x)=0.85$. $F(x)=0.85$, $\phi(\frac{x+1}{0.2})=0.85$, $\frac{x+1}{0.2}=1.04$, $x=0.2\cdot 1.04-1$
$=-0.792$.

b) $x=?$, $P(\xi>x)=0.99$, $1-F(x)=0.99$, $F(x)=0.01$, $\phi(\frac{x+1}{0.2})=0.01$, $\frac{x+1}{0.2}=-2.32$,
$x=0.2\cdot 2.32-1=-0.536$.

c) Ha $\xi\sim N(m,\sigma)$, akkor $P(m-k\cdot\sigma<\xi<m+k\cdot\sigma)=2\phi(k)-1$. $m=-1$. $2\phi(k)-1=0.99$,
$\phi(k)=0.995$, $k=2.58$. A keresett intervallum:
$(-1-2.58\cdot 0.2;-1+2.58\cdot 0.2)=(-1.516;-0.484)$.

10) $\xi$ legyen egy zacskóba beadagolt cukorka mennyisége. $\xi\sim N(100,\ 1.5)$.

a) $P(\xi<102)=F(102)=\phi(\frac{102-100}{1.5})=\phi(1.33)=0.9082$.

b) $P(\xi>97)=1-\phi(\frac{97-100}{1.5})=1-\phi(-2)=1-(1-\phi(2))=\phi(2)=0.9772$.

c) $P(98<\xi<103)=F(103)-F(98)=\phi(\frac{103-100}{1.5})-\phi(\frac{98-100}{1.5})=\phi(2)-\phi(-1.33)=$
$0.9772-(1-0.9082)=0.8854$.

d) $x=?$ $P(\xi>x)=0.98$, $1-\phi(\frac{x-100}{1.5})=0.98$, $\phi(\frac{x-100}{1.5})=0.02$, $\frac{x-100}{1.5}=-2.06$,
$x=96.91$.

e) $P(m-k\cdot\sigma<\xi<m+k\cdot\sigma)=2\phi(k)-1$. $m=100$, $2\phi(k)-1=0.95$, $\phi(k)=0.975$,
$k=1.96$,
A keresett intervallum $(100-1.96\cdot 1.5;100-1.96\cdot 1.5)=(97.06,102.94)$.

f) $\xi_i$ az $i$-edik zacskóba adagolt cukorka mennyisége ($i$=1,2,…,25).
$\sum_{i=1}^{25}\xi_i\sim N(100\cdot 25,1.5\cdot\sqrt{25})$.
A keresett intervallum: $(2500-1.96\cdot 7.5;2500+1.96\cdot 7.5)=(2485,\ 2515)$.

g) $\frac{\sum_{i=1}^{25}\xi_i}{25}\sim N(100,\frac{1.5}{\sqrt{25}})$.
A keresett intervallum: $(100-1.96\cdot 0.3;100-1.96\cdot 0.3)=(99.412,100.588)$.

h) $\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} \sim N(m,\frac{1.5}{\sqrt{n}})$. $P(m-k\frac{1.5}{\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n} < m-k\frac{1.5}{\sqrt{n}}) = 2\cdot\phi(k)-1 = 0.95 \Rightarrow k = 1.96$.

$\frac{1.96\cdot 1.5}{\sqrt{n}} \le 0.5$, $\frac{1.96\cdot 1.5}{0.5} = 5.88 \le \sqrt{n}$, $34.5 \le n$. $n$ legalább 35.

11) $\xi$ egy felnőtt ember magassága. $\xi \sim N(177,8)$.

a) $P(160 < \xi < 180) = F(180) - F(170) = \phi(\frac{180-177}{8}) - \phi(\frac{160-177}{8}) =$

$\phi(0.375) - \phi(-2.125) = 0.6480 - (1-0.9830) = 0.6310$.

b) $x = ?$ $P(\xi < x) = 0.9$, $\phi(\frac{x-177}{8}) = 0.9$, $\frac{x-177}{8} = 1.28$, $x = 177 + 1.28\cdot 8 = 187$.

c) $x = ?$ $P(\xi > x) = 0.995$, $\phi(\frac{x-177}{8}) = 0.995$, $\frac{x-177}{8} = -2.58$, $x = 156$.

d) Tízszer ismétlek egy kísérletet, mind a tízszer azt figyelem, hogy a kiválasztott ember magassága 160 cm és 180 cm közé esik-e. A keresett valószínűség annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a figyelt esemény a tíz kísérlet során hatszor következik be. Ez $\binom{10}{6}0.6310^6(1-0.6310)^4 = 0.246$.

12) $\xi \sim N(0.7,\sigma)$. $P(\xi < 1) = 0.85$. $\phi(\frac{1-0.7}{\sigma}) = 0.85$, $\frac{1-0.7}{\sigma} = 1.04$. $\sigma = 0.288$.

13) $\xi \sim N(0,\sigma)$. $P(-1 < \xi < 1) = 0.95$. $P(0-k\sigma < \xi < 0+k\sigma) = 2\phi(k)-1 = 0.95 \Rightarrow k = 1.96$.

$1.96\cdot\sigma = 1 \Rightarrow \sigma = \frac{1}{1.96} = 0.51$, $\frac{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}{100} \sim N(0,\frac{\sigma}{\sqrt{100}})$. $\frac{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}{100} \sim N(0,0.051)$. $k\cdot 0.051 = 0.1$,

tehát 100 független mérés átlaga (-0.1,0.1)-be esik ugyanolyan valószínűséggel. (Mivel az átlag szórása tizede az eredeti valószínűségi változó szórásának, ezért ez tizede olyan hosszú intervallum, mint az eredeti.)

14) $\xi_i$ a beszállók tömege $i$=1,2,3,4,5,6. $\xi_i \sim N(75,10)$, $\sum_{i=1}^{6}\xi_i \sim N(750,10\cdot\sqrt{6})$.

$x = ?$ $P(\sum_{i=1}^{6}\xi_i < x) = 0.98$, $\phi(\frac{x-750}{24.5}) = 0.98$, $\frac{x-750}{24.5} = 2.06$, $x = 800$.

15) $\xi_1$ a betöltött gyümölcs tömege $\xi_1 \sim N(300,\ 15)$, $\xi_2$ a betöltött szirup tömege $\xi_2 \sim N(400,\ 10)$, $\xi_3$ az üveg tömege, $\xi_3 \sim N(100,\ 7)$. $x = ?$ $P(\xi_1+\xi_2+\xi_3 > x) = 0.96$.

Ekkor mivel $\xi_i$ $i = 1,2,3$ függetlenek, $\xi_1+\xi_2+\xi_3 \sim N(800,\ \sqrt{15^2+10^2+7^2})$.

$1 - F_{\xi_1+\xi_2+\xi_3}(x) = 0.96$, $\phi(\frac{x-800}{19.34}) = 0.04$, $\frac{x-800}{19.34} = -1.75$ $x = 766$.

# Kapcsolatok az eloszlások között

## Feladatok

1) Van $2n$ golyónk és $n$ dobozunk. A golyókat véletlenszerűen behelyezzük a dobozokba oly módon, hogy minden golyó minden dobozba ugyanolyan eséllyel kerül a többi golyótól függetlenül. Legyen $\xi_n$ az első dobozba kerülő golyók száma!

a) Adjuk meg $\xi_n$ eloszlását!
b) Mennyi az első dobozba kerülő golyók számának várható értéke?
c) Mennyi az esélye, hogy az első dobozba egy golyó sem kerül? Számolja ki a valószínűséget $n=10$, $n=100$, $n=1000$, $n=10000$ esetén!
d) Mennyi az esélye, hogy az első dobozba 1 golyó kerül? Számolja ki a valószínűséget $n=10$, $n=100$, $n=1000$, $n=10000$ esetén!
e) Mennyi az esélye, hogy az első dobozba 2 golyó kerül? Számolja ki a valószínűséget $n=10$, $n=100$, $n=1000$, $n=10000$ esetén!
f) Hova tartanak a fenti valószínűségek ha $n\to\infty$? Hasonlítsa össze a fenti valószínűségeket a határértékükkel!

2) Két telefonközpontba érkeznek hívások. Az elsőbe egységnyi idő alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1=2$ paraméterrel, a másodikba egységnyi idő alatt érkező hívások száma szintén Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda_2=0.5$ paraméterrel. A két központba érkező hívások számát megadó valószínűségi változók egymástól függetlenek.

a) Feltéve, hogy a két központba összesen 3 hívás érkezik egységnyi idő alatt, mennyi az esélye, hogy az első központba egy hívás sem érkezik?
b) Feltéve, hogy összesen 3 hívás érkezik egységnyi idő alatt, adjuk meg az első központba érkező hívások számának eloszlását!

3) Legyen $\xi_1$, $\xi_2$ független $\lambda_1$ illetve $\lambda_2$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Adjuk meg $\xi_1$ eloszlását, ha tudjuk, hogy $\xi_1+\xi_2=n$ ($n\geq 1$ egész szám).

4) Van $N$ golyónk, köztük $S$ piros és $N$-$S$ fehér. Visszatevés nélkül kiválasztunk közülük $n$=4 darabot. Legyen $A_i$ az az esemény, hogy a kivett golyók közt $i$ darab piros golyó van ($i$=0,1,2,3,4).

a) Számítsa ki a $P(A_i)$ valószínűségeket, ha $S$=4, $N$=10; $S$=40, $N$=100; $S$=400, $N$=1000; $S$=4000, $N$=10000.
b) Hova tartanak a $P(A_i)$, $i$=0,1,2,3,4 valószínűségek, amennyiben $N\to\infty$, és $\frac{S}{N}=0.4$? Hasonlítsa össze a kiszámolt valószínűségeket a határértékükkel!

5) Kati és Juli kockát gurít. Kati 12-szer, Juli 8-szor gurítja el a kockát.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen 4 darab hatost gurítanak?
b) Feltéve, hogy összesen 4 hatost gurítanak, mennyi az esélye, hogy Kati három hatost gurít?
c) Adja meg Kati hatos gurításainak eloszlását, ha tudjuk, hogy összesen 4 hatost gurítanak?

d) Hány hatost gurít Kati a legnagyobb eséllyel, ha összesen 4 hatost gurítanak?

6) Legyenek $\xi_1$ és $\xi_2$ független $n_1$, $p$; és $n_2$, $p$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsa be, hogy $\xi_1 + \xi_2$ szintén binomiális eloszlású!

7) Legyenek $\xi_1$ és $\xi_2$ független $n_1$ $p$; és $n_2$, $p$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változók. Adja meg a $P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n)$ feltételes valószínűségeket!( $0 \le k \le n \le n_1 + n_2$ ). Melyik eloszláshoz tartozó valószínűségekkel áll szemben?

8) Egy urnában 100 golyó van, köztük 20 piros, 30 fehér és 50 zöld. Visszatevés nélkül kiválasztunk 10 golyót. Jelölje $\xi_1$ a kivett piros, $\xi_2$ a kivett fehér, $\xi_3$ a kivett zöld golyók számát. Adja meg a $P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = 5)$ feltételes valószínűségeket!

9) Egy urnában 100 golyó van, köztük 20 piros, 30 fehér és 50 zöld. Visszatevéssel kiválasztunk 10 golyót. Jelölje $\xi_1$ a kivett piros, $\xi_2$ a kivett fehér, $\xi_3$ a kivett zöld golyók számát. Adja meg a $P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = 5)$ feltételes valószínűségeket! Ráismer-e valamelyik nevezetes eloszlásra?

10) Egy urnában 30 golyó van 15 piros, 10 fehér és 5 zöld. Visszatevés nélkül kiveszünk közülük 4 darabot. Legyen $\xi$ a kivett piros golyók száma, $\eta$ a kivett fehér golyók száma.

a) Adja meg $\xi$, $\eta$, valamint $\xi + \eta$ eloszlását, várható értékét!
b) Független-e $\xi$ és $\eta$?

11) Egy urnában 30 golyó van 15 piros, 10 fehér és 5 zöld. Visszatevéssel kiveszünk közülük 4 darabot. Legyen $\xi$ a kivett piros golyók száma, $\eta$ a kivett fehér golyók száma.

a) Adja meg $\xi$, $\eta$, valamint $\xi + \eta$ eloszlását!
b) Független-e $\xi$ és $\eta$?

12) Egy cég nyereményjátékot szervez. Termékei csomagolásának belsejében egy-egy figura képe van behelyezve. 5-féle figura (Mézga Géza, Paula, Máris, Aladár és Kriszta) képe egyforma eséllyel kerül minden egyes termék belsejébe. Össze kell gyűjteni minden figuráról egy képet, és beküldeni a cégnek, s ekkor a gyűjtő ajándékot kap.

a) Ha egy család elhatározza, hogy addig vásárol a termékből, amíg mind az öt figura összegyűlik, akkor mennyi a megveendő termékek számának várható értéke?
b) Szimulálja a feladatot és számolja ki a szükséges vásárlások számának átlagát $N = 100,\quad 10000,\quad 100000$ szimuláció esetén!

13) Egy gyárban egy géphez egy bizonyos alkatrészt alkalmaznak. Az alkatrész élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 300 óra várható értékkel. Ha az alkatrész tönkremegy, akkor rögtön kicserélik egy ugyanolyan típusú alkatrészre, amelynek élettartama független az előző alkatrészek élettartamától.

a) Mennyi az esélye, hogy 200 óra alatt egy alkatrész sem hibásodik meg?
b) Mennyi az esélye, hogy négyszer kell alkatrészt cserélni 600 óra alatt?
c) Mennyi az alkatrészcserék számának várható értéke 650 óra alatt?
d) Hány tartalék alkatrész legyen a raktáron, hogy 0.995 valószínűséggel elegendő legyen 600 órára?

14) Egy kereszteződésben egy napon történő balesetek száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 0.5$ paraméterrel. Az egyes napokon történő balesetek száma egymástól független.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy hétfőn legalább 1 baleset történik?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy a hét 5 napján nem történik, két napján pedig történik baleset?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy egy hét alatt legalább 2 baleset történik?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy hét alatt 2 baleset történik, hétfőn és kedden egy-egy baleset történik?

15) Legyen $\xi$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterrel. Bizonyítsa be, hogy $\eta = [\xi] + 1$ geometriai eloszlású valószínűségi változó!

# Megoldások

1)

a) $\xi_n$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $2n$, $p = \dfrac{1}{n}$ paraméterekkel. ($2n$-szer ismételjük azt a kísérletet, hogy elhelyezünk egy golyót az $n$ darab doboz valamelyikében. $\xi_n$ az a szám, ahányszor az első dobozba helyezzük a golyót a $2n$ kísérlet során.)

b) $M(\xi_n) = 2n \cdot \dfrac{1}{n} = 2$.

c) $P(\xi_n = 0) = \dbinom{2n}{0}\left(\dfrac{1}{n}\right)^0 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | határérték |
|---|---|---|---|---|---|
| Valószínűség | 0.1216 | 0.1339 | 0.1352 | 0.13532 | 0.13533 |

d) $P(\xi_n = 1) = \dbinom{2n}{1}\left(\dfrac{1}{n}\right)^1 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n-1}$

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | határérték |
|---|---|---|---|---|---|
| Valószínűség | 0.2702 | 0.27066 | 0.2706705 | 0.2706705 | 0.2706706 |

e) $P(\xi_n = 2) = \dbinom{2n}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n-2}$

| $n$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | határérték |
|---|---|---|---|---|---|
| valószínűség | 0.2852 | 0.27203 | 0.270806 | 0.270684 | 0.2706706 |

f) $k$ rögzített, $2n \to \infty$, $2n \cdot p = \lambda = 2$,

$$P(\xi_n = k) = \binom{2n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{2^k}{k!}e^{-2}.$$

A határérték ennek az értéke $k = 0,1,2$ esetén.

2) $\xi_1$ az első központba érkező hívások száma, $\xi_2$ a második központba érkező hívások száma egységnyi idő alatt. Mivel $\xi_1$ és $\xi_2$ független Poisson eloszlású valószínűségi változók, ezért $\xi_1 + \xi_2$ is Poisson eloszlású $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 2.5$ paraméterrel.

a) $P(\xi_1=0\mid\xi_1+\xi_2=3)=\dfrac{P(\xi_1=0\cap\xi_1+\xi_2=3)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=\dfrac{P(\xi_1=0\cap\xi_2=3)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=$

$$=\frac{P(\xi_1=0)\cdot P(\xi_2=3)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=\frac{\frac{2^0}{0!}e^{-2}\cdot\frac{0.5^3}{3!}e^{-0..5}}{\frac{2.5^3}{3!}\cdot e^{-2.5}}=\left(\frac{0.5}{2.5}\right)^3.$$

b) Ha $\xi_1+\xi_2=3$, akkor $\xi_1$ értéke 0,1,2,3 lehet csupán, és $k=0,1,2,3$ esetén

$$P(\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=3)=\frac{P(\xi_1=k\cap\xi_1+\xi_2=3)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=\frac{P(\xi_1=k\cap\xi_2=3-k)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=$$

$$\frac{P(\xi_1=k)\cdot P(\xi_2=3-k)}{P(\xi_1+\xi_2=3)}=\frac{\frac{2^k}{k!}e^{-2}\cdot\frac{0.5^{3-k}}{(3-k)!}e^{-0.5}}{\frac{2.5^3}{3!}\cdot e^{-2.5}}=\binom{3}{k}\left(\frac{2}{2.5}\right)^k\left(\frac{0.5}{2.5}\right)^{3-k}.$$

(Binomiális eloszlás $n$=3, $p=\dfrac{2}{2.5}=0.8$ paraméterekkel.)

3) Ha tudjuk, hogy $\xi_1+\xi_2=n$, akkor $\xi_1$ értéke $0,1,2,\ldots,n$ lehet csupán.
Ezen lehetséges értékekhez tartozó feltételes valószínűségek

$$P(\xi_1=k\mid\xi_1+\xi_2=n)=\frac{P(\xi_1=k\cap\xi_1+\xi_2=n)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=$$

$$=\frac{P(\xi_1=k\cap\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=\frac{P(\xi_1=k)\cdot P(\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=$$

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ (binomiális eloszlás).

4)

a) $P(A_i)=\dfrac{\binom{S}{i}\cdot\binom{N-S}{4-i}}{\binom{N}{4}}$

| $N$ | 10 | 100 | 1000 | 10000 | határérték |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(A_0)$ | 0.0714 | 0.1244 | 0.1291 | 0.12955 | 0.1296 |
| $P(A_1)$ | 0.3809 | 0.3491 | 0.3459 | 0.34563 | 0.3456 |
| $P(A_2)$ | 0.4286 | 0.3521 | 0.3662 | 0.34566 | 0.3456 |
| $P(A_3)$ | 0.1143 | 0.1512 | 0.1534 | 0.15357 | 0.1536 |
| $P(A_4)$ | 0.0048 | 0.0233 | 0.0254 | 0.02557 | 0.0256 |

b) Ha $\xi_N$ jelöli a kivett piros golyók számát, $i$ rögzített, $N \to \infty$, $\frac{S}{N} = 0.4 =$ állandó, akkor

$$P(\xi_N = i) = \frac{\binom{S}{i} \cdot \binom{N-S}{4-i}}{\binom{N}{4}} \to \binom{4}{i}\left(\frac{S}{N}\right)^i \left(1-\frac{S}{N}\right)^{4-i} = \binom{4}{i}(0.4)^i (0.6)^{4-i}.$$

5)

a) $\xi_1$ Kati, $\xi_2$ Juli hatos gurításainak száma, ketten együtt $\xi_1 + \xi_2$ hatost gurítanak. $\xi_1 + \xi_2$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 20$, $p = \frac{1}{6}$ paraméterekkel (felfoghatjuk úgy, hogy 20 gurítás történik, azt számoljuk, mennyi köztük a hatos gurítások száma).

$$P(\xi_1 + \xi_2 = 4) = \binom{20}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 0.202.$$

b) $$P(\xi_1 = 3 \mid \xi_1 + \xi_2 = 4) = \frac{P(\xi_1 = 3 \cap \xi_1 + \xi_2 = 4)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 4)} = \frac{P(\xi_1 = 3) \cdot P(\xi_2 = 1)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 4)} =$$

$$= \frac{\binom{12}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \cdot \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^7}{\binom{20}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{16}} = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{4}} = 0.363.$$

c) Ha $\xi_1 + \xi_2 = 4$, akkor $\xi_1$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4

$$P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = 4) = \frac{P(\xi_1 = k \cap \xi_1 + \xi_2 = 4-k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 4)} = \frac{P(\xi_1 = k) \cdot P(\xi_2 = 4-k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 4)} =$$

$$= \frac{\binom{12}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{12-k} \cdot \binom{8}{4-k}\left(\frac{1}{6}\right)^{4-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{8-(4-k)}}{\binom{20}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{16}} = \frac{\binom{12}{k} \cdot \binom{8}{4-k}}{\binom{20}{4}}.$$

(Hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N$=20, $S$=12, $n$=4 paraméterekkel.)

d) $\frac{\binom{12}{k} \cdot \binom{8}{4-k}}{\binom{20}{4}}$ értéke $k = 0$ esetén 0.015, $k = 1$ esetén 0.139, $k = 2$ esetén 0.381, $k = 3$ esetén 0.363, $k = 4$ esetén 0.102. $k = 2$ esetén a legnagyobb az előző valószínűség, vagyis két hatost gurít a legnagyobb eséllyel Kati, ha együtt összesen 4 hatost gurítanak.

6) $\xi_1$ a $0,1,2,\ldots n_1$ értékekeket veszi fel, $P(\xi_1 = i) = \binom{n_1}{i} p^i \cdot (1-p)^{n_1 - i}$,

$\xi_2$ a $0,1,2,\ldots n_2$ értékekeket veszi fel, $P(\xi_2 = j) = \binom{n_2}{j} p^i \cdot (1-p)^{n_2 - j}$,

Tegyük fel, hogy $n_2 \le n_1$, ellenkező esetben felcseréljük az indexeket.

$\xi_1$ és $\xi_2$ függetlensége miatt $P(\xi_1 = i \cap \xi_2 = j) = P(\xi_1 = i) \cdot P(\xi_2 = j)$.
$\xi_1 + \xi_2$ értéke lehet $0,1,2,3,..., n_1 + n_2$, valamint számoljuk ki a $P(\xi_1 + \xi_2 = k)$ valószínűségeket!

Ha $k \le n_2$, akkor $P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi_1 = k - j \cap \xi_2 = j) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi_1 = k - j) \cdot P(\xi_2 = j) =$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{k-j} p^{k-j} \cdot (1-p)^{n_1-(k-j)} \cdot \binom{n_2}{j} p^j \cdot (1-p)^{n_2-j} = p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{n_1}{i} \cdot \binom{n_2}{k-i} =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}.$$

Ha $n_2 < k \le n_1$, akkor

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{j=0}^{n_2} P(\xi_1 = k - j \cap \xi_2 = j) = p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \sum_{j=0}^{n_2} \binom{n_1}{k-j} \cdot \binom{n_2}{j} =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}.$$

Ha $n_1 < k$ akkor

$$P(\xi_1 + \xi_2 = k) = \sum_{j=k-n_1}^{n_2} P(\xi_1 = k - j \cap \xi_2 = j) =$$

$$= p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \sum_{j=k-n_1}^{n_2} \binom{n_1}{k-j} \cdot \binom{n_2}{j} = p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}.$$

7) $P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = n) = \dfrac{P(\xi_1 = k \cap \xi_1 + \xi_2 = n)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \dfrac{P(\xi_1 = k \cap \xi_2 = n - k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} =$

$$= \frac{P(\xi_1 = k) P(\xi_2 = n - k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{\binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \cdot \binom{n_2}{n-k} p^{n_1-k} (1-p)^{n_2-(n_1-k)}}{\binom{n_1+n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n}} = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}.$$

Hipergeometrikus eloszláshoz tartozó valószínűségek.

8) $\xi_1 + \xi_2$ a kivett nem zöld (egyéb) színű golyók száma. $\xi_1 + \xi_2$ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N$=100, $S$=50, $n$=10 paraméterekkel.

$$P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = 5) = \frac{P(\xi_1 = k \cap \xi_1 + \xi_2 = 5)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 5)} = \frac{P(\xi_1 = k \cap \xi_1 + \xi_2 = 5)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 5)} =$$

$$= \frac{\binom{20}{k}\binom{30}{5-k}\binom{50}{5}}{\binom{50}{5}\binom{50}{5}} = \frac{\binom{20}{k}\binom{30}{5-k}}{\binom{50}{5}}.$$

(Ha összesen 5 az egyéb színű, akkor 5 darab zöldet kellett kiválasztani a 10 golyó választása során.)
Mivel $0 \le k \le 5$ egész, ezért hipergeometrikus eloszláshoz tarozó valószínűségekkel állunk megint szemben.

9) $P(\xi_1 = k \mid \xi_1 + \xi_2 = 5) = \dfrac{P(\xi_1 = k \cap \xi_1 + \xi_2 = 5)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 5)} = \dfrac{P(\xi_1 = k \cap \xi_2 = 5 - k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = 5)} =$

$$= \frac{\binom{10}{k}\left(\frac{20}{100}\right)^k \binom{10-k}{5-k}\left(\frac{30}{100}\right)^{5-k}\left(\frac{50}{100}\right)^5}{\binom{10}{5}\left(\frac{20+30}{100}\right)^5\left(\frac{50}{100}\right)^5} = \binom{5}{k}\left(\frac{20}{50}\right)^k\left(\frac{30}{50}\right)^{5-k}.$$

(Ha öt egyéb színű lett, akkor 5 zöldet kellett választani a 10 golyó választása során.)

Ezek a binomiális eloszláshoz tartozó valószínűségek $n$=5 és $p=\dfrac{20}{50}$ paraméterek mellett.

10)

a) $\xi$ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N$=30, $S$=15, $n$=4 paraméterekkel, vagyis $\xi$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\xi = i) = \dfrac{\binom{15}{i}\binom{15}{4-i}}{\binom{30}{4}}$, $i$=0,1,2,3,4. $\eta$ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N$=30, $S$=10, $n$=4 paraméterekkel, vagyis $\xi$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\eta = i) = \dfrac{\binom{10}{i}\binom{20}{4-i}}{\binom{30}{4}}$, $i$=0,1,2,3,4. $\xi + \eta$ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó $N$=30, $S$=25, $n$=4 paraméterekkel, vagyis $\xi + \eta$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\xi + \eta = i) = \dfrac{\binom{25}{i}\binom{5}{4-i}}{\binom{30}{4}}$, $i$=0,1,2,3,4.

b) Ha függetlenek lennének, akkor a $P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)P(\eta = j)$ egyenlőség fennállna minden $0 \le i \le 4$ $i$ egész, és $0 \le j \le 4$, $j$ egész esetén. De $i = 4$, $j$=4 esetén $P(\xi = 4, \eta = 4) = 0$, míg $P(\xi = 4) \ne 0$, $P(\eta = 4) \ne 0$, így az egyenlőség ekkor biztosan nem áll fenn.

11)

a) $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=4, $p = \dfrac{15}{30}$ paraméterekkel, vagyis $\xi$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\xi = i) = \binom{4}{i}\left(\frac{15}{30}\right)^i (1 - \frac{15}{30})^{4-i}$. $\eta$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=4, $p = \dfrac{10}{30}$ paraméterekkel, vagyis $\eta$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\eta = i) = \binom{4}{i}\left(\frac{10}{30}\right)^i (1 - \frac{10}{30})^{4-i}$. $\xi + \eta$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=4,

$p = \frac{25}{30}$ paraméterrel, vagyis $\xi + \eta$ lehetséges értékei 0,1,2,3,4 és $P(\eta = i) = \binom{4}{i}\left(\frac{25}{30}\right)^i (1 - \frac{25}{30})^{4-i}$.

b) Ha függetlenek lennének, akkor az $P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)P(\eta = j)$ egyenlőség fennállna minden $0 \le i \le 4$, $i$ egész, és $0 \le j \le 4$ $j$ egész esetén. De $i = 4$, $j$=4 esetén $P(\xi = 4, \eta = 4) = 0$, míg $P(\xi = 4) \ne 0$, $P(\eta = 4) \ne 0$, így az egyenlőség ekkor biztosan nem áll fenn.

12)

a) Legyen $\eta$ a szükséges vásárlások száma. Bontsuk fel a szükséges vásárlások számát aszerint, hogy hány különböző figurára sikerült már rátalálnunk a vásárlások során. Legyen $\xi_1$ az első figura megtalálásáig szükséges vásárlások száma, $\xi_1 = 1$. $\xi_2$ legyen a következő (elsőtől különböző) figura megtalálásáig szükséges vásárlások száma az első megtalálása után. $\xi_2$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p_2 = \frac{4}{5}$ paraméterrel. $\xi_3$ legyen a második megtalálásától a harmadik különböző figura megtalálásáig történő vásárlások száma, $\xi_4$ legyen a harmadik megtalálásától a negyedik különböző figura megtalálásáig történő vásárlások száma, és $\xi_5$ legyen a negyedik megtalálásától az ötödik különböző figura megtalálásáig történő vásárlások száma. $\xi_3$ , $\xi_4$, és $\xi_5$ is geometriai eloszlású valószínűségi változó $p_3 = \frac{3}{5}$, $p_4 = \frac{2}{5}$, $p_5 = \frac{1}{5}$ paraméterekkel.

$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$, tehát

$$M(\eta) = 1 + M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3) + M(\xi_4) + M(\xi_5) = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + \frac{5}{1} = 11.4167$$

b) A figurákat megfeleltettem az 1,2,3,4,5 számoknak.

```
function mezga(szimszam)
osszesen=0;
    for i=1:1:szimszam
     hany=1;
     vel=floor(rand(1)*5+1);
     talal=[vel];
     while length(talal)<5
         ujra=1;
     while ujra==1
         vel=floor(rand(1)*5+1);
         hany=hany+1;
         volt=0;
     for j=1:1:length(talal)
             if vel==talal(j)
             volt=volt+1;
             end
     end
        if volt==0
            ujra=0;
            talal=[talal,vel];
        end
     end
     end
     osszesen= osszesen+hany;
```

```
end
atlag=osszesen/szimszam
```

| $N$ | 100 | 10000 | 1000000 | Várható érték |
|---|---|---|---|---|
| átlag | 11.5400 | 11.4427 | 11.4222 | 11.4167 |

13) $\xi_i$ az $i$-edik alkatrész élettartama, $\xi_i$ $i = 1,2,...$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $\eta_T$ a $T$ ideig történő alkatrészcserék száma.

$$\eta_T = \begin{cases} 0 & ha \quad T < \xi_1 \\ 1 & ha \quad \xi_1 \le T \le \xi_1 + \xi_2 \\ \ldots & \\ n & ha \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i \le T < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i \end{cases}.$$

$\eta_T$ Poisson eloszlású $\lambda^* = \lambda \cdot T$ paraméterrel.

a) $\lambda^* = \frac{200}{300}$, $P(\eta_{200} = 0) = \frac{\left(\frac{200}{300}\right)^0}{0!} e^{-\frac{200}{300}} = P(\xi_1 > 200) = 1 - F(200) = e^{-\frac{200}{300}} = 0.513$.

b) $\lambda^* = \frac{1}{300} 600 = 2$, $P(\eta_{600} = 4) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} = 0.090$.

c) $M(\eta_{650}) = \frac{1}{300} \cdot 650 = 2.167$.

d) $k = ?$, $P(\eta_{600} \le k) \ge 0.95$. $k = 7$.

14) $\xi_i$ jelölje az $i$-edik napon történő balesetek számát.

a) $P(\xi_1 \ge 1) = 1 - \frac{0.5^0}{0!} e^{-0.5} = 1 - 0.607 = 0.393$.

b) $\eta$ legyen azon napok száma a héten, amikor nem történik baleset. $\eta$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 7$, $p = 0.607$ paraméterekkel.

$$P(\eta = 5) = \binom{7}{5} 0.607^5 \cdot 0.393^2 = 0.267.$$

c) $P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i \ge 2) = 1 - \left( P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i = 0) + P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i = 1) \right) = 1 - (\frac{3.5^0}{0!} e^{-3.5} + \frac{3.5^1}{1!} e^{-3.5}) =$
$1 - 0.136 = 0.864$.

d) $$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1 | \sum_{i=1}^{7} \xi_i = 2) = \frac{P(\xi_1 = 1 \cap \xi_2 = 1 \cap \sum_{i=1}^{7} \xi_i = 2)}{P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i = 2)} = \frac{P(\xi_1 = 1 \cap \xi_2 = 1 \cap \sum_{i=3}^{7} \xi_i = 0)}{P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i = 2)} =$$

$$= \frac{P(\xi_1 = 1) P(\xi_2 = 1) P(\sum_{i=3}^{7} \xi_i = 0)}{P(\sum_{i=1}^{7} \xi_i = 2)} = \frac{\frac{0.5^1}{1!} e^{-0.5} \cdot \frac{0.5^1}{1!} e^{-0.5} \cdot \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5}}{\frac{3.5^2}{2!} e^{-3.5}} = 2 \cdot \left( \frac{0.5}{3.5} \right)^2 = 0.041.$$

15) $0 \le \xi$, $\eta$ lehet 1,2,3,….

$P([\xi]+1=k)=P([\xi]=k-1)=P(k-1\le\xi<k)=F_\xi(k)-F_\xi(k-1)=(1-e^{-\lambda k})-(1-e^{-\lambda(k-1)})=$
$e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda})=(1-e^{-\lambda})\left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}$.

Geometriai eloszlású valószínűségi változó, paramétere $p=1-e^{-\lambda}$.

# Valószínűségi változók függvényének az eloszlása

## Feladatok

1) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [-1,2] intervallumon. Adja meg $|\xi|$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

2) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az [a,b] intervallumon ($a,b$ egészek). Igazolja, hogy $[\xi]$ diszkrét egyenletes eloszlású valószínűségi változó!

3) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [-1,5] intervallumon, és legyen $A = \{\xi \geq 1\}$.

   a) Adja meg $\eta$ eloszlásfüggvényét, ha $\eta = \xi \cdot 1_A$!
   b) Adja meg a $P(\xi < x \mid A)$ (feltételes) eloszlásfüggvényt!

4) Legyen $\xi \sim N(0,1)$. Adja meg $|\xi|$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

5) Legyen $\xi \sim N(0,1)$. Adja meg $\xi^2$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

6) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [-1,3] intervallumon. Adja meg $\xi^2$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását!

7)

   a) Legyen $\xi \sim N(0,1)$. Adja meg $e^{\xi}$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!
   b) Legyen $\xi \sim N(m,\sigma)$. Adja meg $e^{\xi}$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!

8) Tegyük fel hogy egy telefonhívás hossza egységnyi várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó (percben mérjük az időt). A társaság percdíja 10 Ft.

   a) Mennyivel lesz több egy hívás díjának várható értéke, ha a telefontársaság perc alapon számláz, mint ha folytonosan mérné az időt és úgy számlázna?
   b) Mennyi a különbség a perc alapú illetve a másodperc alapú számlázás díjának várható értéke közt?

9) Tegyük fel hogy egy telefonhívás hossza egységnyi várható értékű egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A társaság percdíja 10 Ft.

   a) Mennyivel lesz több egy hívás díjának várható értéke, ha a telefontársaság perc alapon számláz, mint ha folytonosan mérné az időt és úgy számlázna?
   b) Mennyi a különbség a perc alapú illetve a másodperc alapú számlázás díjának várható értéke közt?

10) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a [0,10] intervallumon, és legyen $\eta = \frac{1}{\xi^2+1}$. Adja meg $\eta$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét és várható értékét!

11) Legyen $\xi$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda$ paraméterrel. Adja meg $e^{-\xi}$ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét!

12) Legyenek $\xi_1$, $\xi_2$ független valószínűségi változók. Számolja ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét, ha

a) $\xi_1$, $\xi_2$ egyenletes eloszlásúak [0,1]-en;
b) $\xi_1$, $\xi_2$ exponenciális eloszlásúak $\lambda$ >0 paraméterrel;
c) $\xi_1$, $\xi_2$ exponenciális eloszlásúak $\lambda_1$ és $\lambda_2$ paraméterrel $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
d) $\xi_1 \sim N(0,1)$, $\xi_2 \sim N(0,1)$.

13) Legyenek $\xi_1$, $\xi_2,...,\xi_n$ független $\lambda$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számolja ki $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ sűrűségfüggvényét! (gamma eloszlás)

14) Legyenek $\xi_1$, $\xi_2$ standard normális eloszlású független valószínűségi változók. Számolja ki $\xi_1^2+\xi_2^2$ sűrűségfüggvényét és várható értékét és szórását! (2 szabadsági fokú khi-négyzet eloszlás)

15) Egy hipermarket kedvezményes akciót szervez. Ha a fizetendő összeg eléri az 5000 Ft-ot, akkor 500 Ft kedvezményt ad. Mennyi a kedvezmény százalékos értékének várható értéke, ha az egy vásárlás során fizetett összeg olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye (ezer Ft-ban) $f(x)=x^2e^{-x}/2$, ha $x \geq 0$?

# Megoldások

1) $0 \leq |\xi|$. Legyen $0 < x$, ekkor $F_{|\xi|}(x) = P(|\xi| < x) = P(-x < \xi < x) = F_\xi(x) - F_\xi(-x)$.

Mivel $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3}, & ha \quad -1 < x \leq 2 \\ 1, & ha \quad 2 < x \end{cases}$, ezért

$$F_\xi(x) - F_\xi(-x) = \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{-x+1}{3} = \frac{2x}{3}, & ha \quad 0 < x \leq 1 \\ \frac{x+1}{3}, & ha \quad 1 < x \leq 2 \\ 1, & ha \quad 2 < x \end{cases}$$

Tehát

$$F_{|\xi|}(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ \dfrac{2x}{3}, & ha \quad 0<x\le 1\\ \dfrac{x+1}{3}, & ha \quad 1<x\le 2\\ 1, & ha \quad 2<x\end{cases} \quad \text{és} \quad f_{|\xi|}(x)=F'_{|\xi|}=\begin{cases}0, & ha \quad x<0\\ \dfrac{2}{3}, & ha \quad 0<x<1\\ \dfrac{1}{3}, & ha \quad 1<x<2\\ 0, & ha \quad 2<x\end{cases}.$$

$$M(|\xi|=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-x)\cdot\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{2}x\cdot\frac{1}{3}dx=\left[\frac{-x^2}{6}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{6}\right]_{0}^{2}=\frac{5}{6}=0.833.$$

$$M(|\xi|^2)=M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{2}x^{2\cdot}\cdot\frac{1}{3}dx=\left[\frac{x^3}{9}\right]_{-1}^{2}=1,$$

$$D(|\xi|)=\sqrt{M(|\xi|^2)-M^2(|\xi|)}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{0.306}=0.553.$$

2) Legyen $a\le k<b$ egész. $P([\xi]=k)=P(k\le\xi<k+1)=F(k+1)-F(k)=\dfrac{1}{b-a}$. $P(\xi=b)=0$.

3)

a) $\eta=\begin{cases}0, & ha \quad \xi<1\\ \xi, & ha \quad \xi\ge 1\end{cases}$. Ez azt jelenti, hogy $\eta\ge 0$.

$0<x\le 1$ esetén $P(\eta<x)=P(\eta=0)=P(\xi<1)=F_\xi(1)=\dfrac{1-(-1)}{5-(-1)}=\dfrac{2}{6}$.

Legyen $1<x$.

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\xi\cdot 1_{\xi\ge 1}<x)=P(\eta=0)+P(1\le\xi<x)=P(\xi<1)+P(1\le\xi<x)=$$

$$=F_\xi(1)+F_\xi(x)-F_\xi(1)=F_\xi(x)=\frac{x-(-1)}{5-(-1)}=\frac{x+1}{6}, \quad ha \quad x\le 5.$$

Tehát $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ \dfrac{2}{6}, & ha \quad 0<x\le 1\\ \dfrac{x+1}{6}, & ha \quad 1<x\le 5\\ 1, & ha \quad 5<x\end{cases}$.

b) Ha $A$ teljesül, akkor $\xi\ge 1$. Legyen $1<x$.

$$P(\xi<x\mid A)=\frac{P(1\le\xi<x)}{P(\xi\ge 1)}=\frac{F(x)-F(1)}{1-F(1)}=\frac{\frac{x+1}{6}-\frac{2}{6}}{\frac{4}{6}}=\frac{x-1}{4}, \quad ha \quad x\le 5$$

Tehát $P(\xi<x\mid A)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 1\\ \dfrac{x-1}{4}, & ha \quad 1\le x\le 5\\ 1, & ha \quad 5\le x\end{cases}$

([1,5] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.)

4) $|\xi|\geq 0$. Ha $0<x$, akkor $F_\eta(x)=P(|\xi|<x)=P(-x<\xi<x)=2\phi(x)-1$.

Tehát $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\leq 0\\ 2\phi(x)-1, & ha \quad 0<x\end{cases}$. $f_\eta(x)=F_\eta'(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x<0\\ 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & ha \quad 0<x\end{cases}$.

$$M(\eta)=M(|\xi|)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|f_\xi(x)dx=2\int_0^\infty x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$D(\eta)=\sqrt{M(|\xi|^2)-M^2(|\xi|)}=\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}=0.603.$$

5) $\xi^2\geq 0$. Legyen $0<x$. Ekkor $F_\eta(x)=P(\xi^2<x)=P(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x})=2\phi(\sqrt{x})-1$.

Tehát $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\leq 0\\ 2\phi(\sqrt{x})-1, & ha \quad 0<x\end{cases}$. $f_\eta(x)=F_\eta'(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x<0\\ 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}, & ha \quad 0<x\end{cases}$

$M(\eta)=M(\xi^2)=D^2(\xi)=1$. $M(\eta^2)=M(\xi^4)=\int_{-\infty}^{\infty}x^4 f_\xi(x)dx=3$, $D(\eta)=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$.

6) $0\leq\xi^2\leq 9$. Legyen $0<x<9$. Ekkor
$F_\eta(x)=P(\xi^2<x)=P(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x})=F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x})$.

Mivel $F_\xi(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\leq -1\\ \frac{x-(-1)}{3-(-1)}, & ha \quad -1<x\leq 3\\ 1, & ha \quad 3<x\end{cases}$, ezért $F_\xi(\sqrt{x})=\frac{\sqrt{x}-(-1)}{3-(-1)}$ $ha \quad 0<x\leq 9$, és

$F_\xi(-\sqrt{x})=\begin{cases}\frac{-\sqrt{x}-(-1)}{3-(-1)}, & ha \quad 0<x\leq 1\\ 0, & ha \quad 1<x\leq 9\end{cases}$.

Tehát

$$F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\leq 0\\ \frac{\sqrt{x}-(-1)}{3-(-1)}-\frac{-\sqrt{x}-(-1)}{3-(-1)}=\frac{\sqrt{x}}{2}, & ha \quad 0<x\leq 1\\ \frac{\sqrt{x}-(-1)}{3-(-1)}, & ha \quad 1<x\leq 9\\ 1, & ha \quad 9<x\end{cases},$$

$$f_\eta(x) = (F_\eta(x))' = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & ha \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & ha \quad 1<x<9 \\ 0, & ha \quad 9<x \end{cases}.$$

$$M(\eta) = M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{3} x^2 \frac{1}{4} dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{3} = 2.333.$$

$$M(\eta^2) = M(\xi^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_\xi(x)dx = \int_{-1}^{3} x^4 \frac{1}{4} dx = \left[\frac{x^5}{20}\right]_{-1}^{3} = 12.2,$$

$$D(\eta) = \sqrt{M(\eta^2) - (M(\eta))^2} = \sqrt{12.2 - 2.333^2} = 2.6.$$

7)

a) $\eta \ge 0$. Legyen $0 < x$, ekkor $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(e^\xi < x) = P(\xi < \ln x) = \phi(\ln x)$. ($e^x$ szigorúan monoton nő).

Tehát $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ \phi(\ln x), & ha \quad 0<x \end{cases}$. $f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x<0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}, & ha \quad 0<x \end{cases}$.

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{e}.$$

b) $F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(e^\xi < x) = P(\xi < \ln x) = \phi(\dfrac{\ln x - m}{\sigma})$ (mivel $e^x$ szigorúan monoton nő).

Tehát $F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x \le 0 \\ \phi(\dfrac{\ln x - m}{\sigma}), & ha \quad 0<x \end{cases}$.

$$f_\eta(x) = F'_\eta(x) = \begin{cases} 0, & ha \quad x<0 \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}, & ha \quad 0<x \end{cases}.$$

$$M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = e^{m+\frac{1}{2}}.$$

(Lognormális eloszlású valószínűségi változó.)

8)

a) Legyen $\xi$ a telefonhívás hossza, $\eta$ legyen a számlázott percek értéke. $\eta = [\xi] + 1$. $\eta$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1}$ paraméterrel. Ha $\Theta_p$ a fizetendő díj perc alapon számlázva, akkor $\Theta_p = 10 \cdot \eta$. $M(\Theta_p) = 10 \cdot M(\eta) = 10 \cdot \dfrac{1}{1 - e^{-1}} = 15.82$. Ha $\Theta_f$ a folytonosan mért idő arányában számlázatott díj, akkor $M(\Theta_f) = 10$, vagyis

5.82 Ft különbség van a perc alapú illetve a folytonos mérés esetén fizetendő díj várható éréke között.

b) Ha másodperc alapon számláznak, akkor $M(\Theta_{mp})=\left(\frac{10}{60}\right)\cdot M([60\xi]+1)$. Ha $\xi$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor $60\xi$ is exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda^*=\frac{1}{60}$ paraméterrel, mivel $P(60\xi<x)=P(\xi<\frac{x}{60})=F_\xi(\frac{x}{60})=1-e^{-\lambda\cdot\frac{x}{60}}=1-e^{-\frac{\lambda}{60}\cdot x}$ pozitív $x$ esetén, egyébként pedig 0. Tehát $[60\xi]+1$ is geometriai eloszlású valószínűségi változó $p=1-e^{-\frac{1}{60}}$ paraméterrel, azaz $M([60\xi]+1)=\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{60}}}=60.5$ várható értékkel. Így $M(\Theta_{mp})=\left(\frac{10}{60}\right)\cdot 60.5=10.08$, ami csak kb 1%-kal több, mint a folytonos alapon történő számlázási díj várható értéke.

9) Legyen $\xi$ a hívás hossza percben mérve. Ekkor a perc alapon számlázott díj esetén az elszámolt percek száma $\eta=[\xi]+1$. Ha $\xi$ egyenletes eloszlású [0,2]-n, akkor $\eta=[\xi]+1$ diszkrét egyenletes eloszlású valószínűségi változó, lehetséges értékei 1 és 2, $P(\eta=1)=P(\eta=2)=0.5$, $M(\eta)=1.5$, $M(\Theta_p)=10\cdot 1.5=15$. $M(\Theta_f)=10$.
Másodperc alapon számlázva a díjat a kiszámlázott másodpercek $\eta_{mp}=[60\xi]+1$, ami szintén diszkrét egyenletes eloszlású valószínűségi változó $P([60\xi]+1=i)=\frac{1}{120}$, $i$=1,2,…,120, $M([60\xi]+1)=\frac{121}{2}=60.5$. Tehát $M(\Theta_{mp})=\frac{10}{60}\cdot 60.5=10.08$.

10) $0\le\xi\le 10$, $1\le\xi^2+1\le 101$, $\frac{1}{101}\le\eta\le 1$. Legyen $\frac{1}{101}<x<1$. Ekkor

$$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(\frac{1}{\xi^2+1}<x)=P(\frac{1}{x}<\xi^2+1)=P(\frac{1}{x}-1<\xi^2)=P(\sqrt{\frac{1}{x}-1}<\xi)=$$

$$=1-F_\xi(\sqrt{\frac{1}{x}-1})=1-\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{10}.$$

Tehát $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha\quad x\le\frac{1}{101}\\ 1-\frac{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{10}, & ha\quad \frac{1}{101}<x\le 1\\ 1, & ha\quad 1<x\end{cases}$, és

$$f_\eta(x)=F_\eta^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}}\cdot\dfrac{1}{x^2}, & ha \quad \dfrac{1}{101}<x<1\\ 0, & különben\end{cases}.$$

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}f(x)dx=\int_0^{10}\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{10}dx=\frac{1}{10}\left[arctgx\right]_0^{10}=0.147\,.$$

11) $\eta=e^{-\xi}, 0<\eta\le 1$.

Legyen $0<x\le 1$.

$F_\eta(x)=P(\eta<x)=P(e^{-\xi}<x)=P(-\xi<\ln x)=P(-\ln x<\xi)=1-P(\xi<-\ln x)=$

$1-F_\xi(-\ln x)=1-(1-e^{-\lambda\cdot(-\ln x)})=x^\lambda$.

Tehát $F_\eta(x)=\begin{cases}0, & ha \quad x\le 0\\ x^\lambda, & ha \quad 0<x\le 1\\ 1, & ha \quad 1<x\end{cases}$, és $f_\eta(x)=F_\eta^{'}(x)=\begin{cases}\lambda\cdot x^{\lambda-1}, & ha \quad 0<x<1\\ 0, különben\end{cases}$.

$$M(\eta)=\int_0^\infty e^{-x}\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+1)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda+1}\,.$$

12)

a) $0\le\xi_1+\xi_2\le 2$, $f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy$.

$f_{\xi_1}(z-y)=\begin{cases}1, & ha \quad 0\le z-y\le 1\\ 0, & különben\end{cases}$, $f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}1, & ha \quad 0\le y\le 1\\ 0, & különben\end{cases}$.

$f_{\xi_1}(z-y)\cdot f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}1, & ha \quad 0\le z-y\le 1, \quad 0\le y\le 1\\ 0, & különben\end{cases}$.

Ha $0\le z\le 1$, akkor $f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy=\int\limits_0^z 1dy=z$.

Ha $1\le z\le 2$, akkor $f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy=\int\limits_{z-1}^1 1dy=\left[y\right]_{z-1}^1=2-z$.

Tehát $f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\begin{cases}z, & ha \quad 0\le z\le 1\\ 2-z, & ha \quad 1\le z\le 2\\ 0 & egyébként\end{cases}$.

b) $0\le\xi_1+\xi_2$. Legyen $0\le z$.

$f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy$.

$f_{\xi_1}(z-y)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda(z-y)}, & ha \quad 0<z-y\\ 0 & egyébként\end{cases}$.

$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\lambda\cdot e^{-\lambda y}, & ha \quad 0<y\\ 0 & egyébként\end{cases}$.

$$f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda z}, & ha \quad 0<y<z\\ 0 & egyébként\end{cases}.$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy=\int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z}dy=\lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z 1dy=\lambda^2 e^{-\lambda z}\cdot z \ \ ha\ 0<z,$$

egyébként pedig 0.

c) $0\le \xi_1+\xi_2$. Legyen $0<z$.

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy.\quad f_{\xi_1}(z-y)=\begin{cases}\lambda_1\cdot e^{-\lambda_1(z-y)}, & ha \quad 0<z-y\\ 0 & egyébként\end{cases}.$$

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\lambda_2\cdot e^{-\lambda_2 y}, & ha \quad 0<y\\ 0 & egyébként\end{cases}.$$

$$f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-\lambda_1 z}\cdot e^{-(\lambda_2-\lambda_1)y} & ha \quad 0<y<z\\ 0 & egyébként\end{cases}.$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(z-y)f_{\xi_2}(y)dy=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-\lambda_1 z}\cdot\int_0^z e^{-(\lambda_2-\lambda_1)y}dy=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-\lambda_1 z}\left[\frac{e^{-(\lambda_2-\lambda_1)y}}{-(\lambda_2-\lambda_1)}\right]_0^z=$$

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot e^{-\lambda_1 z}\left[\frac{1-e^{-(\lambda_2-\lambda_1)z}}{(\lambda_2-\lambda_1)}\right]=\frac{\lambda_1\cdot\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}),\quad ha \quad 0<z,$$ egyébként pedig 0.

d) $$f_{\xi_1+\xi_2}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(z-x)^2/2}dx=.....=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2}}e^{-z^2/4}$$

13) $f_n(x)=\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. ($n$=2-re beláttuk az előző feladatban, $2<n$ esetén teljes indukcióval bizonyítható.)

14) $$f_{\xi_1^2}(x)=f_{\xi_2^2}(x)=\begin{cases}0 & ha \quad x<0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} & ha \quad 0<x\end{cases}$$ (lsd ezen fejezet 5) feladata).

Ha $0<z$, akkor

$$f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(z)=\int_0^z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(z-x)}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z-x}}dx=e^{-\frac{z}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z-x}}dx=$$

$$e^{-\frac{z}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z-x}}dx=e^{-\frac{z}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^z\frac{1}{\sqrt{\frac{z^2}{4}-(\frac{z}{2}-x)^2}}dx=e^{-\frac{z}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv=e^{-\frac{z}{2}}\cdot\frac{1}{2\pi}[\arcsin v]_{-1}^1=$$

$$=e^{-\frac{z}{2}}\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{2})=0.5\cdot e^{-\frac{z}{2}}.$$

Ha $z\le 0$, akkor $f_{\xi_1^2+\xi_2^2}(z)$=0.

$M(\xi_1^2+\xi_1^2)=M(\xi_1^2)+M(\xi_2^2)=1+1=2$ (lsd. ezen fejezet 5) feladata)

$D^2(\xi_1^2+\xi_1^2)=D^2(\xi_1^2)+D^2(\xi_2^2)=2+2=4$, (lsd. ezen fejezet 5) feladata)

$D(\xi_1^2+\xi_1^2)=\sqrt{4}=2$.

Másik lehetőség: vegyük észre, hogy a $\xi_1^2+\xi_2^2$ 0.5 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, ezért várható értéke és szórása egyaránt a paraméterének reciproka, azaz éppen 2.

15) $\eta$ legyen a kedvezmény százalékos értéke.

$$\eta=\begin{cases}0, & ha \quad \xi<5\\ \dfrac{0.5}{\xi}\cdot 100, & ha \quad 5\le\xi\end{cases}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\eta=\dfrac{0.5}{\xi}\cdot 100\cdot 1_{\xi\ge 5}$ .

$$M(\eta)=\int_5^\infty \frac{0.5}{x}\cdot 100 f_\xi(x)dx=100\int_5^\infty \frac{0.5}{x}\frac{x^2e^{-x}}{2}dx=25\int_5^\infty x\cdot e^{-x}dx=25\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_5^\infty=1.01\% .$$

# Csebisev egyenlőtlenség, szimulációk

## Feladatok

1) Legyen $\xi$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke a várható értékének

   a) szórás,
   b) két szórás,
   c) három szórás sugarú környezetébe esik?
   d) Milyen becslést ad a fenti valószínűségekre a Csebisev egyenlőtlenség?

2) Legyen $\xi$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A várható érték hány szórás sugarú környezetébe esik $\xi$ értéke 0.9 valószínűséggel?

3) Legyen $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az [a,b] intervallumon. Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke a várható értékének

   a) szórás,
   b) két szórás,
   c) három szórás sugarú környezetén kívül esik?
   d) Milyen becslést ad a fenti valószínűségekre a Csebisev egyenlőtlenség?

4) Legyen $\xi$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p = 0.8$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke a várható értékének

   a) szórás,
   b) két szórás,
   c) három szórás sugarú környezetébe esik?

5) Legyen $\xi$ geometriai eloszlású valószínűségi változó $p = 0.8$ paraméterrel. A várható értékének hány szórás sugarú környezetén belül veszi fel $\xi$ értékeit 0.99 valószínűséggel?

6) Legyen $\xi$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 5$ paraméterrel. Mennyi a valószínűsége, hogy $\xi$ értéke a várható értékének

   a) szórás,
   b) két szórás,
   c) három szórás sugarú környezetén kívül esik?

7) Egy $\xi$ valószínűségi változó várható értéke 10, szórása 1.2. A Csebisev egyenlőtlenség segítségével adjon olyan intervallumot, amibe $\xi$ értéke legalább 0.95 valószínűséggel beleesik!

8) Generáljon egyenletes eloszlású valószínűségi változót a [0,10] intervallumon, és képezze a $\eta_i = \frac{1}{\xi_i^2 + 1}$ számok átlagát. Mennyivel tér el a kapott átlag a kiszámolt várható értéktől 100, 10000, 1000000 véletlen szám generálása esetén? A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazva mit tud mondani a maximális hibáról 0.95 valószínűséggel?

9) A Folytonos eloszlású valószínűségi változók 13) feladatát felhasználva generáljon exponenciális eloszlású valószínűségi változót $\lambda=2$ paraméterrel és képezze az $\eta_i = \dfrac{1}{\xi_i^2+1}$ számokat.

a) Számolja meg, hány lesz közülük kisebb 0.5-nél, vegye a relatív gyakoriságot és a kapott relatív gyakoriságot hasonlítsa össze $\dfrac{1}{\xi^2+1}$ eloszlásfüggvényének értékével a 0.5 helyen. Mekkora eltérést tapasztal 100, $10^4$, $10^6$ és $10^8$ véletlen szám generálása esetén? A Csebisev egyenlőtlenséget alkalmazva mit tud mondani a maximális eltérésről 0.95 valószínűséggel?

b) Számolja ki a kapott számok átlagát! Mekkora hibával közelíti ez az érték a valószínűségi változó várható értékét 100, $10^4$, $10^6$ és $10^8$ véletlen szám generálása esetén 0.95 valószínűséggel?

10) 10-szer elgurítunk egy szabályos kockát. Legyen $\xi$ az a szám, ahányféle számot gurítunk. Adja meg ezredpontossággal $\xi$ eloszlását, századpontossággal várható értékét. Hányféle számot gurítunk a legnagyobb eséllyel?

11) Választunk egy pontot a $[0,1]x[0,1]$ négyzetről a geometriai valószínűség szerint. Legyen $\xi$ a választott pont origótól való távolsága. Rajzolja fel az $\xi$ eloszlásfüggvényét és „közelítse” az értékeit a $\{\xi < x\}$ esemény relatív gyakoriságával! Mekkora eltérést tapasztal 100, $10^4$, $10^6$ és $10^8$ szimuláció esetén? Mekkora a közelítések maximális hibája 0.95 valószínűséggel?

12) Számolja ki $\dfrac{1}{1000}$ pontossággal az $\int_1^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ integrál értékét!

13) Számolja ki az $\int_1^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx$ integrál értékét közelítőleg oly módon, hogy a fenti integrál értékét várható értéknek fogja fel!

14) Számolja ki szimulációs módszerrel $\dfrac{1}{1000}$ pontossággal a $\pi$ értékét 0.95 valószínűséggel (megbízhatósággal) !

15) Számolja ki $\phi(2)$ értékét 0.01 pontossággal 0.95 megbízhatóság mellett! Adja meg $\phi(1)$ és $\phi(3)$ értékét is, és hasonlítsa össze a normális eloszlás táblázatából kapott értékekkel!

# Megoldások

1) $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}=D(\xi)$, $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda\cdot x}, & ha \quad 0\le x\\ 0 & különben\end{cases}$

a) $P(0<\xi<\frac{2}{\lambda})=F(\frac{2}{\lambda})-F(0)=1-e^{-2}-0=0.865$.

b) $P(-\frac{1}{\lambda}<\xi<\frac{3}{\lambda})=F(\frac{3}{\lambda})-F(-\frac{1}{\lambda})=1-e^{-3}-0=0.950$.

c) $P(-\frac{2}{\lambda}<\xi<\frac{4}{\lambda})=F(\frac{4}{\lambda})-F(-\frac{2}{\lambda})=1-e^{-4}-0=0.982$.

d) $P(|\xi-M(\xi)|<kD(\xi)|\geq 1-\frac{1}{k^2}$ alapján $k$=1 esetén az alsó becslés 0, $k$=2 esetén 0.75, $k$=3 esetén 0.889. Láthatjuk, hogy a pontos értékek jóval meghaladják az alsó becslést.

2) $P(\frac{1-k}{\lambda}<\xi<\frac{1+k}{\lambda})=F(\frac{1+k}{\lambda})-F(\frac{1-k}{\lambda})=0.9$. Mivel egy szórás sugarú környezetén belül a valószínűségi változó értéke csak 0.865 valószínűséggel van, ezért $k>1$, így $\frac{1-k}{\lambda}<0$, tehát $F(\frac{1-k}{\lambda})=0$. $F(\frac{k+1}{\lambda})=0.9\Rightarrow k=-\ln 0.1-1=1.302$

3) $M(\xi)=\frac{a+b}{2}$, $D(\xi)=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

a) $P(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{\sqrt{12}}<\xi<\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\sqrt{12}})=F(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\sqrt{12}})-F(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{\sqrt{12}})=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$P(\xi\notin(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{\sqrt{12}},\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{\sqrt{12}})=1-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.423$

b) $P(\frac{a+b}{2}-2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}<\xi<\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}})=F(\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}})$

$-F(\frac{a+b}{2}-2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}})=1-0$, ugyanis $\frac{a+b}{2}-2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}<a$ és $b<\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

Így $P(\xi\notin(\frac{a+b}{2}-2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}},\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}})=0$.

c) $P(\xi\notin(\frac{a+b}{2}-3\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}},\frac{a+b}{2}+3\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}))\leq P(\xi\notin(\frac{a+b}{2}-2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}},\frac{a+b}{2}+2\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}}))=0$

d) $P(|\xi-M(\xi)|\geq kD(\xi))\leq\frac{1}{k^2}$ alakból $k$=1 esetén a felső becslés 1, $k$=2 esetén 0.25, $k$=3 esetén 0.111.

4) $\xi=1,2,3,...$ és $P(\xi=k)=0.8\cdot 0.2^{k-1}$ $M(\xi)=\frac{1}{p}=1.25$, $D(\xi)=\frac{\sqrt{1-p}}{p}=0.559$.

a) $P(1.25-0.559<\xi<1.25+0.559)=P(\xi=1)=0.8$.

b) $P(1.25-2\cdot 0.559<\xi<1.25+2\cdot 0.559)=P(0.132<\xi<2.368)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.96$

c) $P(1.25-3\cdot 0.559<\xi<1.25+3\cdot 0.559)=P(-0.427<\xi<2.927)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=0.96$

5) $P(1.25-k\cdot 0.559<\xi<1.25+k\cdot 0.559)=0.99$. $k=?$ Mivel $k$=2 esetén a valószínűség csak 0.96, ezért $2<k$, vagyis az intervallum alsó határa 1-nél kisebb.

$P(\xi < 1.25 + k \cdot 0.559) = 0.99$, $\sum_{i=1}^{j} 0.8 \cdot 0.2^{i-1} = 1 - 0.2^{j} = 0.99$, $1 - 0.2^{x} = 0.99$,

$x = \frac{\ln 0.01}{\ln 0.2} = 2.86$, $j = 3$, $3 = 1.25 + k \cdot 0.559$, $k = 3.13 \Rightarrow k = 4$.

6) $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,2,\ldots$ $M(\xi) = 5$, $D(\xi) = \sqrt{5} = 2.236$.

a) $P(5 - \sqrt{5} < \xi < 5 + \sqrt{5}) = P(2.764 < \xi < 7.236) =$
$P(\xi = 3) + P(\xi = 4) + P(\xi = 5) + P(\xi = 6) + P(\xi = 7) = 0.742$,
$P(\xi \notin (5 - \sqrt{5}, 5 + \sqrt{5}) = 0.258$.

b) $P(5 - 2 \cdot \sqrt{5} < \xi < 5 + 2\sqrt{5}) = P(0.528 < \xi < 9.472) = \sum_{i=1}^{9} P(\xi = i) = 0.961$,
$P(\xi \notin (5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5}) = 0.039$.

c) $P(5 - 3 \cdot \sqrt{5} < \xi < 5 + 3 \cdot \sqrt{5}) = P(0 \le \xi < 11.7) = \sum_{i=0}^{11} P(\xi = i) = 0.995$,
$P(\xi \notin (5 - 3\sqrt{5}, 5 + 3\sqrt{5}) = 0.005$.

7) $P(\left(\left|\xi - M(\xi)\right|\right) < kD(\xi)) \ge 1 - \frac{1}{k^2} = 0.95 \Rightarrow k = 4.472$,
a keresett intervallum: $(10 - 1.2 \cdot 4.472, 10 + 1.2 \cdot 4.472) = (4.634, 15.366)$

8)
```
function atlag2(szimszam)
format long
osszeg=0;
szamolt=atan(10)/10
for i=1:1:szimszam
    vel=10*rand(1);
    y=1/(vel^2+1);
     osszeg=osszeg+y;
    end
atlag=osszeg/szimszam
elteres=abs(szamolt-atlag)
```

| *N* | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| Átlag | 0.1797 | 0.14754 | 0.147317 | 0.1471362 |
| Eltérés | 0.03261 | $4.3124 \cdot 10^{-4}$ | $2.04735 \cdot 10^{-4}$ | $2.346499 \cdot 10^{-5}$ |
| Elméleti hiba | 0.474 | 0.0474 | 0.00474 | 0.000474 |

Az elméleti hiba számolása 0.95 megbízhatóság esetén:

$0 \le \frac{1}{\xi^2 + 1} \le 1$ miatt $D^2(\frac{1}{\xi^2 + 1}) \le 1$, $P(|\overline{\eta} - M(\eta)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{N\varepsilon^2} = 0.95 \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{\frac{1}{0.05N}}$.

(Megjegyezzük, hogy a Diszkrét eloszlású valószínűségi változók 15) feladata alapján $D^2(\frac{1}{\xi^2 + 1}) \le \frac{1}{4}$ is teljesül, tehát az elméleti hibát a felírtakhoz képest megfelezhetjük.)

9)

a)
```
function elofv1(szimszam,la)
format long
jo=0;
f=exp(-la*(sqrt(1/0.5-1)))
for i=1:1:szimszam
    vel=rand(1);
    velexp=log(1-vel)/(-la);
    y=1/(velexp^2+1);
    if y<0.5
        jo=jo+1;
    end
end
relgyak=jo/szimszam
kul=abs(relgyak-f)
```

A pontos valószínűség:0.13533528-
A szimulációval kapott eredmények:

| $N$ | 100 | 10000 | 1000000 | 10000000 |
|---|---|---|---|---|
| Rel.gyak. | 0.1300 | 0.13500 | 0.1352204 | 0.13531015 |
| Eltérés | 0.0053 | 0.0003352832 | 0.000114883 | 0.00002513 |
| Elméleti hiba | 0.223 | 0.0223 | 0.00223 | 0.000223 |

$P\left(\left|\frac{k_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}=\alpha$, ezért $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{4n\alpha}}=\frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}$.

b)
```
function atlag1(szimszam,la)
format long
osszeg=0;
for i=1:1:szimszam
    vel=rand(1);
    velexp=log(1-vel)/(-la);
    y=1/(velexp^2+1);
    osszeg=osszeg+y;
    end
atlag=osszeg/szimszam
```

Mivel $|\eta|\leq 1$, ezért $D^2(\eta)\leq 1$, tehát $P(|\overline{\eta}-m|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{1}{n\varepsilon^2}=1-\alpha$ teljesül. Így $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{n\alpha}}$.

| $N$ | 100 | 10000 | 1000000 | 100000000 |
|---|---|---|---|---|
| Átlag | 0.8113 | 0.79404 | 0.79827 | 0.79806096 |
| Elméleti hiba | 0.447 | 0.0447 | 0.00447 | 0.000447 |

10) $\xi$ lehetséges értékei 1,2,3,4,5,6. $P(\xi=1)=\frac{6}{6^{10}}=10^{-9}$, de a többi értékhez tartozó valószínűség számolása nem ilyen egyszerű. Mivel $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\frac{1}{1000}\right)\leq\frac{p(1-p)}{n\cdot(\frac{1}{1000})^2}\leq\frac{10^6}{4n}$,

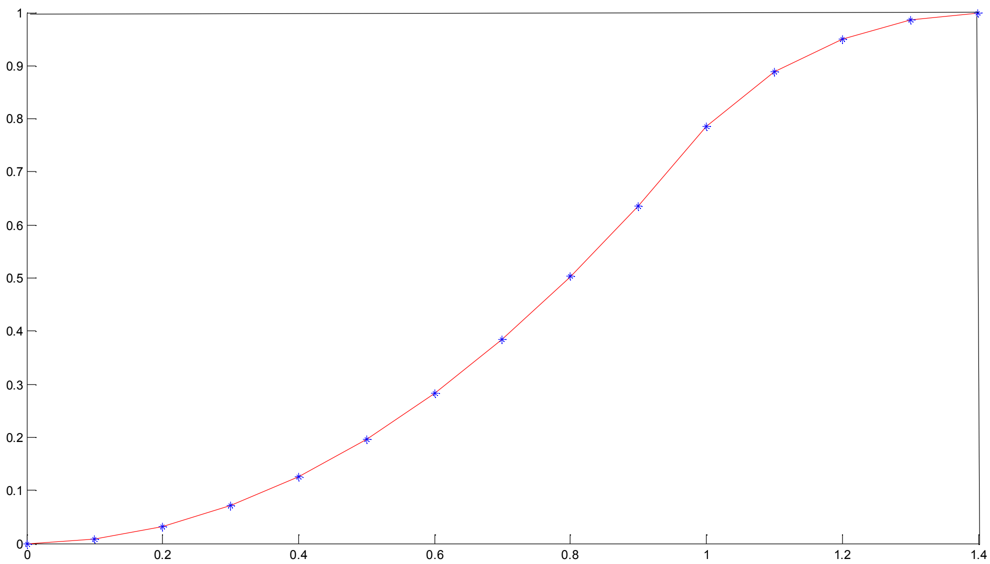
ezért $n = 5 \cdot 10^6$ szimulációval a $P(\xi = i)$ valószínűségek 0.001-nél kisebb hibával meghatározhatók. Elvégezve a szimulációkat az alábbi értékeket kaptuk:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\xi = i)$ | 0.0000004 | 0.0002644 | 0.018476 | 0.2031872 | 0.5063696 | 0.2717024 |

Így ezred pontossággal a valószínűségek rendre 0, 0, 0.018, 0.203, 0.506, 0.272.
A várható értéket az átlaggal becsülve azt kapjuk, hogy 5.0307684. Mivel $1 \le \xi \le 6$, így $D^2(\xi) \le \frac{25}{4}$, $P(|\xi - m| \ge \varepsilon) \le \frac{D^2(\xi)}{n\varepsilon^2}$ miatt $\varepsilon \le 5 \cdot 10^{-3}$. Így század pontossággal a várható érték 5.03. Leggyakrabban 5 féle számot gurítunk.

11)

```
function eloszfv(szimszam)
format long
z=0:0.1:1
v=z.*z*pi/4;
x=1.1:0.1:1.4;
y=sqrt(x.*x-1)+(pi/4-atan(sqrt(x.*x-1))).*(x.*x);
x=[z,x];
y=[v,y]
figure(1)
hold on
plot(x,y,'r')
jo=zeros(1,15);
for j=1:1:15
   for i=1:1:szimszam
    v1=rand(1);
    v2=rand(1);
    if v1*v1+v2*v2<x(j)*x(j)
        jo(1,j)=jo(1,j)+1;
    end
   end
end
relgyak=jo/szimszam
figure(1)
hold on
plot(x,relgyak,'*')
kul=abs(relgyak-y)
m=max(kul)
```




*Az eloszlásfüggvény és közelítése relatív gyakoriságokkal 100000 szimuláció esetén (maximális eltérés:* $6.8\cdot 10^{-4}$ *).*

| | *N*=100 | *N*=10000 | *N*=1000000 | *N*=100000000 |
|---|---|---|---|---|
| Max eltérés | 0.07515 | 0.006245 | 9.7e-004 | 6.6e-005 |
| Elméleti hiba | 0.223 | 0.0223 | 0.00223 | 0.000223 |

12)
```
function integralszim(szimszam)
format long
jo=0;
for i=1:1:szimszam
    vel1=rand(1)+1;
    vel2=rand(1);
    if vel2<exp(-1/vel1^2)
        jo=jo+1;
    end
end
    int=jo/szimszam
```

50000 szimuláció mellett legfeljebb 0.01 hibát, 5000000 szimuláció mellett 0.001 hibát, 500000000 szimuláció mellett 0.0001 hibát kapunk legfeljebb 0.95 valószínűséggel.

| *N* | 50000 | 5000000 | 500000000 |
|---|---|---|---|
| Rel. gyak | 0.6187 | 0.6187366 | 0.618635684 |

Így ezred pontossággal az integrál értéke 0.619.

13) Ha $\xi$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó [1,2], akkor $M(e^{-\frac{1}{\xi^2}})=\int_1^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot 1dx$.

A nagy számok törvénye szerint, ha veszünk $N$ független egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvénybe behelyettesítve, akkor a kapott értékek átlaga $M(e^{-\frac{1}{\xi^2}}) = \int_1^2 e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot 1dx$ körül ingadozik. $e^{-1} \le e^{-\frac{1}{\xi^2}} \le e^{-0.25}$, így $D^2(e^{-\frac{1}{\xi^2}}) \le 0.042$, így $P(|\bar{\eta} - M(\bar{\eta})| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D^2(\eta)}{n\varepsilon^2}$ miatt $0.001$ -nél kisebb hiba érhető el $N = 840000$ szimulációval.

```
function intszim(szimszam)
format long
osszeg=0;
for i=1:1:szimszam
    vel=rand(1)+1;
    y=exp(-1/vel^2);
    osszeg=osszeg+y;
end
    int=osszeg/szimszam
```

840000 szimulációt futtatva az eredmény 0.618703528320126, ezredpontossággal 0.619. Megszázszorozva a szimulációk számát a hiba nagyságrendje eggyel javul. Ekkor a kapott eredmény: 0.618627847683454, 4 tizedes jeggyel 0.6186.

14) $\pi$ értéke az egység sugarú kör területe. Generáljunk [-1,1]-en két véletlen számot és nézzük meg, hogy a nekik megfeleltetett pont a körön belül vagy kívül helyezkedik el.

```
function kor(szimszam)
format long
jo=0;
for i=1:1:szimszam
    vel1=2*rand(1)-1;
    vel2=2*rand(1)-1;
    if vel1^2+vel2^2<1
        jo=jo+1;
    end
end
    relgyak=jo/szimszam
    pi=4*relgyak
```

$N = 10^8$ szimuláció mellett a kapott eredmény 3.1417688 (ezred pontosság biztosított).

15) $\phi(2) = \int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.5 + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.5 + 2\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} dx$. Ez utóbbi integrált egy [0,2] intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó transzformáltja várható értékének felfogva $D^2 \le 4 \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{\left(1 - e^{-1/4}\right)^2}{4} \le 0.008$, így a Csebisev egyenlőtlenség szerint $N = 160000$ szimulációval 1/1000 pontosság biztosítható.

```
function fi(szimszam,x)
format long
osszeg=0;
for i=1:1:szimszam
    vel=x*rand(1);
    y=x*sqrt(1/(2*pi))*exp(-vel*vel/2);
    osszeg=osszeg+y;
end
atlag=osszeg/szimszam;
fi=0.5+atlag
```

A kapott értékek:

| | $x$=1 | $x$=2 | $X$=3 |
|---|---|---|---|
| Szimulációs értékek $N$=160000 esetén | 0.841295451718926 | 0.976724523097888 | 0.998818154378280 |
| Szimulációs értékek $N$=16000000 esetén | 0.841334113630384 | 0.977391390506006 | 0.998593869942944 |
| Táblázatbeli értékek | 0.8413 | 0.9772 | 0.9987 |

# Centrális határeloszlás tétel

## Feladatok

1) Legyenek $\xi_1,\ldots,\xi_n$ független [0,1] egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és képezzük az $\eta_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\cdot 0.5}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{12}}}$ valószínűségi változókat. Szimulációval határozza meg $\eta_n$ eloszlásfüggvényének értékét a -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 pontokban $n$=2, 3, 4, 10, 20, 30 esetén. Hasonlítsa össze a kapott értékeket a $\phi(-3),\ldots.,\phi(3)$ értékekkel $N=10000$ szimuláció esetén!

2) Legyenek $\xi_1,\ldots,\xi_n$ független $\lambda=1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, és képezzük az $\eta_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - n\cdot 1}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változókat. Szimulációval határozza meg $\eta_n$ eloszlásfüggvényének értékét a -3,-2,-1,0,1,2,3 pontokban $n$=2,3,4,10,20,30 esetén. Hasonlítsa össze a kapott értékeket a $\phi(-3),\ldots.,\phi(3)$ értékekkel $N=10000$ szimuláció esetén!

3) 100-szor elgurítunk egy szabályos kockát.

   a) Adja meg közelítőleg annak az esélyét, hogy a gurítások összege legalább 330, de kevesebb, mint 365!
   b) Legalább mennyi a dobások összege 0.99 valószínűséggel?
   c) Mekkora értéket kap, ha az a) pontbeli valószínűséget szimulációval számolja ki?

4) A számlák végösszegét fizetéskor 0-ra vagy 5-re kerekítik. Egy fizetésnél a kerekítés hibájaként a pénztárban kialakuló többlet olyan valószínűségi változó, amelynek értékei -2,-1,0,1,2, és minden érték egyforma valószínűséggel fordul elő. Egy napon 500 fizetés történt egy kasszában. Az egyes számlák végződései egymástól független valószínűségi változók.

   a) Adjunk olyan intervallumot, amibe a felhalmozódott többlet 0.99 valószínűséggel beleesik!
   b) Mennyi az esélye, hogy a kialakuló hiány nagysága több 100 Ft-nál?

5) 1000-szer feldobunk egy szabályos érmét.

   a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott fejek száma 450 és 550 közé esik?
   b) Adjunk olyan 500-ra szimmetrikus intervallumot, amibe a dobott fejek száma 0.9 valószínűséggel beleesik!
   c) Határozza meg közelítőleg a $P(\xi=500)$ valószínűséget!

6) Egy rendelőben időpontot adnak a vizsgálatra. Egy napon 120 ember kap időpontot. Minden időponttal rendelkező ember 0.8 valószínűséggel jelenik meg a rendelésen, és 0.2 valószínűséggel marad távol a többi embertől függetlenül.

   a) Legfeljebb hány ember jelenik meg a rendelésen 0.95 valószínűséggel?
   b) Hány embernek adhatnak időpontot, ha azt szeretnék, hogy a megjelenők száma 0.95 valószínűséggel legfeljebb 120 legyen?

7) Egy üzletben a zsemlékhez zacskókat raknak ki. Egy zacskóba 1,2,3,4,5 zsemle kerülhet, annak a valószínűsége, hogy egy darab kerül 0.25, hogy 2 darab kerül 0.2, hogy 3 darab kerül 0.2, hogy 4 darab kerül 0.1 és hogy 5 darab kerül 0.25.

a) Mennyi az esélye, hogy a 400 zacskóba összesen 1100-nál kevesebb zsemle kerül?
b) Hány zacskót helyezzenek ki, ha azt szeretnék, hogy 1200 zsemle számára 0.99 valószínűséggel elegendő legyen?

8) Egy színházban két oldalon van ruhatár. Mindegyiket a vendégek 0.5 valószínűséggel választják a többi vendégtől függetlenül. A színház 500 férőhelyes.

a) Hány fogas legyen mindkét oldalon, hogy 0.99 valószínűséggel elég legyen, vagyis el tudják helyezni a vendégek a kabátjukat azon az oldalon, amelyiket választották?
b) Hány fogas legyen mindkét oldalon, ha a ruhatárba kettesével viszik a kabátokat a vendégek?

9) Egy időszakban a műszaki okok miatti leállások száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 500$ paraméterrel. Legfeljebb hány leállás lesz az időszakban 0.98 valószínűséggel?

10) Egy izzó élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 1000 óra várható értékkel.

a) Adjunk olyan, a várható értékre szimmetrikus intervallumot, amibe egy izzó élettartama 0.75 valószínűséggel beleesik!
b) Adjunk olyan, 1000 órára szimmetrikus intervallumot, amibe 100 izzó élettartamának átlaga 0.75 valószínűséggel beleesik!

11) 1000-szer elgurítunk egy szabályos kockát.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a hatos gurítások relatív gyakorisága a hatos valószínűségét 0.02-nél kisebb hibával közelíti?
b) Legfeljebb mekkora hibával közelíti a hatos gurítások relatív gyakorisága a hatos gurítás valószínűségét 0.95 valószínűséggel?
c) Hányszor gurítsuk el a szabályos kockát, hogy a hatos gurítások relatív gyakorisága a hatos gurítás valószínűségét 0.01-nél kisebb hibával közelítse 0.99 valószínűséggel?

12) A játékelméletben gyakran felmerülő feladat a következő. Csoportjátékot játszanak, mindenki dönthet, hogy 1 vagy 10 Ft-ra pályázik-e. Amennyiben a 10 Ft-ra pályázók aránya eléri vagy meghaladja a csoportlétszám 20%-át, akkor senki nem kap semmit, amennyiben 20% alatt marad, akkor mindenki megkapja az általa megpályázott összeget. A csoport tagjai egymástól függetlenül döntenek, méghozzá oly módon, hogy véletlenre bízzák magukat. Egymástól függetlenül $p$ valószínűséggel pályázik mindenki 10 Ft-ra és $1-p$ valószínűséggel 1 Ft-ra. Mekkora legyen $p$ értéke, ha azt szeretnék, hogy 0.99 valószínűséggel mindenki megkapja az általa pályázott összeget és a csoport létszáma 10000 fő? ( Minden egyes ember érdeke az, hogy ő 10 Ft-ra pályázzon, de közös érdek az, hogy ne legyen túl sok 10 Ft-ra pályázó egyén, mert akkor senki nem kap semmit.)

13) Egy $A$ esemény ismeretlen valószínűségét szeretnénk közelíteni a relatív gyakorisággal. Legalább hányszor végezzük el a kísérletet, hogy a relatív gyakoriság 0.01-nél kisebb hibával közelítse az ismeretlen valószínűséget 0.95 valószínűséggel?

14) Számolja újra a valószínűségekre vonatkozó hibabecsléseket az előző fejezet feladatainál a centrális határeloszlás tétel segítségével!

15) Számolja újra a várható értékekre vonatkozó hibabecsléseket az előző fejezet feladatainál a centrális határeloszlás tétel segítségével!

# Megoldások

1)

```
function cht(n,szimszam)
format long
gyakorisag=zeros(1,7)
for k=1:1:7
for i=1:1:szimszam
    osszeg=0;
    for j=1:1:n
    veletlenszam=rand(1);
    osszeg=osszeg+veletlenszam;
    end
    centralt=(osszeg-n*0.5)/sqrt(n/12);
    if centralt<k-4
        gyakorisag(1,k)=gyakorisag(1,k)+1;
    end
end
end
relgyak=gyakorisag/szimszam
```

A kapott relatív gyakoriságok:

| | $x=-3$ | $x=-2$ | $x=-1$ | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$=2 | 0 | 0.0163 | 0.1694 | 0.5024 | 0.8238 | 0.9818 | 1 |
| $n$=3 | 0 | 0.0202 | 0.1684 | 0.5025 | 0.8373 | 0.9800 | 1 |
| $n$=4 | 0.0002 | 0.0209 | 0.1685 | 0.4978 | 0.8349 | 0.9759 | 0.9998 |
| $n$=10 | 0.0009 | 0.0203 | 0.1598 | 0.5044 | 0.8421 | 0.9793 | 0.9991 |
| $n$=20 | 0.0016 | 0.0254 | 0.1639 | 0.5039 | 0.8416 | 0.9763 | 0.9991 |
| $n$=30 | 0.0010 | 0.0212 | 0.1599 | 0.5060 | 0.8344 | 0.9767 | 0.9990 |
| $\phi(x)$ | 0.0013 | 0.0228 | 0.1577 | 0.5 | 0.8413 | 0.9772 | 0.9987 |

2)

```
function chtexp(n,szimszam)
format long
gyakorisag=zeros(1,7)
for k=1:1:7
for i=1:1:szimszam
    osszeg=0;
    for j=1:1:n
    veletlenszam=-log(1-rand(1));
        osszeg=osszeg+veletlenszam;
    end
    centralt=(osszeg-n)/sqrt(n);
    if centralt<k-4
        gyakorisag(1,k)=gyakorisag(1,k)+1;
    end
end
end
relgyak=gyakorisag/szimszam
```

A kapott relatív gyakoriságok:

| | $x=-3$ | $x=-2$ | $x=-1$ | $x=0$ | $x=1$ | $x=2$ | $x=3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$=2 | 0 | 0 | 0.1160 | 0.5935 | 0.8591 | 0.9551 | 0.9879 |
| $n$=3 | 0 | 0 | 0.1367 | 0.5797 | 0.8536 | 0.9546 | 0.9886 |
| $n$=4 | 0 | 0.0202 | 0.1684 | 0.5025 | 0.8373 | 0.9800 | 1 |
| $n$=10 | 0 | 0.0051 | 0.1502 | 0.5442 | 0.8452 | 0.9630 | 0.9939 |
| $n$=20 | 0 | 0.0110 | 0.1544 | 0.5240 | 0.8435 | 0.9675 | 0.9958 |
| $n$=30 | 0.0004 | 0.0116 | 0.1537 | 0.5237 | 0.8440 | 0.9703 | 0.9968 |
| $\phi(x)$ | 0.0013 | 0.0228 | 0.1577 | 0.5 | 0.8413 | 0.9772 | 0.9987 |

3)

a) Jelölje $\xi_i$ az $i$-edik dobást ($i$=1,2,3,…,100). $\xi_i$ minden $i$ esetén ugyanolyan (diszkrét egyenletes) eloszlású valószínűségi változó $M(\xi_i)=3.5=m$ várható értékkel és $D(\xi_i)=1.708=\sigma$ szórással.

A száz dobás összege $\eta=\sum_{i=1}^{100}\xi_i$. $P(330\le\sum_{i=1}^{100}\xi_i<365)=F_{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}(365)-F_{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}(330)$.

Mivel $P(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i-nm}{\sigma\sqrt{n}}<x)\to\phi(x)$, ezért $F_{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}(x)\approx\phi(\frac{x-100\cdot3.5}{\sqrt{100}\cdot1.708})$, vagyis az összeg eloszlásfüggvényét normális eloszlásfüggvénnyel közelítjük és a normális eloszlás várható értéke pont az összeg várható értéke, azaz 350, szórása pedig az összeg szórása, azaz $\sqrt{100}\cdot1.708=17.08$. Tehát

$$P(330\le\sum_{i=1}^{100}\xi_i<365)=F_{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}(365)-F_{\sum_{i=1}^{100}\xi_i}(330)\approx\phi(\frac{365-350}{17.08})-\phi(\frac{330-350}{17.08})=$$

$\phi(0.88)-\phi(-1.17)=0.8106-1+0.8790=0.6896\approx0.69$.

b) $x=?$, $P(\sum_{i=1}^{100}\xi_i\ge x)=0.95$, $1-F_{\sum\xi_i}(x)=0.95$, $1-\phi(\frac{x-350}{17.08})=0.95$, $\phi(\frac{x-350}{17.08})=0.05$

$\frac{x-350}{17.08}=-1.645$, $x$=321.9, mivel egész számot keresünk, ezért $x=322$.

c)

```
function osszeg(szimszam)
jo=0;
for i=1:1:szimszam
    osszeg=0;
    for j=1:1:100
    vel=rand(1);
    dobas=floor(6*vel+1);
    osszeg=osszeg+dobas;
    end
        if osszeg<365&osszeg>=330
        jo=jo+1;
    end
end
relgyak=jo/szimszam
```

$N=10^6$ szimuláció eredményeként 0.6866 értéket kaptam.

4)

a) $\xi_i$ az $i$-edik fizetésnél a kasszában kialakuló többlet.

$M(\xi_i) = -2\cdot\frac{1}{5} - 1\cdot\frac{1}{5} + 0\cdot\frac{1}{5} + 1\cdot\frac{1}{5} + 2\cdot\frac{1}{5} = 0$, $D(\xi_i) = \sqrt{\frac{4+1+0+1+4}{5}} = \sqrt{2}$.

Az 500 fizetésnél kialakuló többlet $\sum_{i=1}^{500}\xi_i$. A centrális határeloszlás tétel értelmében ez jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $500\cdot 0 = 0$ várható értékkel és $\sqrt{500}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{1000}$ szórással. A $k\sigma$ szabály értelmében egy normális eloszlású valószínűségi változó a várható értékének $k\sigma$ sugarú környezetébe esik $2\phi(k)-1$ valószínűséggel. $2\phi(k)-1 = 0.99 \Rightarrow k = 2.58$, tehát $(-2.58\cdot\sqrt{1000}, 2.58\cdot\sqrt{1000}) = (-81.58, 81.58) = (-82, 82)$ a keresett intervallum.

b) $P(\sum_{i=1}^{500}\xi_i < -100) = F_{\sum_{i=1}^{500}\xi_i}(-100) \approx \phi(\frac{-100-0}{\sqrt{1000}}) = 1-\phi(\sqrt{10}) = 1-0.9992 = 0.0008$

5)

a) $\xi$ jelölje a dobott fejek számát! $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=1000, $p = 0.5$ paraméterekkel. Mivel $\xi$ 1000 darab független karakterisztikus eloszlású valószínűségi változó összege, ezért az eloszlása jó közelítéssel normális eloszlás $1000\cdot 0.5 = 500$ várható értékkel, és $\sqrt{1000\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 15.81$ szórással.

$P(450 < \xi < 550) = F(550) - F(450) \approx \phi(\frac{550-500}{15.81}) - \phi(\frac{450-500}{15.81}) = 2\phi(3.16) - 1 =$
$= 0.9984 \approx 0.998$.

b) $(500 - 1.645\cdot 15.81, 500 + 1.645\cdot 15.81) = (474, 526)$.

c) $P(\xi = 500) = P(500 \le \xi < 501) = \phi(\frac{501-500}{15.81}) - \phi(0) = \phi(0.06) - 0.5 =$
$= 0.5239 - 0.5 = 0.0239 \approx 0.024$

Másik út: $P(\xi = 500) = P(500 \le \xi < 501) = F(501) - F(500) = F'(a)(501-500) = f(a)$ ahol "$a$" egy közbülső hely az $(500,501)$ intervallumban. Ha $a = 50.5$, akkor $f(500.5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 15.81} e^{-\frac{(500.5-500)^2}{2\cdot 15.81^2}} = 0.0252209 \approx 0.025$. A pontos valószínűség (Matlab program-csomaggal számolva) éppen $\binom{1000}{500}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} = 0.025225018$, ami öt tizedes jegyig egyezik a sűrűségfüggvény segítségével számolt közelítő értékkel.

6) Jelölje $\xi$ azon időponttal rendelkező páciensek számát, akik megjelennek a rendelésen. $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$=120, $p$=0.8 paraméterekkel.

a) $x = ?$ $P(\xi \le x) = 0.95$. $F_\xi(x) \approx \phi(\frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}) = \phi(\frac{x-96}{4.38})$,

$P(\xi \le x) = F_\xi(x+\varepsilon) \approx \phi(\frac{x-96}{4.38}) = 0.95$, $\frac{x-96}{4.38} = 1.645$, $x = 103.2$, $x = 103$

b) $\xi_n$ jelölje a megjelenők számát $n$ darab időponttal rendelkező ember esetén. $\xi_n$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n \cdot 0.8$ várható értékkel és $\sqrt{n \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 0.4 \cdot \sqrt{n}$ szórással.

$P(\xi_n \leq 120) = 0.95$, $\phi(\frac{120 - 0.8 \cdot n}{0.4 \cdot \sqrt{n}}) = 0.95$, $\frac{120 - 0.8 \cdot n}{0.4 \cdot \sqrt{n}} = 1.645$, $n = 140$.

7)

a) $\xi_i$ az $i$-edik zacskóba kerülő zsemlék száma. $\xi_i$ eloszlása $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.25 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.25 \end{pmatrix}$,

$M(\xi_i) = 2.9$, $D(\xi_i) = 1.514$. $M(\sum_{i=1}^{400} \xi_i) = 400 \cdot 2.9 = 1160$,

$D(\sum_{i=1}^{400} \xi_i) = \sqrt{400} \cdot 1.514 = 30.28$.

$P(\sum_{i=1}^{400} \xi_i < 1100) = F_{\sum_{i=1}^{400} \xi_i}(1100) \approx \phi(\frac{1100 - 1160}{30.28}) = \phi(-1.98) = 1 - 0.9761 = 0.024$.

b) $n = ?$ $P(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \geq 1200) = 0.99$

$1 - F_{összeg}(x) = 0.99$, $1 - \phi(\frac{1200 - n \cdot 2.9}{1.514\sqrt{n}}) = 0.99$, $\frac{1200 - n \cdot 2.9}{1.514\sqrt{n}} = -2.32$, $\sqrt{n} = 20.95$, $n = 439.1$, $n$=440.

8)

a) $\xi$ legyen a jobb oldali ruhatárat választók száma. $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 500$ és $p = 0.5$ paraméterekkel. A centrális határeloszlás-tétel értelmében $\xi$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m = np = 250$ várható értékkel és $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 11.18$ szórással. Akkor van gond a kabátok elhelyezésével, ha $\xi$ értéke túl nagy vagy túl kicsi (ez utóbbi esetben a bal oldali ruhatárban nem lesz elég hely). Mivel egy $N(250, 11.18)$ eloszlású valószínűségi változó a $(221.15, 278.84)$ intervallumból veszi fel értékeit 0.99 valószínűséggel, ezért ha mindkét oldalon 279 fogas van, akkor 0.99 valószínűséggel elegendő lesz a nézők szabad ruhatár-választásához.

b) $\xi_2$ legyen a jobb oldali ruhatárat választók száma. $\xi_2$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n = 250$ és $p = 0.5$ paraméterekkel. A centrális határeloszlás tétel értelmében $\xi$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m = np = 125$ várható értékkel és $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7.905$ szórással. $\xi_2$ tehát (104,61,145,39) intervallumból veszi fel értékeit 0.99, valószínűséggel, tehát $2 \cdot 145 = 290$ hely biztosítása mindkét oldalon 0.99 valószínűséggel elegendő.

9) $\xi$ a leállások száma, $F(x) \approx \phi(\frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}})$, $x = ?$, $P(\xi < x) = 0.98$, $\phi(\frac{x - 500}{\sqrt{500}}) = 0.98$, $x = 500 + 2.06 \cdot \sqrt{500} = 546.06$, $P(\xi \leq 546)$. (Számítógéppel kiszámolva a pontos valószínűségeket $P(\xi \leq 546) = 0.9801$, $P(\xi \leq 547) = 0.9821$.)

10)

a) Legyen $\xi$ az izzó élettartama.
$P(1000-x<\xi<1000+x)=0.75$, $F(1000+x)-F(1000-x)=0.75$,
$1-e^{-0.001(1000+x)}-(1-e^{-0.001(1000-x)}=0.75$, $e^{-1}(e^{0.001x}-e^{-0.001x})=0.75$, $e^{0.001x}=y$,
$y-\dfrac{1}{y}=2.039$, $y_1=2.447$, $x=895$, $y_2<0$, ami nem lehet. Tehát a keresett intervallum $(105,1895)$.

b) $\overline{\xi}$ a 100 db izzó élettartamának átlaga. $\overline{\xi}$ jó közelítéssel normális eloszlású $m=1000$, $\sigma=\dfrac{1000}{\sqrt{100}}=100$ paraméterekkel. Tehát $P(1000-k100<\overline{\xi}<1000+k100)=0.75$ amennyiben $k=1.15$. Így a keresett intervallum $(1000-115,1000+115)=(885,1115)$.

11) Legyen $\xi$ a gurított hatosok száma. $\xi$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n=1000$, $p=\dfrac{1}{6}$ paraméterekkel. A hatosok relatív gyakorisága $\dfrac{\xi}{1000}$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m=\dfrac{np}{n}=p=\dfrac{1}{6}$ várható értékkel és $\sigma=\dfrac{\sqrt{np(1-p)}}{n}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{1000}}=0.012$ szórással.

a) $P(\left|\dfrac{\xi}{n}-\dfrac{1}{6}\right|<0.02)\approx 2\phi(\dfrac{0.02}{0.012})-1=2\phi(1.67)-1\approx 0.90$.

b) $P(\left|\dfrac{\xi}{n}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon)\approx 2\phi(\dfrac{\varepsilon}{0.012})-1=0.95$, $\dfrac{\varepsilon}{0.012}=1.96$, $\varepsilon=0.0235$.

c) $\xi_n$ $n$ gurítás esetén a dobott hatosok száma. $\xi_n$ binomiális eloszlású valószínűségi változó $n$ és $p=\dfrac{1}{6}$ paraméterekkel, így $\dfrac{\xi_n}{n}$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m=\dfrac{1}{6}$ és $\sigma=\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}=\dfrac{0.373}{\sqrt{n}}$ paraméterekkel.

$$P(\left|\frac{\xi_n}{n}-\frac{1}{6}\right|<0.01)\approx 2\phi\left(\frac{0.01}{\left(\frac{0.373}{\sqrt{n}}\right)}\right)-1=0.99,\quad \frac{0.01}{\left(\frac{0.373}{\sqrt{n}}\right)}=2.58,\quad \sqrt{n}=96.23,\quad n=9261.$$

12) $\xi$ a 10 Ft-ra pályázók száma. $\xi$ binomiális eloszlású $n=10000$, és az ismeretlen $p$ paraméterekkel. A centrális határeloszlás tétel értelmében $\xi$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m=10000p$ és $\sigma=\sqrt{10000p(1-p)}=100\sqrt{p(1-p)}$ paraméterekkel.
$p=?$, $P(\xi<2000)=0.99$.

$F_\xi(2000)=0.99$, $\quad F_\xi(x)\approx\phi(\dfrac{x-10000p}{100\sqrt{p(1-p)}})$, $\quad \phi(\dfrac{2000-10000p}{100\sqrt{p(1-p)}})=0.99$,

$\dfrac{2000-10000p}{100\sqrt{p(1-p)}}=2.32$,

$\frac{20-100p}{\sqrt{p(1-p)}} = 2.32$, $20-100p = 2.32\sqrt{p(1-p)}$, $p = 0.191$.

13) $\xi_n$ az $A$ esemény gyakorisága $n$ kísérlet esetén, $\frac{\xi_n}{n}$ pedig a relatív gyakorisága. $\frac{\xi_n}{n}$ jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $m = \frac{np}{n} = p = P(A)$ és $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ paraméterekkel. $\sigma \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$, ezért $P(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon) \approx 2\phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - 1 \ge 2\phi(2\varepsilon\sqrt{n}) - 1$.

$P(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < 0.01) \ge 0.95$, $2\phi(2 \cdot 0.01\sqrt{n}) - 1 = 0.95$, $2 \cdot 0.01\sqrt{n} = 1.96$, $n = 9600$.

14) Alkalmazza a $P(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon) \ge 2\phi(2\varepsilon\sqrt{n}) - 1$ formulát ismeretlen $p$ valószínűsége esetére!

15) Alkalmazza a $P(\left|\overline{\xi} - M(\xi)\right| < \varepsilon) \approx 2\phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{D(\xi)}) - 1$ közelítő formulát! Abban az esetben, ha $D(\xi)$ ismeretlen, akkor helyette annak felső becslését használja!