ÚJ SZÉCHENYI TERV

Blázsik Zoltán:

Színes hálózatok

A felsőfokú informatikai oktatás minőségének fejlesztése, modernizációja

TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0104

Főkedvezményezett:
Pannon Egyetem
8200 Veszprém
Egyetem u. 10.

Kedvezményezett:
Szegedi Tudományegyetem
6720 Szeged
Dugonics tér 13.

2014

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Színes hálózatok

Blázsik Zoltán

SZTE

Tartalomjegyzék:

- Egy osztálykiránduláson bizonyos lányok ki nem állhatják egymást. Hány elegendően nagy szobában lehet őket úgy elhelyezni, hogy haragosok ne kerüljenek egy szobába?

- Egy osztálykiránduláson bizonyos lányok ki nem állhatják egymást. Hány elegendően nagy szobában lehet őket úgy elhelyezni, hogy haragosok ne kerüljenek egy szobába?
- Noénak hány óriási bárkára volt szüksége, ha nem akarta, hogy valamelyik állat felfaljon egy másikat?

- Egy osztálykiránduláson bizonyos lányok ki nem állhatják egymást. Hány elegendően nagy szobában lehet őket úgy elhelyezni, hogy haragosok ne kerüljenek egy szobába?
- Noénak hány óriási bárkára volt szüksége, ha nem akarta, hogy valamelyik állat felfaljon egy másikat?
- A rendező város az olimpia minden eseményét közvetíti a világ televíziós társaságai felé. Hány vonalat kell kiépíteni, ha egyik eseményről sem maradhat le?

- Az egyetemi kurzusok jellemzői pl. az időtartam, az oktató személye valamint az, hogy mely szakoknak szól. A hallgatók látogatása kívánatos, ezért minden hallgató részt szeretne venni minden óráján. Ha mindegyik kurzus 1 órás, valamint egy teremben egy napon 12 óra tartható, akkor megtervezhető-e az órarend 4 napra, 6 teremben?

Az első három feladat közös modelljét kapjuk, ha az objektumok - lányok, megmentendő állatok, sportesemények - párjait rendre összekötjük, ha - haragban vannak, egyik veszélyes a másikra, időintervallumaik metszők - egyébként pedig nem kötjük őket össze.
A modell a gráf, az objektumokat csúcsoknak vagy pontoknak, az összszekötéseket éleknek nevezzük.
A feladatokban közös, hogy a csúcsokat néhány olyan részre kellene partícionálnunk, mely részekbe eső csúcsok között nem megy él.

A negyedik feladatban ha gráfot vezetünk be, vajon mik legyenek a csúcsok?
Az órarendben elhelyezett kurzusok? Hogyan definiáljuk az éleket?
Jelentsen az él konfliktust, ütközést úgy, mint a többi feladatnál!
Egy terembe, egy adott órában nem rakunk két kurzust, erre nem kell vigyázni! Az jelent konfliktust, ha vagy az oktatónak, vagy a hallgatónak egyidőben lenne két kurzusa! Kössük össze minden oktatóra a kurzusainak párjait!

A negyedik feladatban ha gráfot vezetünk be, vajon mik legyenek a csúcsok?
Az órarendben elhelyezett kurzusok? Hogyan definiáljuk az éleket?
Jelentsen az él konfliktust, ütközést úgy, mint a többi feladatnál!
Egy terembe, egy adott órában nem rakunk két kurzust, erre nem kell vigyázni! Az jelent konfliktust, ha vagy az oktatónak, vagy a hallgatónak egyidőben lenne két kurzusa! Kössük össze minden oktatóra a kurzusainak párjait!
Kössük össze minden szaknak (tanulócsoportnak) szóló kurzusok párjait!
Vajon a kurzusok beoszthatók-e a 48 órás munkahét óráiba ütközésmentesen úgy, hogy minden egyes órában legfeljebb 6 kurzus lehet?

Gráfok

Definíció

$G = (V, E)$ egy gráf, melyben $V = V(G)$ a csúcsok halmaza,
$E = E(G)$ az élek halmaza.
Egy élt a V két eleme határoz meg, őket köti össze.
Ha minden $e = \{u, v\} \in E$ esetén az u és a v különbözik egymástól, akkor hurokélt nem tartalmaz a G gráf.
Ha egyetlen $\{u, v\}$ él van, akkor többszörös vagy párhuzamos éleket sem tartalmaz G.
Ha egyik sem fordul elő a G egy egyszerű, irányítatlan gráf.
Gráf alatt - ha mást nem mondunk - egyszerű gráfot értünk.

Gráfok

Definíció

*$G = (V, E)$ egy gráf, melyben $V = V(G)$ a csúcsok halmaza,
$E = E(G)$ az élek halmaza.
Egy élt a V két eleme határoz meg, őket köti össze.
Ha minden $e = \{u, v\} \in E$ esetén az u és a v különbözik egymástól, akkor hurokélt nem tartalmaz a G gráf.
Ha egyetlen $\{u, v\}$ él van, akkor többszörös vagy párhuzamos éleket sem tartalmaz G.
Ha egyik sem fordul elő a G egy egyszerű, irányítatlan gráf.
Gráf alatt - ha mást nem mondunk - egyszerű gráfot értünk.
A $D = (V, A)$ gráf irányított, ha az A elemei a V bizonyos rendezett párjaiból állnak.*

Gráfok

Definíció

$G = (V, E)$ egy gráf, melyben $V = V(G)$ a csúcsok halmaza, $E = E(G)$ az élek halmaza.
Egy élt a V két eleme határoz meg, őket köti össze.
Ha minden $e = \{u, v\} \in E$ esetén az u és a v különbözik egymástól, akkor hurokélt nem tartalmaz a G gráf.
Ha egyetlen $\{u, v\}$ él van, akkor többszörös vagy párhuzamos éleket sem tartalmaz G.
Ha egyik sem fordul elő a G egy egyszerű, irányítatlan gráf.
Gráf alatt - ha mást nem mondunk - egyszerű gráfot értünk.
A $D = (V, A)$ gráf irányított, ha az A elemei a V bizonyos rendezett párjaiból állnak.

Bizonyos megmentett vadon élő állatok között a táplálkozási lánc természetes irányítást ad.

Részgráfok

Definíció

A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf részgráfja, ha* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *és az* E' *minden elemének mindkét végpontja* V'*-beli.*

Részgráfok

Definíció

A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf részgráfja, ha* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *és az* E' *minden elemének mindkét végpontja* V'*-beli.*
A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf feszített részgráfja, ha* $V' \subseteq V$ *és* $E' \subseteq E$*, valamint* $u', v' \in V'$, $e = \{u', v'\} \in E$ *esetén* $e \in E'$ *is teljesül.*

Részgráfok

Definíció

A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf részgráfja, ha* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *és az* E' *minden elemének mindkét végpontja* V'*-beli.*
A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf feszített részgráfja, ha* $V' \subseteq V$ *és* $E' \subseteq E$, *valamint* $u', v' \in V'$, $e = \{u', v'\} \in E$ *esetén* $e \in E'$ *is teljesül.*

Egy gráfból egy részgráfját megkaphatjuk csúcsok - és a hozzájuk illeszkedő élek -, valamint esetleg további élek törlésével.

Részgráfok

Definíció

A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf részgráfja, ha* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *és az* E' *minden elemének mindkét végpontja* V'*-beli.*
A $G' = (V', E')$ *gráf a* $G = (V, E)$ *gráf feszített részgráfja, ha* $V' \subseteq V$ *és* $E' \subseteq E$*, valamint* $u', v' \in V'$, $e = \{u', v'\} \in E$ *esetén* $e \in E'$ *is teljesül.*

Egy gráfból egy részgráfját megkaphatjuk csúcsok - és a hozzájuk illeszkedő élek -, valamint esetleg további élek törlésével.
Egy feszített részgráfot elő tudunk állítani csak csúcsok törlésével.

Részgráfok

Definíció

A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf részgráfja, ha $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ és az E' minden elemének mindkét végpontja V'-beli.
A $G' = (V', E')$ gráf a $G = (V, E)$ gráf feszített részgráfja, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$, valamint $u', v' \in V'$, $e = \{u', v'\} \in E$ esetén $e \in E'$ is teljesül.

Egy gráfból egy részgráfját megkaphatjuk csúcsok - és a hozzájuk illeszkedő élek -, valamint esetleg további élek törlésével.
Egy feszített részgráfot elő tudunk állítani csak csúcsok törlésével.
Ha a gráfból csak éleket törlünk, akkor minden csúcs megmarad, az ilyen módon kapott részgráfokat néha megkülönböztetjük (spanning graph).

Független ponthalmazok, klikkek

Definíció

A $\overline{G}$ komplementer gráfban $\{u, v\}$ pontosan akkor él, ha $\{u, v\}$ a G-ben nem él.

Független ponthalmazok, klikkek

Definíció

A $\overline{G}$ komplementer gráfban $\{u, v\}$ pontosan akkor él, ha $\{u, v\}$ a G-ben nem él.
A G gráf G' feszített részgráfja teljes részgráf a G-ben, ha G'-ben bármely két csúcs össze van kötve.

Független ponthalmazok, klikkek

Definíció

A $\overline{G}$ *komplementer gráfban* $\{u, v\}$ *pontosan akkor él, ha* $\{u, v\}$ *a G-ben nem él.*
A G gráf G' feszített részgráfja teljes részgráf a G-ben, ha G'-ben bármely két csúcs össze van kötve.
A G gráf G' részgráfja független, stabil vagy üres részgráf a G-ben, ha G'-ben nem megy él.

Független ponthalmazok, klikkek

Definíció

A $\overline{G}$ *komplementer gráfban* $\{u, v\}$ *pontosan akkor él, ha* $\{u, v\}$ *a G-ben nem él.*
A G gráf G' feszített részgráfja teljes részgráf a G-ben, ha G'-ben bármely két csúcs össze van kötve.
A G gráf G' részgráfja független, stabil vagy üres részgráf a G-ben, ha G'-ben nem megy él.
A G gráf k*-részes, ha létezik a csúcsoknak* k *részre történő partíciója oly módon, hogy mindegyik rész a G üres részgráfja. Speciálisan a kétrészes gráfokat páros körüljárásúaknak (párosnak) is hívjuk.*

k-színezés

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

k-színezés

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

Definíció

G csúcsainak egy színezése jó, ha mindegyik él két végpontja más-más színt kapott.
G csúcsai jól k-színezhetők, ha G k-részes, minden rész üres, így 1 színnel színezhető.

Ha mást nem mondunk általában színezés alatt jó színezést értünk.

k-színezés

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

Definíció

G csúcsainak egy színezése jó, ha mindegyik él két végpontja más-más színt kapott.
G csúcsai jól k-színezhetők, ha G k-részes, minden rész üres, így 1 színnel színezhető.

Ha mást nem mondunk általában színezés alatt jó színezést értünk.
Egy jó k-színezés színosztályai stabil részgráfok.

k-színezés

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

Definíció

G csúcsainak egy színezése jó, ha mindegyik él két végpontja más-más színt kapott.
G csúcsai jól k-színezhetők, ha G k-részes, minden rész üres, így 1 színnel színezhető.

Ha mást nem mondunk általában színezés alatt jó színezést értünk.
Egy jó k-színezés színosztályai stabil részgráfok.
Egy k-színezhető gráf l-színezhető is, ha $l > k$.

k-színezés

A G csúcsainak színezése egy hozzárendelés, minden csúcs kap egy színt (pl. szokás pozitív egészekkel is színezni).

Definíció

G csúcsainak egy színezése jó, ha mindegyik él két végpontja más-más színt kapott.
G csúcsai jól k-színezhetők, ha G k-részes, minden rész üres, így 1 színnel színezhető.

Ha mást nem mondunk általában színezés alatt jó színezést értünk.
Egy jó k-színezés színosztályai stabil részgráfok.
Egy k-színezhető gráf l-színezhető is, ha $l > k$.
Egy k-színezés nem feltétlenül egyértelmű, még akkor sem, ha a színek permutációjától eltekintünk.

Gráfparaméterek

Tekintsünk - ha mást nem mondunk - véges gráfokat, legyen $n = |V(G)|$.

Definíció

A G gráf G' részgráfja maximális teljes részgráf (klikk), ha teljes és további csúccsal nem tudjuk bővíteni, hogy teljes maradjon.
Egy G' részgráf maximális független, ha nem vehetünk hozzá újabb csúcsot, amellyel együtt is üres lenne.

Gráfparaméterek

Tekintsünk - ha mást nem mondunk - véges gráfokat, legyen $n = |V(G)|$.

Definíció

A G gráf G' részgráfja maximális teljes részgráf (klikk), ha teljes és további csúccsal nem tudjuk bővíteni, hogy teljes maradjon.
Egy G' részgráf maximális független, ha nem vehetünk hozzá újabb csúcsot, amellyel együtt is üres lenne.
Jelölje $\omega(G)$ a legnagyobb teljes részgráf csúcsainak számát.

Gráfparaméterek

Tekintsünk - ha mást nem mondunk - véges gráfokat, legyen $n = |V(G)|$.

Definíció

A G gráf G' részgráfja maximális teljes részgráf (klikk), ha teljes és további csúccsal nem tudjuk bővíteni, hogy teljes maradjon.
Egy G' részgráf maximális független, ha nem vehetünk hozzá újabb csúcsot, amellyel együtt is üres lenne.
Jelölje $\omega(G)$ a legnagyobb teljes részgráf csúcsainak számát.
Jelölje $\alpha(G)$ a legnagyobb üres részgráf csúcsainak számát.

Gráfparaméterek

Tekintsünk - ha mást nem mondunk - véges gráfokat, legyen $n = |V(G)|$.

Definíció

A G gráf G' részgráfja maximális teljes részgráf (klikk), ha teljes és további csúccsal nem tudjuk bővíteni, hogy teljes maradjon.
Egy G' részgráf maximális független, ha nem vehetünk hozzá újabb csúcsot, amellyel együtt is üres lenne.
Jelölje $\omega(G)$ a legnagyobb teljes részgráf csúcsainak számát.
Jelölje $\alpha(G)$ a legnagyobb üres részgráf csúcsainak számát.

Ha G k-részes, akkor $\omega(G) \leq k \leq n$, valamint $\frac{n}{k} \leq \alpha(G)$ teljesül.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.
Ha G-nek van éle $\chi(G)$ legalább 2.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.
Ha G-nek van éle $\chi(G)$ legalább 2.
$\chi(G)$ = 2 pontosan a páros gráfokra teljesül.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.
Ha G-nek van éle $\chi(G)$ legalább 2.
$\chi(G)$ = 2 pontosan a páros gráfokra teljesül.
K_n, az n csúcsú teljes gráf kromatikus száma n.

Kromatikus szám

Definíció

Jelölje $\chi(G)$ azt a legkisebb k számot, amelyre létezik a G csúcsainak jó k-színezése.
Nem létezik tehát jó ($\chi(G)$ -1)-színezése.
$\chi(G)$ a G gráf kromatikus száma.

$\chi(G') \leq \chi(G)$ ha G' a G részgráfja.
A G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$, valamint $\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$ teljesül.
Ha G-nek van éle $\chi(G)$ legalább 2.
$\chi(G)$ = 2 pontosan a páros gráfokra teljesül.
K_n, az n csúcsú teljes gráf kromatikus száma n.
Ha G nem teljes, $\chi(G)$ kisebb, mint n.

A kérdések újra

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k-színezése és van legalább k szoba.

A kérdések újra

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k-színezése és van legalább k szoba.
Ha Noé rendelkezik a vadállatok gráf kromatikus száma sok óriási bárkával, akkor meg lehet szervezni a mentést úgy, hogy egyik bárkában se legyen áldozat.

A kérdések újra

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k-színezése és van legalább k szoba.
Ha Noé rendelkezik a vadállatok gráf kromatikus száma sok óriási bárkával, akkor meg lehet szervezni a mentést úgy, hogy egyik bárkában se legyen áldozat.
Ha az olimpiai események időintervallumainak metszet gráfja kromatikus számánál nem kevesebb csatorna működik, akkor minden esemény látható lesz valahol.

A kérdések újra

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k-színezése és van legalább k szoba.
Ha Noé rendelkezik a vadállatok gráf kromatikus száma sok óriási bárkával, akkor meg lehet szervezni a mentést úgy, hogy egyik bárkában se legyen áldozat.
Ha az olimpiai események időintervallumainak metszet gráfja kromatikus számánál nem kevesebb csatorna működik, akkor minden esemény látható lesz valahol.
Jegyezzük meg: Ha valahonnan tudjuk, hogy a G gráf kromatikus száma $\chi(G)$, akkor még nem áll rendelkezésünkre feltétlenül egy jó $\chi(G)$ színnel történő színezése G-nek!

A kérdések újra

A haragban lévő lányok nem kerülnek egy szobába, ha létezik a haragosság gráfnak k-színezése és van legalább k szoba.
Ha Noé rendelkezik a vadállatok gráf kromatikus száma sok óriási bárkával, akkor meg lehet szervezni a mentést úgy, hogy egyik bárkában se legyen áldozat.
Ha az olimpiai események időintervallumainak metszet gráfja kromatikus számánál nem kevesebb csatorna működik, akkor minden esemény látható lesz valahol.
Jegyezzük meg: Ha valahonnan tudjuk, hogy a G gráf kromatikus száma $\chi(G)$, akkor még nem áll rendelkezésünkre feltétlenül egy jó $\chi(G)$ színnel történő színezése G-nek!
Megfordítva: Ha nem sikerült még találni k színnel jó színezést, nem biztos, hogy nincs is!

Nem színezési kérdés

Az órarend készítése nehéz!

Nem színezési kérdés

Az órarend készítése nehéz!
A negyedik kérdésben adott egy bemenet - a kurzuslista, az adatokkal - és konkrét, szigorú feltételeket várunk el!
Ha az ütközés gráfról tudnánk, hogy a kromatikus száma nagyobb mint 48, akkor nemleges választ kapnánk.

Nem színezési kérdés

Az órarend készítése nehéz!
A negyedik kérdésben adott egy bemenet - a kurzuslista, az adatokkal - és konkrét, szigorú feltételeket várunk el!
Ha az ütközés gráfról tudnánk, hogy a kromatikus száma nagyobb mint 48, akkor nemleges választ kapnánk.
Ha azonban a gráfot ki lehet színezni 48, vagy annál kevesebb színnel, akkor még figyelembe kell venni azt a plusz követelményt is, hogy egy órában csak legfeljebb 6 kurzus lehet, mivel csak ennyi terem van!
Tehát ez a kérdés ebben a formában nem egyszerű színezési feladat.

Példák

Feltehető a kromatikus szám vizsgálata esetén, hogy a gráf összefüggő.
Több komponensű gráf kromatikus száma megegyik a legnagyobb kromatikus számú komponensével, hiszen a különböző komponensek színezése egymástól függetlenül történhet.

Példák

Feltehető a kromatikus szám vizsgálata esetén, hogy a gráf összefüggő.
Több komponensű gráf kromatikus száma megegyik a legnagyobb kromatikus számú komponensével, hiszen a különböző komponensek színezése egymástól függetlenül történhet.
A fa gráfok kétrészesek, ezért kétszínezhetőek.

Példák

Feltehető a kromatikus szám vizsgálata esetén, hogy a gráf összefüggő.
Több komponensű gráf kromatikus száma megegyik a legnagyobb kromatikus számú komponensével, hiszen a különböző komponensek színezése egymástól függetlenül történhet.
A fa gráfok kétrészesek, ezért kétszínezhetőek.

Egy színezési mód:

Példák

Feltehető a kromatikus szám vizsgálata esetén, hogy a gráf összefüggő.
Több komponensű gráf kromatikus száma megegyik a legnagyobb kromatikus számú komponensével, hiszen a különböző komponensek színezése egymástól függetlenül történhet.
A fa gráfok kétrészesek, ezért kétszínezhetőek.

Egy színezési mód:
Vegyük a fa egy tetszőleges v csúcsát! Tudjuk, hogy fában bármely két csúcsot összeköt pontosan egy út. A pontok távolsága éppen ennek az egyértelmű útnak a hossza (most az éleinek száma). Színezzük a v-től páros távolságra lévő csúcsokat (tehát v-t is) pirosra, a páratlan távolságra esőket kékre. Így minden csúcsot egyértelműen kiszíneztünk. Ez a színezés egyben meg is ad egy két részre bontást!

Páros gráfok

$\chi(C_n)$ kettő, ha n páros, három, ha n páratlan.

Következmény:

Állítás

A kétrészes gráfok és a páros körüljárású (tehát páratlan hosszú kört nem tartalmazó) gráfok ugyanazok.

Páros gráfok

$\chi(C_n)$ kettő, ha n páros, három, ha n páratlan.

Következmény:

Állítás

A kétrészes gráfok és a páros körüljárású (tehát páratlan hosszú kört nem tartalmazó) gráfok ugyanazok.

Egyrészt egy páratlan kör nem színezhető két színnel, tehát nem lehet egy kétrészes gráf részgráfja.

Páros gráfok

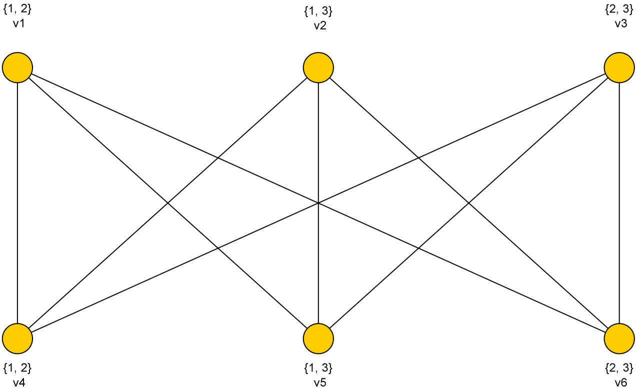
Másrészt tegyük fel, hogy G összefüggő és nincs benne páratlan kör.

Páros gráfok

Másrészt tegyük fel, hogy G összefüggő és nincs benne páratlan kör.
Ekkor alkalmazhatjuk a fákra alkalmazott színezési eljárást!
A távolság általában a két pontot összekötő legrövidebb út hossza.

Páros gráfok

Másrészt tegyük fel, hogy G összefüggő és nincs benne páratlan kör.
Ekkor alkalmazhatjuk a fákra alkalmazott színezési eljárást!
A távolság általában a két pontot összekötő legrövidebb út hossza.
A távolság paritása alapján jó színezni, ugyanis ha $d(v,a) \equiv d(v,b)\ mod(2)$ és az $\{a,b\} \in E(G)$ lenne, akkor ha v-ből a-ba, onnan b-be majd vissza v-be sétálunk az utak és az $\{a,b\}$ él mentén, akkor valahol egy páratlan kör bezáródna.


{1, 2}
v1
{1, 3}
v2
{2, 3}
v3
{1, 2}
v4
{1, 3}
v5
{2, 3}
v6

Színezési feladatok

- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?

Színezési feladatok

- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?

Színezési feladatok

- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb k legyen. Mely k-ra elegendő 9 csoport?

Színezési feladatok

- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb 13 legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege legfeljebb k legyen. Mely k-ra elegendő 9 csoport?
- Az $\{1, 2, \cdots, 12\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám szorzata legfeljebb k legyen. Mely k-ra elegendő 9 csoport?

- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Legalább hány csoport szükséges?

- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, n\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Jelölje rp(n) azt a legkisebb k számot ahány csoport elegendő. Igaz-e, hogy az rp(n) monoton függvény?

- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, n\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Jelölje rp(n) azt a legkisebb k számot ahány csoport elegendő. Igaz-e, hogy az rp(n) monoton függvény?
- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám között oszthatósági reláció áll fenn. Legalább hány csoport szükséges?

- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, n\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám relatív prím legyen. Jelölje rp(n) azt a legkisebb k számot ahány csoport elegendő. Igaz-e, hogy az rp(n) monoton függvény?
- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám között oszthatósági reláció áll fenn. Legalább hány csoport szükséges?
- Az $\{1, 2, \cdots, 20\}$ számokat olyan csoportokba szeretnénk osztani, hogy egy csoportban bármely két szám összege osztható legyen 3-mal. Legalább hány csoport szükséges?

- Egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk a keletkezett háromszögekhez színeket úgy, hogy közös határszakasszal rendelkező háromszögek nem lehetnek azonos színűek. Legalább hány színre van szükség?

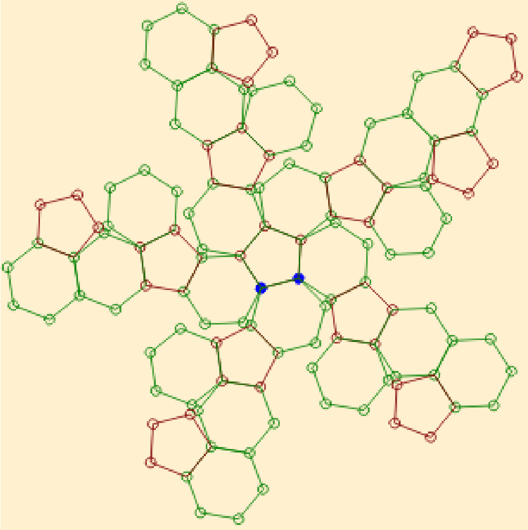
- Egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk a keletkezett háromszögekhez színeket úgy, hogy közös határszakasszal rendelkező háromszögek nem lehetnek azonos színűek. Legalább hány színre van szükség?
- Egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk az n-szög csúcsaihoz színeket úgy, hogy olyan két csúcs ne lehessen azonos színű, amelyekhez van olyan kis háromszög aminek ők csúcsai. Legalább hány színre van szükségünk?

- Egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk a keletkezett háromszögekhez színeket úgy, hogy közös határszakasszal rendelkező háromszögek nem lehetnek azonos színűek. Legalább hány színre van szükség?
- Egy konvex n-szöget egymást nem metsző átlók behúzásával háromszögekre bontottunk. Rendeljünk az n-szög csúcsaihoz színeket úgy, hogy olyan két csúcs ne lehessen azonos színű, amelyekhez van olyan kis háromszög aminek ők csúcsai. Legalább hány színre van szükségünk?
- Adjunk meg 8 pontot a síkon úgy, hogy egy szabályos 8-szög csúcsaiban helyezkedjenek el. Vegyük azt a 28 szakaszt, amelyeket a pontpárok meghatároznak. Osszuk a szakaszokat minél kevesebb csoportba úgy, hogy ne kerüljön két szakasz egy csoportba akkor, ha belső pontban metszik egymást!

- Néhány egyenest úgy vettünk fel a síkon, hogy bármely két egyenes metszi egymást, de semelyik 3 egyenesnek nincs közös pontja. Hány szín elegendő az egyenesek által meghatározott tartományok kiszínezéséhez akkor, ha szomszédos szakasszal rendelkező tartományok nem lehetnek azonos színűk?

- Néhány egyenest úgy vettünk fel a síkon, hogy bármely két egyenes metszi egymást, de semelyik 3 egyenesnek nincs közös pontja. Hány szín elegendő az egyenesek által meghatározott tartományok kiszínezéséhez akkor, ha szomszédos szakasszal rendelkező tartományok nem lehetnek azonos színűk?
- Hány színnel színezhető az n dimenziós hiperkocka csúcshalmaza, ha egy él két végpontja nem lehet azonos színű?

- Néhány egyenest úgy vettünk fel a síkon, hogy bármely két egyenes metszi egymást, de semelyik 3 egyenesnek nincs közös pontja. Hány szín elegendő az egyenesek által meghatározott tartományok kiszínezéséhez akkor, ha szomszédos szakasszal rendelkező tartományok nem lehetnek azonos színűk?
- Hány színnel színezhető az n dimenziós hiperkocka csúcshalmaza, ha egy él két végpontja nem lehet azonos színű?
- A focilabda 5- és 6-szögekből áll, ilyenek vannak az élek mentén összevarrva.
  Hány színt kell használni az elemekhez, ha ebben a különleges labdában nem lehetnek egyszínű élszomszédos sokszögek?



Tartalomjegyzék:

Fokszám feltételek

Definíció

A $v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
$\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Fokszám feltételek

Definíció

A $v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
$\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Állítás

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Fokszám feltételek

Definíció

A $v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
$\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Állítás

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Az állítás nyilvánvaló, $\Delta(G) + 1$ színnel G kiszínezhető.

Fokszám feltételek

Definíció

A $v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
$\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Állítás

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Az állítás nyilvánvaló, $\Delta(G) + 1$ színnel G kiszínezhető.
Amikor a tetszőleges *u* csúcsot ki akarjuk színezni, akkor az esetleg már kiszínezett szomszédai színei között nem lehet több különböző, mint $\Delta(G)$. Van tehát új szín u-hoz!

Fokszám feltételek

Definíció

A $v \in V(G)$ csúcs $d(v)$ foka a hozzá illeszkedő élek száma.
$\Delta(G)$ jelöli a G csúcsainak maximális fokszámát, míg $\delta(G)$ a minimális fokszámot.

Állítás

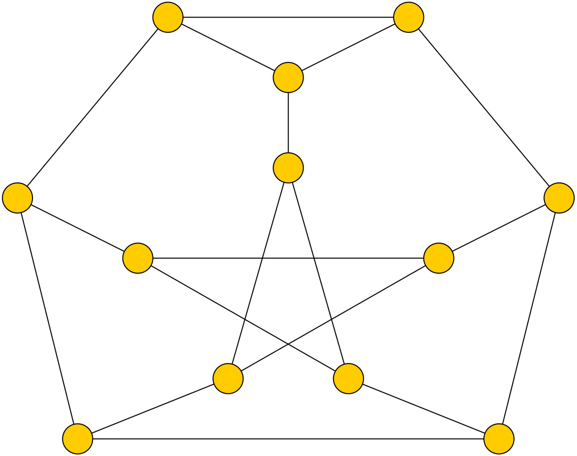
$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Az állítás nyilvánvaló, $\Delta(G) + 1$ színnel G kiszínezhető.
Amikor a tetszőleges u csúcsot ki akarjuk színezni, akkor az esetleg már kiszínezett szomszédai színei között nem lehet több különböző, mint $\Delta(G)$. Van tehát új szín u-hoz!
Az állítás éles:
$\chi(K_n) = n$, $\Delta(K_n) = n - 1$
$\chi(C_{2l+1}) = 3$, $\Delta(C_{2l+1}) = 2$

Vajon ki lehet-e a következő P gráf csúcsait színezni kevesebb színnel, mint $\Delta(G) + 1$?

Vajon ki lehet-e a következő P gráf csúcsait színezni kevesebb színnel, mint $\Delta(G) + 1$?
Mint láttuk, $\Delta(G) + 1$ szín akkor is elegendő, ha valaki már hozzáfogott a színezéshez, nem nézett előre, csak a jó színezésre ügyelt!
Ha eddig még nem használt fel több színt, mint $\Delta(G) + 1$-et, akkor a színezés be is fejezhető $\Delta(G) + 1$ szín felhasználásával.

Vajon ki lehet-e a következő P gráf csúcsait színezni kevesebb színnel, mint $\Delta(G) + 1$?
Mint láttuk, $\Delta(G) + 1$ szín akkor is elegendő, ha valaki már hozzáfogott a színezéshez, nem nézett előre, csak a jó színezésre ügyelt!
Ha eddig még nem használt fel több színt, mint $\Delta(G) + 1$-et, akkor a színezés be is fejezhető $\Delta(G) + 1$ szín felhasználásával.
Adjunk meg - ha lehetséges - olyan előszínezést legfeljebb $\Delta(G)$ színt felhasználva, hogy a befejezéshez rákényszerüljünk $\Delta(G) + 1$ szín használatára!



Definíció

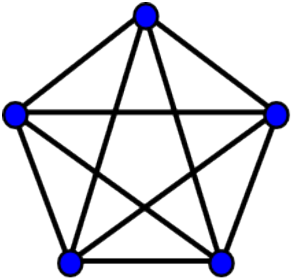
Ha G pontjai a sík bizonyos pontjai, élei pedig a síkban lerajzolt Jordan-görbék, amelyek nem metszik egymást belső pontban, akkor G-t síkgráfnak mondjuk. Valamint minden olyan H gráfot síkba rajzolható gráfnak (röviden síkgráfnak) nevezünk, amelynek lehetséges a fent leírt beágyazása.

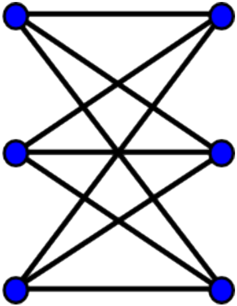
Ilyen gráf pl. a K_4, azonban K_5 nem síkgráf! Az előbbit csak le kell rajzolni!

Definíció

Ha G pontjai a sík bizonyos pontjai, élei pedig a síkban lerajzolt Jordan-görbék, amelyek nem metszik egymást belső pontban, akkor G-t síkgráfnak mondjuk. Valamint minden olyan H gráfot síkba rajzolható gráfnak (röviden síkgráfnak) nevezünk, amelynek lehetséges a fent leírt beágyazása.

Ilyen gráf pl. a K_4, azonban K_5 nem síkgráf! Az előbbit csak le kell rajzolni!
Az utóbbit nem lehet, mert véve egy 5 hosszú körét és annak síkbarajzolását a belsejébe is és a külsejébe is be kéne húzni átlókat. Azonban kívül is és belül is legfeljebb 2 átló húzható be metszés nélkül.





Euler-formula

Ha egy G gráfot beágyazunk egy Σ felületre, akkor a csúcsok a felület különböző pontjai lesznek, az élek pedig egymást belső pontban nem metsző egyszerű görbék lesznek a végpontjaiknak megfelelő pontok között.

Euler-formula

Ha egy G gráfot beágyazunk egy Σ felületre, akkor a csúcsok a felület különböző pontjai lesznek, az élek pedig egymást belső pontban nem metsző egyszerű görbék lesznek a végpontjaiknak megfelelő pontok között.

A görbék együtt körülhatárolhatnak bizonyos felület részeket. Ezeket nevezzük országoknak. Ha a felület a sík, akkor síkgráfot tudunk beágyazni, de egyéb felületbe is beágyazhatunk gráfot, akkor az arra a felületre rajzolható.

Legyen G egy a síkra rajzolt gráf, csúcsainak, éleinek és a beágyazáskor keletkező országoknak a száma rendre: c, e, l.
G komponenseinek száma k.
Közöttük kapcsolatot teremt az Euler-formula:

Tétel

$c + l - e = 1 + k$

Bizonyítás

G élszámára vonatkozó indukcióval.

Bizonyítás

G élszámára vonatkozó indukcióval.
Ha G-nek nincs éle, akkor minden csúcs egy komponens és egy ország van. Tegyük fel, hogy G síkgráf és minden nálánál kevesebb élű síkgráfra teljesül a formula.

Bizonyítás

G élszámára vonatkozó indukcióval.
Ha G-nek nincs éle, akkor minden csúcs egy komponens és egy ország van. Tegyük fel, hogy G síkgráf és minden nálánál kevesebb élű síkgráfra teljesül a formula.
Legyen e a G egy éle.

Bizonyítás

G élszámára vonatkozó indukcióval.
Ha G-nek nincs éle, akkor minden csúcs egy komponens és egy ország van. Tegyük fel, hogy G síkgráf és minden nálánál kevesebb élű síkgráfra teljesül a formula.
Legyen e a G egy éle.
Tegyük fel először, hogy az e egy híd, vagyis $G \setminus e$ eggyel több komponenssel rendelkezik mint G, Ekkor az e él mindkét oldalon ugyanazzal az országgal érintkezik.
Elhagyásával tehát csak az élek száma csökken eggyel és a komponensek száma nő eggyel. Mivel az így kapott gráfra a formula érvényes, így érvényben marad G-re is.

Bizonyítás

(folyt.) Másodszor tegyük fel, hogy az e nem híd. Ekkor a $G \setminus e$ gráf ugyanannyi komponensű marad, most azonban az országok száma lesz kevesebb eggyel, hiszen az a két ország, amelyet e választott el egybe olvad.
A formula érvényessége így is öröklődik G-re.

Következmény

Minden összefüggő síkgráfra $e \leq 3c - 6$ *teljesül.*

Következmény

Minden összefüggő síkgráfra $e \leq 3c - 6$ teljesül.

Bizonyítás

A gráf síkbeli beágyazásakor mindegyik országot legalább 3 él határol.

Következmény

Minden összefüggő síkgráfra $e \leq 3c - 6$ teljesül.

Bizonyítás

A gráf síkbeli beágyazásakor mindegyik országot legalább 3 él határol.
Bármely él legfeljebb két országot választ el. Ha összevetjük az illeszkedő él-ország párokat, akkor $2e \geq 3l$ adódik. Az Euler-formulába a becslést beírva $c + \frac{2e}{3} \geq e + 2$, tehát $3c - 6 \geq e$ adódik.

Tétel (Kenneth Appel és Wolfgang Haken)

Négyszíntétel:
Minden síkgráf 4-színezhető.

Az első olyan matematikai tétel, amelynek az első bizonyításához a számítógép segítségét is igénybe vették. A programozási munkát John Koch végezte.

Tétel (Alfred Kempe - Percy John Heawood)

Ötszíntétel:
Minden síkgráf 5-színezhető.

Tétel (Alfred Kempe - Percy John Heawood)

Ötszíntétel:
Minden síkgráf 5-színezhető.

Bizonyítás

Legyen G egy síkgráf amelynek $n \geq 6$ csúcsa és m éle van.
Nyilván a kevesebb, mint 6 csúcsú síkgráf 5-színezhető.
Indukcióval bizonyítunk.
Feltehetjük, hogy minden n-nél kevesebb csúcsú síkgráfra igaz az állítás.

Bizonyítás

(folyt.) A fokszámátlag kisebb, mint 6

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{2(3n-6)}{n} < 6$$

mivel az élszámot síkgráfokra az Euler-féle poliédertétel következménye segítségével így becsülhetjük.

Bizonyítás

(folyt.) A fokszámátlag kisebb, mint 6

$$\frac{2m}{n} \leq \frac{2(3n-6)}{n} < 6$$

mivel az élszámot síkgráfokra az Euler-féle poliédertétel következménye segítségével így becsülhetjük.
Legyen $v \in G$ *egy olyan csúcs, amelynek a foka legfeljebb 5. Az indukciós feltételből a* $G' = G \setminus v$ *gráfnak létezik egy 5-színezése. Ha v-nek kevesebb, mint 5 különböző színű szomszédja van, akkor ki tudjuk v-t is színezni.*

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető, hogy v szomszédai pl. pozitív forgásirányban v_1, v_2, v_3, v_4, v_5*, az indexek a színeiket mutatják.*

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető, hogy v szomszédai pl. pozitív forgásirányban v_1, v_2, v_3, v_4, v_5*, az indexek a színeiket mutatják.*
Jelölje G_{13} *a G' azon részgráfját, amelyet az 1 és 3 színekkel színezett csúcsok és a közöttük haladó élek határoznak meg.*

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető, hogy v szomszédai pl. pozitív forgásirányban v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, az indexek a színeiket mutatják.
Jelölje G_{13} a G' azon részgráfját, amelyet az 1 és 3 színekkel színezett csúcsok és a közöttük haladó élek határoznak meg.
A G_{24} hasonlóan definiált.

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető, hogy v szomszédai pl. pozitív forgásirányban v_1, v_2, v_3, v_4, v_5*, az indexek a színeiket mutatják.*
Jelölje G_{13} *a G' azon részgráfját, amelyet az 1 és 3 színekkel színezett csúcsok és a közöttük haladó élek határoznak meg.*
A G_{24} *hasonlóan definiált.*
Ha a v_1 *és* v_3 *a* G_{13} *nem azonos komponensében vannak, akkor az egyik komponensben felcserélhetők a színek, így a v színezhető lesz pl. 1-gyel.*

Bizonyítás

(folyt.) Ha azonos komponensben vannak, akkor összeköti őket egy út, amelyben csak 1-gyel vagy 3-mal színezett csúcsok vannak.
Hasonlóan gondolkodva a G_{24} -ben kell lennie egy a v_2 és v_4 pontokat összekötő, 2 és 4 színekkel színezett útnak.

Bizonyítás

(folyt.) Ha azonos komponensben vannak, akkor összeköti őket egy út, amelyben csak 1-gyel vagy 3-mal színezett csúcsok vannak.
Hasonlóan gondolkodva a G_{24} -ben kell lennie egy a v_2 és v_4 pontokat összekötő, 2 és 4 színekkel színezett útnak.
De akkor metszené egymást a két út, ami ellentmond az indukciós feltételnek!

Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \cdots, c_k$ színek felhasználásával.

Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \cdots, c_k$ színek felhasználásával.
Rendezzük a G gráf csúcsait, legyen a rendezés: $v_1, \cdots, v_n$.

Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \cdots, c_k$ színek felhasználásával.
Rendezzük a G gráf csúcsait, legyen a rendezés: $v_1, \cdots, v_n$.
Mohón színezünk, ha v_1 megkapja az első színt, c_1-et, majd általában, ha már a $v_1, \cdots, v_j$ csúcsokat jól kiszíneztük, akkor a v_{j+1} kapja azt a legkisebb indexű színt amit kaphat.

Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \cdots, c_k$ színek felhasználásával.
Rendezzük a G gráf csúcsait, legyen a rendezés: $v_1, \cdots, v_n$.
Mohón színezünk, ha v_1 megkapja az első színt, c_1-et, majd általában, ha már a $v_1, \cdots, v_j$ csúcsokat jól kiszíneztük, akkor a v_{j+1} kapja azt a legkisebb indexű színt amit kaphat.
A c_i-t, ha $c_1, \cdots, c_{i-1}$ színű szomszédjai már vannak v_{j+1}-nak.

Mohó színezés

A G gráfot szeretnénk kiszínezni a $c_1, \cdots, c_k$ színek felhasználásával.
Rendezzük a G gráf csúcsait, legyen a rendezés: $v_1, \cdots, v_n$.
Mohón színezünk, ha v_1 megkapja az első színt, c_1-et, majd általában, ha már a $v_1, \cdots, v_j$ csúcsokat jól kiszíneztük, akkor a v_{j+1} kapja azt a legkisebb indexű színt amit kaphat.
A c_i-t, ha $c_1, \cdots, c_{i-1}$ színű szomszédjai már vannak v_{j+1}-nak.
A színezés eredménye a csúcsok sorrendjétől függ.

Állítás

G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ *színt használ fel.*

Állítás

G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ színt használ fel.

Létezik a G-nek $\chi(G)$ színezése. Egy ilyen színezés ismeretében rendezzük a csúcsokat így: Először a c_1 színűek, majd a c_2 színűek jönnek és így tovább. Ekkor a mohó színezés nem kényszerül arra, hogy a sorrendben valamikor nagyobb indexű színt használjon fel, mint a kiinduló $\chi(G)$ színezés.

Állítás

G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ színt használ fel.

Létezik a G-nek $\chi(G)$ színezése. Egy ilyen színezés ismeretében rendezzük a csúcsokat így: Először a c_1 színűek, majd a c_2 színűek jönnek és így tovább. Ekkor a mohó színezés nem kényszerül arra, hogy a sorrendben valamikor nagyobb indexű színt használjon fel, mint a kiinduló $\chi(G)$ színezés.
Az nem igaz, hogy mindig éppen a kiinduló színezést adja vissza.

Állítás

G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ színt használ fel.

Létezik a G-nek $\chi(G)$ színezése. Egy ilyen színezés ismeretében rendezzük a csúcsokat így: Először a c_1 színűek, majd a c_2 színűek jönnek és így tovább. Ekkor a mohó színezés nem kényszerül arra, hogy a sorrendben valamikor nagyobb indexű színt használjon fel, mint a kiinduló $\chi(G)$ színezés.
Az nem igaz, hogy mindig éppen a kiinduló színezést adja vissza.
Vajon mennyire lehet rossz a mohó színezés?

Állítás

G csúcsainak van olyan sorrendje, amelyre a mohó színezés $\chi(G)$ színt használ fel.

Létezik a G-nek $\chi(G)$ színezése. Egy ilyen színezés ismeretében rendezzük a csúcsokat így: Először a c_1 színűek, majd a c_2 színűek jönnek és így tovább. Ekkor a mohó színezés nem kényszerül arra, hogy a sorrendben valamikor nagyobb indexű színt használjon fel, mint a kiinduló $\chi(G)$ színezés.
Az nem igaz, hogy mindig éppen a kiinduló színezést adja vissza.
Vajon mennyire lehet rossz a mohó színezés?
Nem használ $(\Delta(G) + 1)$-nél több színt!

Lehet nagyon rossz is!

Vegyük a $(K_{n,n} \setminus M)$-t, a teljes páros gráfból kitöröltük egy teljes párosítás éleit.
A kétrészes gráf 2-színezhető.

Lehet nagyon rossz is!

Vegyük a $(K_{n,n} \setminus M)$-t, a teljes páros gráfból kitöröltük egy teljes párosítás éleit.
A kétrészes gráf 2-színezhető.
Ha azonban azt a szerencsétlen sorrendet adjuk meg, hogy rendre a párosítás éleinek két végpontját soroljuk egymás után, akkor a mohó algoritmus az első két csúcsot c_1-gyel színezi, a második két csúcsot c_2-vel, és így tovább, az utolsó két csúcsnál már a c_n-t használja fel.

Színes sakktábla

Definíció

Bevezetjük a sakktábla figura gráfjait.

Színes sakktábla

Definíció

Bevezetjük a sakktábla figura gráfjait.
Ha tudjuk, hogyan lép egy bábu, akkor azt az üres sakktábla egy mezőjére helyezve meg tudjuk adni, mely mezőkre léphet.
Az F figura gráfja F(V,E), ahol a V a sakktábla összes mezője, $E = \{\{(i,j),(k,l)\} : (i,j) \leftrightarrow (k,l)\}$ *pedig azon mezőpárokat tartalmazza, melyek között az F figura lépni tud.*

Színes sakktábla

Definíció

Bevezetjük a sakktábla figura gráfjait.
Ha tudjuk, hogyan lép egy bábu, akkor azt az üres sakktábla egy mezőjére helyezve meg tudjuk adni, mely mezőkre léphet.
Az F figura gráfja F(V,E), ahol a V a sakktábla összes mezője, $E = \{\{(i,j),(k,l)\} : (i,j) \leftrightarrow (k,l)\}$ *pedig azon mezőpárokat tartalmazza, melyek között az F figura lépni tud.*
Csak a tiszteket tekintsük, a gyalog menetmódja nem szimmetrikus, sőt speciális szabályok vonatkoznak rá.

- Határozzuk meg a bástya, a király, a futó gráf kromatikus számát!

- Határozzuk meg a bástya, a király, a futó gráf kromatikus számát!
- Mit mondhatunk általánosított, $n \times n$-es sakktábla esetén? Mennyire lehet rossz a mohó algoritmus?

- Határozzuk meg a bástya, a király, a futó gráf kromatikus számát!
- Mit mondhatunk általánosított, $n \times n$-es sakktábla esetén? Mennyire lehet rossz a mohó algoritmus?
- Mennyi a huszár és vezér gráf kromatikus száma?

- Határozzuk meg a bástya, a király, a futó gráf kromatikus számát!
- Mit mondhatunk általánosított, $n \times n$-es sakktábla esetén? Mennyire lehet rossz a mohó algoritmus?
- Mennyi a huszár és vezér gráf kromatikus száma?
- Adjunk alsó és felső becsléseket a huszár és a vezér gráf kromatikus számára az általánosított, $n \times n$-es sakktábla esetén!

Tartományok, csúcsok, élek színezése

- Néhány egyenes a síkon úgy helyezkedik el, hogy bármely kettő metsző, de bármely metszésponton legfeljebb két egyenes halad át.

Tartományok, csúcsok, élek színezése

- Néhány egyenes a síkon úgy helyezkedik el, hogy bármely kettő metsző, de bármely metszésponton legfeljebb két egyenes halad át.
  Hány szín kell a tartományok kiszínezéséhez, ha közös szakasz vagy félegyenes esetén a színek nem lehetnek azonosak?

Tartományok, csúcsok, élek színezése

- Néhány egyenes a síkon úgy helyezkedik el, hogy bármely kettő metsző, de bármely metszésponton legfeljebb két egyenes halad át.
  Hány szín kell a tartományok kiszínezéséhez, ha közös szakasz vagy félegyenes esetén a színek nem lehetnek azonosak?
- Hány szín kell a metszéspontok kiszínezéséhez, ha két pont nem lehet egyszínű, ha valamelyik egyenesen közvetlenül egymást követő metszéspontok?

Tartományok, csúcsok, élek színezése

- Néhány egyenes a síkon úgy helyezkedik el, hogy bármely kettő metsző, de bármely metszésponton legfeljebb két egyenes halad át.
  Hány szín kell a tartományok kiszínezéséhez, ha közös szakasz vagy félegyenes esetén a színek nem lehetnek azonosak?
- Hány szín kell a metszéspontok kiszínezéséhez, ha két pont nem lehet egyszínű, ha valamelyik egyenesen közvetlenül egymást követő metszéspontok?
- Legyenek a G gráf csúcsai azon ”kis” szakaszok, amelyek valamely egyenesen egymást követő metszéspontokat kötnek össze. G-ben két kis szakaszt él köt össze, ha valamelyik végpontjuk egybeesik. Hány színnel színezhető G?

Felső korlát fokszámokból

Definíció

Legyen $col(G) := max_{G' \subseteq G} \ \delta(G') + 1$ *ahol G' a G összes feszített részgráfján fut végig.*

Felső korlát fokszámokból

Definíció

Legyen $col(G) := max_{G' \subseteq G} \ \delta(G') + 1$ *ahol G' a G összes feszített részgráfján fut végig.*

A mohó színezés egy változatával G kiszínezhető col(G) színnel.

Felső korlát fokszámokból

Definíció

Legyen $col(G) := max_{G' \subseteq G} \ \delta(G') + 1$ *ahol G' a G összes feszített részgráfján fut végig.*

A mohó színezés egy változatával G kiszínezhető col(G) színnel.

Tétel (Szekeres–Wilf-tétel)

$\chi(G) \leq col(G)$

Egy ügyes rendezés a mohó színezéshez!

Bizonyítás

Rendezzük a csúcsokat a következőképpen:

v_n,

Egy ügyes rendezés a mohó színezéshez!

Bizonyítás

Rendezzük a csúcsokat a következőképpen:

v_n,

v_{n-1} *legyen a* $G \setminus v_n$ *gráf egyik legkisebb fokú csúcsa,* $\cdots$,

Egy ügyes rendezés a mohó színezéshez!

Bizonyítás

Rendezzük a csúcsokat a következőképpen:

v_n,

v_{n-1} *legyen a* $G \setminus v_n$ *gráf egyik legkisebb fokú csúcsa,*$\cdots$,

v_i *a* $G \setminus \{v_n, \cdots, v_{i+1}\}$ *gráf egyik legkisebb fokú csúcsa,* $\cdots$

Egy ügyes rendezés a mohó színezéshez!

Bizonyítás

Rendezzük a csúcsokat a következőképpen:
v_n,
v_{n-1} *legyen a* $G \setminus v_n$ *gráf egyik legkisebb fokú csúcsa,*$\cdots$,
v_i *a* $G \setminus \{v_n, \cdots, v_{i+1}\}$ *gráf egyik legkisebb fokú csúcsa,* $\cdots$

Ha ilyen rendezéssel alkalmazzuk a mohó színezést, akkor a v_i *csúcs színezéséhez elegendő az első* $\delta(G \setminus \{v_n, \cdots, v_{i+1}\}) + 1$ *szín, amiből tudunk választani, hiszen col(G) ezen értékek maximuma.*

Állítás

Legyen G összefüggő gráf.
$\Delta(G) = col(G) - 1$ *pontosan akkor áll fenn, ha G reguláris.*

Állítás

Legyen G összefüggő gráf.
$\Delta(G) = col(G) - 1$ *pontosan akkor áll fenn, ha G reguláris.*

Bizonyítás

Egyrészt ha G reguláris, akkor bármely csúcsot hagyjuk is utolsónak, neki éppen $\Delta(G)$ *szomszédja lesz.*

Állítás

Legyen G összefüggő gráf.
$\Delta(G) = col(G) - 1$ *pontosan akkor áll fenn, ha G reguláris.*

Bizonyítás

Egyrészt ha G reguláris, akkor bármely csúcsot hagyjuk is utolsónak, neki éppen $\Delta(G)$ *szomszédja lesz.*

Másrészt ha pl. a v_1 *csúcs foka kisebb mint* $\Delta(G)$*, akkor őt hagyjuk utoljára, valamint vigyázzunk arra, hogy mindegyik csúcsnak legyen szomszédja, amely még utána lesz a rendezésben.*

Állítás

Legyen G összefüggő gráf.
$\Delta(G) = col(G) - 1$ *pontosan akkor áll fenn, ha G reguláris.*

Bizonyítás

Egyrészt ha G reguláris, akkor bármely csúcsot hagyjuk is utolsónak, neki éppen $\Delta(G)$ *szomszédja lesz.*

Másrészt ha pl. a v_1 *csúcs foka kisebb mint* $\Delta(G)$*, akkor őt hagyjuk utoljára, valamint vigyázzunk arra, hogy mindegyik csúcsnak legyen szomszédja, amely még utána lesz a rendezésben.*
Mivel a gráf összefüggő, így pl. egy feszítő fa alapján vegyük előbbre a v_n*-től távolabbi csúcsokat. Ekkor* $\Delta(G) > col(G) - 1$.

A reguláris gráfokra nehezebb mohón színezni.

Következmény

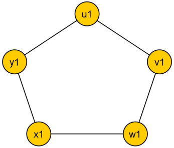
Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

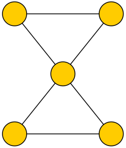
A reguláris gráfokra nehezebb mohón színezni.

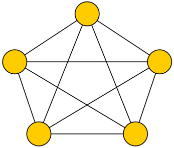
Következmény

Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

A teljes gráfokra és a páratlan körökre $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ áll fenn.


u1
y1
v1
x1
w1





Brooks tétele

Tétel (Brooks tétele)

Legyen G összefüggő. Ha nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ *teljesül.*

Brooks tétele

Tétel (Brooks tétele)

Legyen G összefüggő. Ha nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ *teljesül.*

Lemma

Legyen G összefüggő, de nem teljes gráf. Ekkor létezik három csúcs, melyek között pontosan két él megy G-ben.

Bizonyítás

Mivel G nem teljes, pl. u és v nincs összekötve.

Bizonyítás

Mivel G nem teljes, pl. u és v nincs összekötve.
Mivel összefüggő, létezik egy u-ból v-be vezető legrövidebb út G-ben.

Bizonyítás

Mivel G nem teljes, pl. u és v nincs összekötve.
Mivel összefüggő, létezik egy u-ból v-be vezető legrövidebb út G-ben.
Az u utáni első (x) és második (w) csúcs az úton (ez utóbbi lehet v is) és u éppen megfelelő hármas, hiszen x mindkettőnek szomszédja, viszont u és w nem szomszédos.

G kétszeresen összefüggő

Lemma

Legyen G kétszeresen összefüggő, legalább 3 minimális fokú gráf. Ha G nem teljes, akkor léteznek x,y,z csúcsok, melyekre $\{x, y\}, \{x, z\} \in E(G)$ és $\{y, z\} \notin E(G)$, valamint $G \setminus \{y, z\}$ összefüggő.

Bizonyítás

Ha G 3-szorosan összefüggő, akkor az állítás egyszerűen következik az előző lemmából.

Bizonyítás

Ha G 3-szorosan összefüggő, akkor az állítás egyszerűen következik az előző lemmából.
Ha G nem 3-szorosan összefüggő, akkor pl. $\{x, y\}$ *egy kételemű elvágó halmaz. Mivel G kétszeresen összefüggő,* $G \setminus x$ *összefüggő.*

Bizonyítás

Ha G 3-szorosan összefüggő, akkor az állítás egyszerűen következik az előző lemmából.
Ha G nem 3-szorosan összefüggő, akkor pl. $\{x, y\}$ egy kételemű elvágó halmaz. Mivel G kétszeresen összefüggő, $G \setminus x$ összefüggő.
A $G \setminus x$ gráfnak az y elvágó csúcsa, így az y illeszkedik legalább két, B_1, B_2 blokkra (összefüggő részgráfja $G \setminus x$-nek).

(folyt.)

Bizonyítás

Mivel a G kétszeresen összefüggő, így i=1 és 2-re a B_i -beli y_i elvágó pont nem elvágó pont G-ben, így az x csúcs szomszédos valamely $v_i \in B_i \setminus \{y_i\}$ ponttal. Így a $G \setminus \{x, v_1, v_2\}$ összefüggő.

(folyt.)

Bizonyítás

Mivel a G kétszeresen összefüggő, így i=1 és 2-re a B_i -beli y_i elvágó pont nem elvágó pont G-ben, így az x csúcs szomszédos valamely $v_i \in B_i \setminus \{y_i\}$ ponttal. Így a $G \setminus \{x, v_1, v_2\}$ összefüggő. De az x foka legalább 3 a G-ben, így van szomszédja $G \setminus \{v_1, v_2\}$-ben.

(folyt.)

Bizonyítás

Mivel a G kétszeresen összefüggő, így i=1 és 2-re a B_i -beli y_i elvágó pont nem elvágó pont G-ben, így az x csúcs szomszédos valamely $v_i \in B_i \setminus \{y_i\}$ ponttal. Így a $G \setminus \{x, v_1, v_2\}$ összefüggő. De az x foka legalább 3 a G-ben, így van szomszédja $G \setminus \{v_1, v_2\}$-ben.
Tehát $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.
A $\Delta(G) = 2$ *esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!*

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.
A $\Delta(G) = 2$ *esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!*
Ha a G-nek az x egy elvágó pontja, legyenek a $G \setminus x$ *komponensei* $G_1', \cdots G_s'$.
Továbbá jelölje G_i *a* G_i' *és az x által feszített gráfot* $(i = 1, \cdots, s)$.

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.
A $\Delta(G) = 2$ *esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!*
Ha a G-nek az x egy elvágó pontja, legyenek a $G \setminus x$ *komponensei* $G'_1, \cdots G'_s$.
Továbbá jelölje G_i *a* G'_i *és az x által feszített gráfot* $(i = 1, \cdots, s)$.
G_i *nem reguláris, mert az x foka kisebb. Így alkalmazva a következményt újra mindegyik* G_i*-nek létezik* $\Delta(G)$ *színezése.*

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.
A $\Delta(G) = 2$ *esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!*
Ha a G-nek az x egy elvágó pontja, legyenek a $G \setminus x$ *komponensei* $G'_1, \cdots G'_s$.
Továbbá jelölje G_i *a* G'_i *és az x által feszített gráfot* $(i = 1, \cdots, s)$.
G_i *nem reguláris, mert az x foka kisebb. Így alkalmazva a következményt újra mindegyik* G_i*-nek létezik* $\Delta(G)$ *színezése.*
Mivel a színeket lehet cserélgetni, elérhető, hogy a minden G_i*-ben azonos legyen az x színe.*

A Brooks-tétel bizonyítása, Lovász László, 1975

Bizonyítás

Ha G nem reguláris, akkor az előző következményből következik az állítás.
Feltehetjük, hogy G reguláris és $\Delta(G) \geq 3$.
A $\Delta(G) = 2$ *esetben G kör. Megadunk egy megfelelő sorbarendezést a csúcsokon, melyre a mohó színezés jól teljesít!*
Ha a G-nek az x egy elvágó pontja, legyenek a $G \setminus x$ *komponensei* $G'_1, \cdots G'_s$.
Továbbá jelölje G_i *a* G'_i *és az x által feszített gráfot* $(i = 1, \cdots, s)$.
G_i *nem reguláris, mert az x foka kisebb. Így alkalmazva a következményt újra mindegyik* G_i*-nek létezik* $\Delta(G)$ *színezése.*
Mivel a színeket lehet cserélgetni, elérhető, hogy a minden G_i*-ben azonos legyen az x színe.*
Egyesítve a színezéseket a G egy jó $\Delta(G)$ *színezését kapjuk.*

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!
Az előző lemma szerint van egy v_n csúcs, melynek v_1, v_2 szomszédai és $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!
Az előző lemma szerint van egy v_n csúcs, melynek v_1, v_2 szomszédai és $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.
Számozzuk a további csúcsokat egy v_n gyökerű feszítő fa szerint.

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!
Az előző lemma szerint van egy v_n csúcs, melynek v_1, v_2 szomszédai és $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.
Számozzuk a további csúcsokat egy v_n gyökerű feszítő fa szerint.
Így biztosítjuk, hogy a $v_3, \cdots v_{n-1}$ csúcsoknak is legyen nagyobb indexű szomszédja.

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!
Az előző lemma szerint van egy v_n *csúcs, melynek* v_1, v_2 *szomszédai és* $G \setminus \{v_1, v_2\}$ *összefüggő.*
Számozzuk a további csúcsokat egy v_n *gyökerű feszítő fa szerint. Így biztosítjuk, hogy a* $v_3, \cdots v_{n-1}$ *csúcsoknak is legyen nagyobb indexű szomszédja.*
A mohó algoritmus a v_1, v_2 *csúcsoknak adja az első színt. Így amikor a* v_n*-t kell kiszínezni, akkor biztos nem lesz neki több, mint* $\Delta(G) - 1$ *különböző színű szomszédja.*

A Brooks-tétel bizonyítása

(folyt.)

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy G kétszeresen összefüggő!
Az előző lemma szerint van egy v_n csúcs, melynek v_1, v_2 szomszédai és $G \setminus \{v_1, v_2\}$ összefüggő.
Számozzuk a további csúcsokat egy v_n gyökerű feszítő fa szerint. Így biztosítjuk, hogy a $v_3, \cdots v_{n-1}$ csúcsoknak is legyen nagyobb indexű szomszédja.
A mohó algoritmus a v_1, v_2 csúcsoknak adja az első színt. Így amikor a v_n-t kell kiszínezni, akkor biztos nem lesz neki több, mint $\Delta(G) - 1$ különböző színű szomszédja.
Tehát $\Delta(G)$ színnel kiszíneztük G-t!

Tartalomjegyzék:

Mitől nagy a kromatikus szám?

Ha $\chi(G) = k$, akkor minden $G' \subseteq G$ részgráfra $\chi(G') \leq k$.

Mitől nagy a kromatikus szám?

Ha $\chi(G) = k$, akkor minden $G' \subseteq G$ részgráfra $\chi(G') \leq k$.
Így ha G-ből elhagyunk egy élt, akkor a kromatikus szám vagy megmarad vagy 1-gyel csökken.

Mitől nagy a kromatikus szám?

Ha $\chi(G) = k$, akkor minden $G' \subseteq G$ részgráfra $\chi(G') \leq k$.
Így ha G-ből elhagyunk egy élt, akkor a kromatikus szám vagy megmarad vagy 1-gyel csökken.
Ha G-ből elhagyunk egy csúcsot, akkor ugyanez igaz.

Definíció

A G gráf χ *- élkritikus, ha bármely* $e \in E(G)$ *élre* $\chi(G \setminus e) < \chi(G)$

Mitől nagy a kromatikus szám?

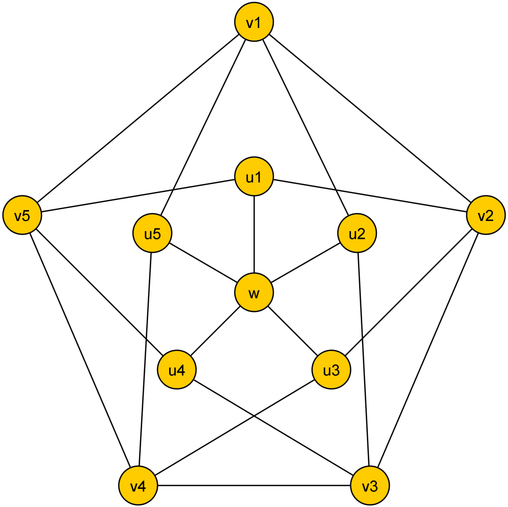
Ha $\chi(G) = k$, akkor minden $G' \subseteq G$ részgráfra $\chi(G') \leq k$.
Így ha G-ből elhagyunk egy élt, akkor a kromatikus szám vagy megmarad vagy 1-gyel csökken.
Ha G-ből elhagyunk egy csúcsot, akkor ugyanez igaz.

Definíció

A G gráf χ *- élkritikus, ha bármely* $e \in E(G)$ *élre* $\chi(G \setminus e) < \chi(G)$

Definíció

A G gráf χ *- pontkritikus, ha bármely* $v \in V(G)$ *csúcsra* $\chi(G \setminus v) < \chi(G)$


v1
u1
v5
u5
u2
v2
w
u4
u3
v4
v3

Ha G-ből igyekszünk úgy elhagyni pl. éleket egyesével, hogy ne csökkenjen a kromatikus szám, akkor egyszer azt tapasztaljuk, hogy már egyik él sem hagyható el.
Így kaptunk egy χ - élkritikus részgráfját G-nek.

Ha G-ből igyekszünk úgy elhagyni pl. éleket egyesével, hogy ne csökkenjen a kromatikus szám, akkor egyszer azt tapasztaljuk, hogy már egyik él sem hagyható el.
Így kaptunk egy χ - élkritikus részgráfját G-nek.
Ha G-ből csúcsokat hagyunk el, akkor ugyanez igaz.

Ha G-ből igyekszünk úgy elhagyni pl. éleket egyesével, hogy ne csökkenjen a kromatikus szám, akkor egyszer azt tapasztaljuk, hogy már egyik él sem hagyható el.
Így kaptunk egy χ - élkritikus részgráfját G-nek.
Ha G-ből csúcsokat hagyunk el, akkor ugyanez igaz.
Természetesen élek vagy csúcsok törlési folyamata végén nem egyértelmű a kapott kritikus gráf.

Állítás

Ha G χ - pontkritikus, akkor G blokk (kétszeresen összefüggő).

Ha G-ből igyekszünk úgy elhagyni pl. éleket egyesével, hogy ne csökkenjen a kromatikus szám, akkor egyszer azt tapasztaljuk, hogy már egyik él sem hagyható el.
Így kaptunk egy χ - élkritikus részgráfját G-nek.
Ha G-ből csúcsokat hagyunk el, akkor ugyanez igaz.
Természetesen élek vagy csúcsok törlési folyamata végén nem egyértelmű a kapott kritikus gráf.

Állítás

Ha G χ - pontkritikus, akkor G blokk (kétszeresen összefüggő).

Bizonyítás

Ha G nem összefüggő, akkor minden komponense kiszínezhető kevesebb, mint $\chi(G)$ színnel (hiszen ha egy másik komponensből törlünk egy csúcsot, akkor a tekintett komponens megmarad és kiszínezhető kevesebb mint $\chi(G)$ színnel).

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ *felbomlik* $V_1, \cdots, V_s$ *diszjunkt részekre.*

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ *felbomlik* $V_1, \cdots, V_s$ *diszjunkt részekre.*
Legyenek G_i*-k a* $V_i \cup \{u\}$ *csúcshalmazok által feszített részgráfok.*

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ *felbomlik* $V_1, \cdots, V_s$ *diszjunkt részekre.*
Legyenek G_i*-k a* $V_i \cup \{u\}$ *csúcshalmazok által feszített részgráfok.*
Mindegyik G_i *kiszínezhető* $\chi(G) - 1$ *színnel.*

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ *felbomlik* $V_1, \cdots, V_s$ *diszjunkt részekre.*
Legyenek G_i*-k a* $V_i \cup \{u\}$ *csúcshalmazok által feszített részgráfok.*
Mindegyik G_i *kiszínezhető* $\chi(G) - 1$ *színnel.*
Mivel csak az u csúcs közös a G_i*-kben, így kaphat olyan színt, hogy a G is* $\chi(G) - 1$ *színezhető legyen.*

Bizonyítás

(folyt.) De akkor G is kiszínezhető lenne kevesebb, mint $\chi(G)$ *színnel!*
Ha G csak egyszeresen összefüggő lenne, akkor van egy u elvágó pont, $V \setminus u$ *felbomlik* $V_1, \cdots, V_s$ *diszjunkt részekre.*
Legyenek G_i*-k a* $V_i \cup \{u\}$ *csúcshalmazok által feszített részgráfok.*
Mindegyik G_i *kiszínezhető* $\chi(G) - 1$ *színnel.*
Mivel csak az u csúcs közös a G_i*-kben, így kaphat olyan színt, hogy a G is* $\chi(G) - 1$ *színezhető legyen.*
Tehát G egy blokk.

Állítás

Ha G χ *- pontkritikus,* $\chi(G) = k$*, akkor* $\delta(G) \geq (k - 1)$

Állítás

Ha G χ - pontkritikus, $\chi(G) = k$, akkor $\delta(G) \geq (k-1)$

Bizonyítás

Ha lenne (k-1)-nél is kisebb fokú v csúcs, akkor őt törölve a maradék gráf a kritikusság miatt kiszínezhető (k-1) színnel.

Állítás

Ha G χ - pontkritikus, $\chi(G) = k$, akkor $\delta(G) \geq (k-1)$

Bizonyítás

Ha lenne (k-1)-nél is kisebb fokú v csúcs, akkor őt törölve a maradék gráf a kritikusság miatt kiszínezhető (k-1) színnel. Mivel v-nek nincs annyi szomszédja, mint ahány színosztály, így az egyik színét megkaphatja, vagyis G is (k-1) - színezhető lenne. Tehát $\delta(G) \geq (k-1)$.

Állítás

Ha $\chi(G) = k$, akkor van G-nek legalább k olyan csúcsa, amely legalább (k-1) fokú.

Állítás

Ha $\chi(G) = k$, akkor van G-nek legalább k olyan csúcsa, amely legalább (k-1) fokú.

Bizonyítás

Hagyjunk el addig csúcsokat, amíg nem kapunk egy G' k-kritikus részgráfot. Az előző állítás szerint minden megmaradt csúcs foka legalább (k-1). Mivel k-szín kell a G' kiszínezéséhez, így van legalább k csúcsa.

A Szekeres–Wilf-tétel egy másik bizonyítása

Bizonyítás

Legyen G' a G egy $\chi(G) = k$ *- kromatikus kritikus részgráfja. Ekkor* $\chi(G) = \chi(G') \leq \delta(G') + 1 \leq \max_{G'' \subseteq G'} \delta(G'') + 1$, *ahol a maximumot - mint a tételben - a G összes feszített G" részgráfjaira is vehetjük.*

Tétel (Dirac tétele)

$\chi(G) \geq k$, valamint adott G-nek egy [X,Y] csúcspartíciója úgy, hogy mind a G(X), mind a G(Y) feszített részgráfok (k-1) színezhetőek.

Tétel (Dirac tétele)

$\chi(G) \geq k$, valamint adott G-nek egy [X,Y] csúcspartíciója úgy, hogy mind a G(X), mind a G(Y) feszített részgráfok (k-1) színezhetőek. Ekkor az X és Y között menő vágásbeli élek száma legalább (k-1).

Bizonyítás

Legyenek G(X) és G(Y) színosztályai rendre
$X_1, \cdots, X_{k-1}; Y_1, \cdots, Y_{k-1}$
Vezessük be a H kétrészes gráfot, amelynek az egyik részében az X_i-knek, a másik részében az Y_i-knek felel meg egy-egy pont.

Tétel (Dirac tétele)

$\chi(G) \geq k$, valamint adott G-nek egy [X,Y] csúcspartíciója úgy, hogy mind a G(X), mind a G(Y) feszített részgráfok (k-1) színezhetőek. Ekkor az X és Y között menő vágásbeli élek száma legalább (k-1).

Bizonyítás

Legyenek G(X) és G(Y) színosztályai rendre
$X_1, \cdots, X_{k-1}; Y_1, \cdots, Y_{k-1}$
Vezessük be a H kétrészes gráfot, amelynek az egyik részében az X_i-knek, a másik részében az Y_i-knek felel meg egy-egy pont. Pontosan akkor kötünk össze két pontot, ha különböző oldalon vannak és a nekik megfelelő X_i és Y_j részek között G-ben nem megy él.

Tétel (Dirac tétele)

$\chi(G) \geq k$, valamint adott G-nek egy [X,Y] csúcspartíciója úgy, hogy mind a G(X), mind a G(Y) feszített részgráfok (k-1) színezhetőek. Ekkor az X és Y között menő vágásbeli élek száma legalább (k-1).

Bizonyítás

Legyenek G(X) és G(Y) színosztályai rendre
$X_1, \cdots, X_{k-1}; Y_1, \cdots, Y_{k-1}$
Vezessük be a H kétrészes gráfot, amelynek az egyik részében az X_i-knek, a másik részében az Y_i-knek felel meg egy-egy pont. Pontosan akkor kötünk össze két pontot, ha különböző oldalon vannak és a nekik megfelelő X_i és Y_j részek között G-ben nem megy él.
Tegyük fel, hogy kevesebb, mint (k-1) él lenne az [X,Y] vágásban.

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor a H-nak több, mint (k-1)(k-2) éle van. (k-2) csúccsal lehetetlen lefogni több, mint (k-2)(k-1) élt, tehát a lefogó pontok minimális száma legalább (k-1).

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor a H-nak több, mint (k-1)(k-2) éle van. (k-2) csúccsal lehetetlen lefogni több, mint (k-2)(k-1) élt, tehát a lefogó pontok minimális száma legalább (k-1).
König tétele szerint ekkor a H-ban van (k-1) elemű párosítás, vagyis teljes párosítás.

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor a H-nak több, mint (k-1)(k-2) éle van. (k-2) csúccsal lehetetlen lefogni több, mint (k-2)(k-1) élt, tehát a lefogó pontok minimális száma legalább (k-1).
König tétele szerint ekkor a H-ban van (k-1) elemű párosítás, vagyis teljes párosítás.
Emiatt, ha a párba állított színosztályokat azonos színűekre színezzük, akkor ez a színezés a G egy (k-1)-színezése.

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor a H-nak több, mint (k-1)(k-2) éle van. (k-2) csúccsal lehetetlen lefogni több, mint (k-2)(k-1) élt, tehát a lefogó pontok minimális száma legalább (k-1).
König tétele szerint ekkor a H-ban van (k-1) elemű párosítás, vagyis teljes párosítás.
Emiatt, ha a párba állított színosztályokat azonos színűekre színezzük, akkor ez a színezés a G egy (k-1)-színezése.
Tehát a vágásban valóban lennie kell legalább (k-1) élnek.

Következmény

Ha G k - pontkritikus gráf, akkor (k-1)-szeresen élösszefüggő.

Következmény

Ha G k - pontkritikus gráf, akkor (k-1)-szeresen élösszefüggő.

Bizonyítás

Ha $k = 1$*, akkor* $G = K_2$*, amely élösszefüggő.*

Ha $k = 2$*, akkor G egy páratlan kör, amely 2-élösszefüggő.*

Következmény

Ha G k - pontkritikus gráf, akkor (k-1)-szeresen élösszefüggő.

Bizonyítás

Ha $k = 1$*, akkor* $G = K_2$*, amely élösszefüggő.*
Ha $k = 2$*, akkor G egy páratlan kör, amely 2-élösszefüggő.*
Ha $k \geq 4$*, akkor tegyük fel, hogy G nem (k-1) élösszefüggő.*
Ekkor létezik olyan [X,Y] csúcspartíciója, hogy a részek között kevesebb, mint (k-1) él megy.

Következmény

Ha G k - pontkritikus gráf, akkor (k-1)-szeresen élösszefüggő.

Bizonyítás

Ha $k = 1$*, akkor* $G = K_2$*, amely élösszefüggő.*
Ha $k = 2$*, akkor G egy páratlan kör, amely 2-élösszefüggő.*
Ha $k \geq 4$*, akkor tegyük fel, hogy G nem (k-1) élösszefüggő.*
Ekkor létezik olyan [X,Y] csúcspartíciója, hogy a részek között kevesebb, mint (k-1) él megy.
A G(X) és G(Y) (k-1)- színezhetők a kritikusság miatt.

Következmény

Ha G k - pontkritikus gráf, akkor (k-1)-szeresen élösszefüggő.

Bizonyítás

Ha $k = 1$*, akkor* $G = K_2$*, amely élösszefüggő.*
Ha $k = 2$*, akkor G egy páratlan kör, amely 2-élösszefüggő.*
Ha $k \geq 4$*, akkor tegyük fel, hogy G nem (k-1) élösszefüggő.*
Ekkor létezik olyan [X,Y] csúcspartíciója, hogy a részek között kevesebb, mint (k-1) él megy.
A G(X) és G(Y) (k-1)- színezhetők a kritikusság miatt.
Az előző tétel miatt ellentmondásra jutottunk.

Állítás

G k-pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz. Ekkor $G(W)$ nem teljes gráf.

Állítás

G k-pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz. Ekkor $G(W)$ nem teljes gráf.

Bizonyítás

Legyenek a $G \setminus W$ komponenseinek csúcshalmazai: $V_1, \cdots, V_s$.

Állítás

G k-pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz. Ekkor G(W) nem teljes gráf.

Bizonyítás

Legyenek a $G \setminus W$ komponenseinek csúcshalmazai: $V_1, \cdots, V_s$. Legyen G_i a $V_i \cup W$ által feszített részgráf (W-komponens). Mindegyik G_i (k-1)-színezhető.

Állítás

G k-pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz. Ekkor G(W) nem teljes gráf.

Bizonyítás

Legyenek a $G \setminus W$ komponenseinek csúcshalmazai: $V_1, \cdots, V_s$.
Legyen G_i a $V_i \cup W$ által feszített részgráf (W-komponens). Mindegyik G_i (k-1)-színezhető.
Tegyük fel, hogy mindegyik G_i-ben különböző színeket kaptak a W pontjai.
Ekkor a színek alkalmas permutációjával elérhető, hogy mindegyik G_i-ben a W ugyanúgy legyen színezve. Ekkor mindegyik G_i maradék részét kiszínezve, a G egy jó (k-1)- színezését kapjuk.

Állítás

G k-pontkritikus, $W \subseteq V(G)$ egy elvágó csúcshalmaz. Ekkor $G(W)$ nem teljes gráf.

Bizonyítás

Legyenek a $G \setminus W$ komponenseinek csúcshalmazai: $V_1, \cdots, V_s$.
Legyen G_i a $V_i \cup W$ által feszített részgráf (W-komponens). Mindegyik G_i (k-1)-színezhető.
Tegyük fel, hogy mindegyik G_i-ben különböző színeket kaptak a W pontjai.
Ekkor a színek alkalmas permutációjával elérhető, hogy mindegyik G_i-ben a W ugyanúgy legyen színezve. Ekkor mindegyik G_i maradék részét kiszínezve, a G egy jó (k-1)- színezését kapjuk.
Ha a W teljes gráfot feszítene, akkor ellentmondásra jutnánk.

Megjegyzés: Speciálisan ha egy k-pontkritikus gráf elvágó halmaza kételemű, akkor a két csúcs között nincs él.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor pontosan két W-komponens keletkezik és a G az uniójuk.

Bizonyítás

Az előző megjegyzés azt is mondja, hogy u és v nincs összekötve G-ben.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor pontosan két W-komponens keletkezik és a G az uniójuk.

Bizonyítás

Az előző megjegyzés azt is mondja, hogy u és v nincs összekötve G-ben. Mindegyik W-komponens (k-1)-színezhető. Ha lennének a W-komponenseknek olyan (k-1) színezései, hogy az u és v mindegyikben ugyanúgy lenne színezve (lényegében elég lenne az, hogy vagy egyszínűre, vagy különböző színűre), akkor G is (k-1) színezhető lenne.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ *egy elvágó csúcshalmaz, akkor pontosan két W-komponens keletkezik és a G az uniójuk.*

Bizonyítás

Az előző megjegyzés azt is mondja, hogy u és v nincs összekötve G-ben. Mindegyik W-komponens (k-1)-színezhető. Ha lennének a W-komponenseknek olyan (k-1) színezései, hogy az u és v mindegyikben ugyanúgy lenne színezve (lényegében elég lenne az, hogy vagy egyszínűre, vagy különböző színűre), akkor G is (k-1) színezhető lenne. Emiatt kell, hogy legyen olyan G_1 *W-komponens, amelynek minden (k-1) színezésében u és v azonos színt kap és lennie kell olyan* G_2 *W-komponensnek is, amely minden (k-1) színezésében az u és a v más-más színt kap. Ekkor ezen két komponens uniója kiadja a G-t, hiszen k-kritikus, további W-komponense nem lehet.*

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ *egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a* G_1 *és* G_2 *uniójára.*
Állítás:
Ha G_1*-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.*

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:
Ha G_1-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.
Ha G_2-ben az u-t és v-t azonosítjuk, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:
Ha G_1-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.
Ha G_2-ben az u-t és v-t azonosítjuk, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.

Bizonyítás

A G_1-ben minden színezésnél u és v más színt kap, vagyis $G_1' = G_1 \cup \{u, v\}$ k-kromatikus.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:
Ha G_1-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.
Ha G_2-ben az u-t és v-t azonosítjuk, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.

Bizonyítás

A G_1-ben minden színezésnél u és v más színt kap, vagyis
$G_1' = G_1 \cup \{u, v\}$ k-kromatikus.
G_1' k-élkritikus is, mivel $G_1' \setminus f$ tetszőleges f élre (k-1)-kromatikus.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:
Ha G_1-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.
Ha G_2-ben az u-t és v-t azonosítjuk, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.

Bizonyítás

A G_1-ben minden színezésnél u és v más színt kap, vagyis $G_1' = G_1 \cup \{u, v\}$ k-kromatikus.
G_1' k-élkritikus is, mivel $G_1' \setminus f$ tetszőleges f élre (k-1)-kromatikus.
Ha $f = e$ az nyilvánvaló.

Tétel (Dirac tétele)

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor létezik a G fenti felbontása a G_1 és G_2 uniójára.
Állítás:
Ha G_1-ben az u-t és v-t összekötjük, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.
Ha G_2-ben az u-t és v-t azonosítjuk, akkor k-élkritikus gráfot kapunk.

Bizonyítás

A G_1-ben minden színezésnél u és v más színt kap, vagyis
$G_1' = G_1 \cup \{u, v\}$ k-kromatikus.
G_1' k-élkritikus is, mivel $G_1' \setminus f$ tetszőleges f élre (k-1)-kromatikus.
Ha $f = e$ az nyilvánvaló.
Más f élre a G k-kritikussága miatt G_2 kikényszeríti, hogy u és v más-más színű legyen, ezzel a feltétellel azonban már van (k-1) színezése a $G_1' \setminus f$ gráfnak.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k-élkritikus gráf.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k-élkritikus gráf.
Tudjuk, hogy csak $G_1 \cup \{u, v\}$-ben mind u-nak, mind v-nek legalább (k-1) szomszédja van.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k-élkritikus gráf.
Tudjuk, hogy csak $G_1 \cup \{u, v\}$-ben mind u-nak, mind v-nek legalább (k-1) szomszédja van.
Így összesen u és v-nek van legalább (2k-4) G_1 - beli szomszédja.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k-élkritikus gráf.
Tudjuk, hogy csak $G_1 \cup \{u, v\}$-ben mind u-nak, mind v-nek legalább (k-1) szomszédja van.
Így összesen u és v-nek van legalább (2k-4) G_1 - beli szomszédja.
Hasonlóan a G_2' gráf is k-élkritikus, így az összeforrasztott u-v csúcsnak együtt van legalább (k-1) szomszédja.

Bizonyítás

(folyt.) Ha G_2-ben összeragasztjuk u-t és v-t, akkor éppúgy megmarad a k-kromatikussága, valamint k-élkritikussága is.

Tétel

Ha G k-élkritikus és $W = \{u, v\}$ egy elvágó csúcshalmaz, akkor $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$.

Bizonyítás

Tudjuk, hogy $G_1 \cup \{u, v\}$ egy k-élkritikus gráf.
Tudjuk, hogy csak $G_1 \cup \{u, v\}$-ben mind u-nak, mind v-nek legalább (k-1) szomszédja van.
Így összesen u és v-nek van legalább (2k-4) G_1 - beli szomszédja.
Hasonlóan a G_2' gráf is k-élkritikus, így az összeforrasztott u-v csúcsnak együtt van legalább (k-1) szomszédja.
Így $d(u) + d(v) \geq (3k - 5)$ teljesül G-ben.

Maximális fokszám, klikkszám, felső becslés.

- (A Brooks-tétel ekvivalens megfogalmazása)
  Ha G k-pontkritikus, (k-1) reguláris gráf, akkor G vagy a K_k, vagy egy páratlan kör (k=2).

Maximális fokszám, klikkszám, felső becslés.

- (A Brooks-tétel ekvivalens megfogalmazása)
  Ha G k-pontkritikus, (k-1) reguláris gráf, akkor G vagy a K_k, vagy egy páratlan kör (k=2).
- $\Delta(G) > 2, \chi(G) = \Delta(G) + 1$ pontosan akkor teljesül, ha G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1$ méretű klikket.

Maximális fokszám, klikkszám, felső becslés.

- (A Brooks-tétel ekvivalens megfogalmazása)
  Ha G k-pontkritikus, (k-1) reguláris gráf, akkor G vagy a K_k, vagy egy páratlan kör (k=2).
- $\Delta(G) > 2, \chi(G) = \Delta(G) + 1$ pontosan akkor teljesül, ha G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1$ méretű klikket.
- Igaz-e, hogy $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1 - k$ maga után vonja, hogy G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1 - k$ klikket?

Maximális fokszám, klikkszám, felső becslés.

- (A Brooks-tétel ekvivalens megfogalmazása)
  Ha G k-pontkritikus, (k-1) reguláris gráf, akkor G vagy a K_k, vagy egy páratlan kör (k=2).
- $\Delta(G) > 2, \chi(G) = \Delta(G) + 1$ pontosan akkor teljesül, ha G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1$ méretű klikket.
- Igaz-e, hogy $\chi(G) \geq \Delta(G) + 1 - k$ maga után vonja, hogy G tartalmaz egy $\Delta(G) + 1 - k$ klikket?

Sejtés (Reed sejtése, 1998)

$\chi(G) \geq \Delta(G) + 1 - k$ esetén $\omega(G) \geq \Delta(G) + 1 - 2k$ vagy $\chi(G) \leq \lceil \frac{\Delta(G)+1+\omega(G)}{2} \rceil$ a szimmetrikusabb formája.

A kromatikus szám becslése extra feltétel esetén.

Állítás

Legyen G háromszögmentes gráf. Ekkor $\chi(G) \leq 3\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \rceil$.

A kromatikus szám becslése extra feltétel esetén.

Állítás

Legyen G háromszögmentes gráf. Ekkor $\chi(G) \leq 3\lceil\frac{\Delta(G)+1}{4}\rceil$.

Bizonyítás

Legyen $k = \lceil\frac{\Delta(G)+1}{4}\rceil$. *V(G)-t partícionáljuk fel a* $V_1, \cdots, V_k$ *részekre úgy, hogy a részeken belül haladó élek száma a lehető legkisebb legyen.*

A kromatikus szám becslése extra feltétel esetén.

Állítás

Legyen G háromszögmentes gráf. Ekkor $\chi(G) \leq 3\lceil\frac{\Delta(G)+1}{4}\rceil$.

Bizonyítás

Legyen $k = \lceil\frac{\Delta(G)+1}{4}\rceil$. *V(G)-t partícionáljuk fel a* $V_1, \cdots, V_k$ *részekre úgy, hogy a részeken belül haladó élek száma a lehető legkisebb legyen.*

A V_i *által feszített* G_i *gráf maximális foka legfeljebb 3!*

A kromatikus szám becslése extra feltétel esetén.

Állítás

Legyen G háromszögmentes gráf. Ekkor $\chi(G) \leq 3\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \rceil$.

Bizonyítás

Legyen $k = \lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \rceil$. $V(G)$-t partícionáljuk fel a $V_1, \cdots, V_k$ részekre úgy, hogy a részeken belül haladó élek száma a lehető legkisebb legyen.

A V_i által feszített G_i gráf maximális foka legfeljebb 3!

Valóban, hiszen tegyük fel, hogy valamelyik $x \in V_i$ csúcs belső foka nagyobb háromnál. Ekkor van egy olyan rész pl. V_2, amelyben az x-nek legfeljebb 3 szomszédja van, különben az x-nek legalább $4k \geq \Delta(G) + 1$ szomszédja lenne, ami nem lehet.

Bizonyítás

(folyt.) Így ha az x-et áttesszük V_2-be, kevesebb lesz a belső él, ami ellentmond annak, hogy a felosztás a legjobb volt.

Bizonyítás

(folyt.) Így ha az x-et áttesszük V_2-be, kevesebb lesz a belső él, ami ellentmond annak, hogy a felosztás a legjobb volt.
Tehát $\Delta(G_i) \leq 3$ és $\omega(G_i) \leq 2$, mert a G-ben sincs háromszög. A Brooks tétel szerint tehát $\chi(G_i) \leq 3$.

Bizonyítás

(folyt.) Így ha az x-et áttesszük V_2-be, kevesebb lesz a belső él, ami ellentmond annak, hogy a felosztás a legjobb volt.
Tehát $\Delta(G_i) \leq 3$ és $\omega(G_i) \leq 2$, mert a G-ben sincs háromszög. A Brooks tétel szerint tehát $\chi(G_i) \leq 3$.
Így kiszínezzük egymás után mindegyik G_i-t, mindig 3 színt használunk, a G egy 3k színezését kapjuk.

Bizonyítás

(folyt.) Így ha az x-et áttesszük V_2-be, kevesebb lesz a belső él, ami ellentmond annak, hogy a felosztás a legjobb volt.
Tehát $\Delta(G_i) \leq 3$ és $\omega(G_i) \leq 2$, mert a G-ben sincs háromszög. A Brooks tétel szerint tehát $\chi(G_i) \leq 3$.
Így kiszínezzük egymás után mindegyik G_i-t, mindig 3 színt használunk, a G egy 3k színezését kapjuk.

Sejtés (Borodin, Kostochka, 1977)

Ha a G gráfra $\Delta(G) \geq 9$ és $\chi(G) = \Delta(G)$, akkor $\omega(G) = \Delta(G)$ teljesül.

Derékbőség, kerület.

Definíció

Egy G gráfban a legkisebb kör hosszát jelölje g(G) (az angol elnevezése girth), nevezzük derékbőségnek.

Ha egy gráfban van egy k méretű klikk, akkor kell legalább k szín a kiszínezéséhez. Tudjuk, hogy egy hosszabb páratlan körben nincs háromszög, mégis 3 szín kell a színezéséhez. Viszont elegendő is ennyi szín. Megfordítva, vajon mekkora tud lenni a kromatikus szám, ha a lehető legkisebb klikk van csak, tehát még háromszög sincsen?

A Mycielski-konstrukció

Definíció

Legyen $G = (\{v_1, \cdots, v_n\}, E)$. *Vegyünk fel, mindegyik csúcshoz egy második példányt,* $V' = \{v_1', \cdots, v_n'\}$, *valamint egy extra u csúcsot. Legyen* $G' = (V \cup V' \cup \{u\}, E \cup E' \cup E'')$, *ahol* $E' = \{\{v_i, v_j'\} : \{v_i, v_j\} \in E, v_i \in E, v_j' \in E'\}$ *és* $E'' = \{\{v_j', u\} : v_j' \in E'\}$

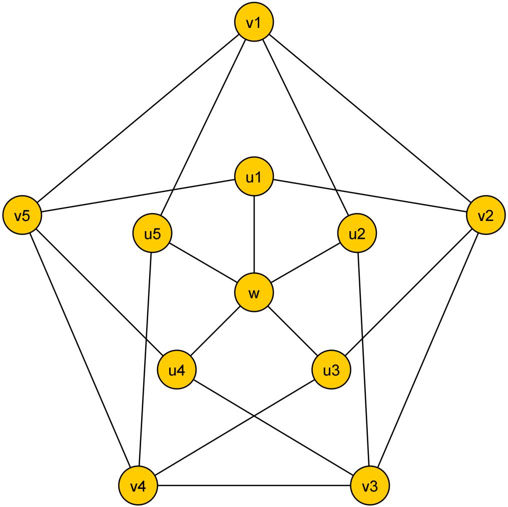
A Mycielski-konstrukció

Definíció

Legyen $G = (\{v_1, \cdots, v_n\}, E)$. *Vegyünk fel, mindegyik csúcshoz egy második példányt,* $V' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$, *valamint egy extra u csúcsot. Legyen* $G' = (V \cup V' \cup \{u\}, E \cup E' \cup E'')$, *ahol* $E' = \{\{v_i, v'_j\} : \{v_i, v_j\} \in E, v_i \in E, v'_j \in E'\}$ *és* $E'' = \{\{v'_j, u\} : v'_j \in E'\}$

Tétel (J. Mycielski)

Ha G k-élkritikus gráf, akkor G' is az, eggyel nagyobb kromatikus számmal.


v1
v5
u1
v2
u5
u2
w
u4
u3
v4
v3

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. *Tegyük fel, hogy G'-nek mégis lenne egy c k-színezése. Legyen pl.* $c(u) = 1$.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. *Tegyük fel, hogy G'-nek mégis lenne egy c k-színezése. Legyen pl.* $c(u) = 1$.
Ekkor a G egy színezése f, amely meghagyja az 1-től különböző színeket c-ből, míg az 1-színű v_i *színét* $c(v_i')$*re változtatja. Ha (x,y) egy él G-ben, akkor az egyik nem volt 1-es, így megmaradt a színe.*

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. *Tegyük fel, hogy G'-nek mégis lenne egy c k-színezése. Legyen pl.* $c(u) = 1$.
Ekkor a G egy színezése f, amely meghagyja az 1-től különböző színeket c-ből, míg az 1-színű v_i *színét* $c(v_i')$*re változtatja. Ha (x,y) egy él G-ben, akkor az egyik nem volt 1-es, így megmaradt a színe.*
Ha a másik is maradt akkor különböznek, mert a c egy jó színezés volt.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. Tegyük fel, hogy G'-nek mégis lenne egy c k-színezése. Legyen pl. $c(u) = 1$.
Ekkor a G egy színezése f, amely meghagyja az 1-től különböző színeket c-ből, míg az 1-színű v_i színét $c(v_i')$re változtatja. Ha (x,y) egy él G-ben, akkor az egyik nem volt 1-es, így megmaradt a színe.
Ha a másik is maradt akkor különböznek, mert a c egy jó színezés volt.
Ha 1 volt és változott, akkor sincs gond, mert pl. az y másodpéldánya össze volt kötve az x szomszédaival, tehát nem okoz ezután sem konfliktust a színe.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy $\chi(G') > k$. *Tegyük fel, hogy G'-nek mégis lenne egy c k-színezése. Legyen pl.* $c(u) = 1$.
Ekkor a G egy színezése f, amely meghagyja az 1-től különböző színeket c-ből, míg az 1-színű v_i *színét* $c(v_i')$*re változtatja. Ha (x,y) egy él G-ben, akkor az egyik nem volt 1-es, így megmaradt a színe.*
Ha a másik is maradt akkor különböznek, mert a c egy jó színezés volt.
Ha 1 volt és változott, akkor sincs gond, mert pl. az y másodpéldánya össze volt kötve az x szomszédaival, tehát nem okoz ezután sem konfliktust a színe.
Az f azonban csak (k-1) színt használt, ez ellentmondás.

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, *megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$*, megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, *megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$, *akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, *megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$, *akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ *-ben maradjon a c színe.*

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$*, megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$*, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ *-ben maradjon a c színe.*
Fessük k*-ra a* v_j, v_j', u *csúcsokat. A további* v_i' *csúcsokra* $f(v_i') = c(v_i)$ *legyen.*

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, *megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$, *akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ *-ben maradjon a c színe.*
Fessük k*-ra a* v_j, v_j', u *csúcsokat. A további* v_i' *csúcsokra* $f(v_i') = c(v_i)$ *legyen.*
Ha az $e = \{v_i, v_j'\}$ *típusú, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_i, v_j\}$ *egy (k-1) színezése.*
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ *-ben,* $f(v_i) = f(u) = k$ *és legyen* $f(v_t') = c(v_t)$ *minden i-től különböző indexre.*

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, megmutatjuk, hogy $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$, akkor legyen c a $G \setminus \{v_j, s\}$ egy (k-1) színezése, ahol az s a v_j egy szomszédja G-ben.
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ -ben maradjon a c színe.
Fessük k-ra a v_j, v_j', u csúcsokat. A további v_i' csúcsokra $f(v_i') = c(v_i)$ legyen.
Ha az $e = \{v_i, v_j'\}$ típusú, akkor legyen c a $G \setminus \{v_i, v_j\}$ egy (k-1) színezése.
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ -ben, $f(v_i) = f(u) = k$ és legyen $f(v_t') = c(v_t)$ minden i-től különböző indexre.
Végül ha az $e = \{v_i, v_j\}$ típusú, akkor legyen c a $G \setminus \{v_i, v_j\}$ egy (k-1) színezése.

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$*, megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v'_j\}$*, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ *-ben maradjon a c színe.*
Fessük k*-ra a* v_j, v'_j, u *csúcsokat. A további* v'_i *csúcsokra* $f(v'_i) = c(v_i)$ *legyen.*
Ha az $e = \{v_i, v'_j\}$ *típusú, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_i, v_j\}$ *egy (k-1) színezése.*
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ *-ben,* $f(v_i) = f(u) = k$ *és legyen* $f(v'_t) = c(v_t)$ *minden i-től különböző indexre.*
Végül ha az $e = \{v_i, v_j\}$ *típusú, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_i, v_j\}$ *egy (k-1) színezése.*
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ *-ben, legyen* $f(v'_t) = k$ *és* $f(u) = 1$.

Bizonyítás

A kritikusság igazolása:
Legyen $e \in E(G')$, *megmutatjuk, hogy* $\chi(G' \setminus e) \leq k$.
Három típusú él elhagyásakor kell k-színezést találni, kihasználva a G k-kritikussságát!
Ha $e = \{u, v_j'\}$, *akkor legyen c a* $G \setminus \{v_j, s\}$ *egy (k-1) színezése, ahol az s a* v_j *egy szomszédja G-ben.*
Ekkor megfelelő lesz a G' következő f átszínezése:
$G \setminus \{v_j\}$ *-ben maradjon a c színe.*
Fessük k-ra a v_j, v_j', u *csúcsokat. A további* v_i' *csúcsokra* $f(v_i') = c(v_i)$ *legyen.*
Ha az $e = \{v_i, v_j'\}$ *típusú, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_i, v_j\}$ *egy (k-1) színezése.*
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ *-ben,* $f(v_i) = f(u) = k$ *és legyen* $f(v_t') = c(v_t)$ *minden i-től különböző indexre.*
Végül ha az $e = \{v_i, v_j\}$ *típusú, akkor legyen c a* $G \setminus \{v_i, v_j\}$ *egy (k-1) színezése.*
Maradjon meg a c színe $G \setminus \{v_i\}$ *-ben, legyen* $f(v_t') = k$ *és* $f(u) = 1$.
Tehát a G' (k+1)-kritikus.

A Mycielski-féle gráfsorozat ismerete előtt is tudták, hogy létezik olyan háromszögmentes gráf, amelynek nagy a kromatikus száma. Később érintjük a híres Erdős-Rényi elméletet, a véletlen gráfokat, a valószínűségszámítási módszert. Erdős Pál módszerével sokkal többet is bizonyított, létezik olyan gráf, amelynek nagyobb mint b a derékbősége (kerület, a legrövidebb körének hossza) és egyben nagyobb mint k a kromatikus száma.

A konstrukció minden k értékre megad háromszögmentes, k-kromatikus gráfot, ráadásul k-élkritikusat! A bizonyításban elmélyedve egyrészt látható, hogy a kiindulásul vett gráf bármely élkritikus gráf lehet, tehát sok sorozatot kapunk. Másrészt annak bizonyítása, hogy G’ eggyel nagyobb kromatikus számú mint G, nem használja ki, hogy G élkritikus.

Feladat

Igazoljuk, hogy $2 \leq t \leq k$ *egészekre létezik olyan gráf, melyre* $\omega(G) = t, \chi(G) = k$.

Feladat

Létezik-e olyan gráf, melyre az $\omega(G) = \chi(G)$ *nemcsak magára a G gráfra áll fenn, hanem annyira tökéletes, hogy minden G' feszített részgráfra is teljesül az* $\omega(G) = \chi(G)$ *egyenlőség? Az él nélküli vagy éppen a teljes gráfok ilyenek, de vajon mennyire bonyolult ezzel a szép tulajdonsággal rendelkező gráfok osztálya, a benne lévő gráfok szerkezete?*

Tartalomjegyzék:

Feladat

Igazoljuk, hogy $2 \leq t \leq k$ *egészekre létezik olyan gráf, melyre* $\omega(G) = t, \chi(G) = k$.

Feladat

Igazoljuk, hogy $2 \leq t \leq k$ *egészekre létezik olyan gráf, melyre* $\omega(G) = t, \chi(G) = k$.

Feladat

Létezik-e olyan gráf, melyre az $\omega(G) = \chi(G)$ *nemcsak magára a G gráfra áll fenn, hanem annyira tökéletes, hogy minden G' feszített részgráfra is teljesül az* $\omega(G) = \chi(G)$ *egyenlőség? Az él nélküli vagy éppen a teljes gráfok ilyenek, de vajon mennyire bonyolult ezzel a szép tulajdonsággal rendelkező gráfok osztálya, a benne lévő gráfok szerkezete?*

Feladat

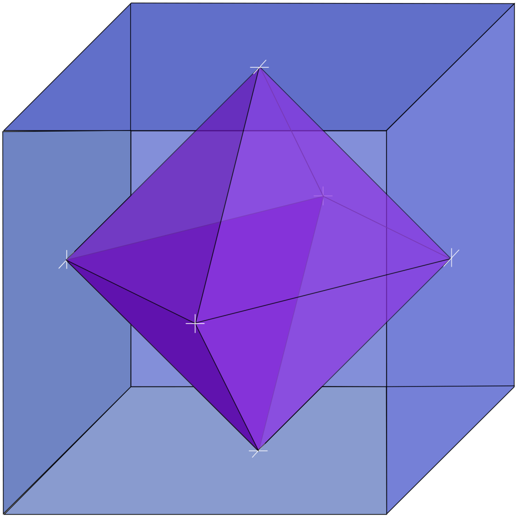
Igazoljuk, hogy $2 \leq t \leq k$ egészekre létezik olyan gráf, melyre $\omega(G) = t, \chi(G) = k$.

Feladat

Létezik-e olyan gráf, melyre az $\omega(G) = \chi(G)$ nemcsak magára a G gráfra áll fenn, hanem annyira tökéletes, hogy minden G' feszített részgráfra is teljesül az $\omega(G) = \chi(G)$ egyenlőség? Az él nélküli vagy éppen a teljes gráfok ilyenek, de vajon mennyire bonyolult ezzel a szép tulajdonsággal rendelkező gráfok osztálya, a benne lévő gráfok szerkezete?

Feladat

Az oktaéder szabályos test, 6 csúccsal, 8 háromszög lappal,12 éllel. Vajon igaz-e rá az előző feladat feltétele?



Claude Berge, 1926-2002

Definíció

A G gráfot perfektnek mondjuk, ha bármely F feszített részgráfjára fennáll az $\omega(F) = \chi(F)$ *összefüggés.*

Claude Berge, 1926-2002

Definíció

A G gráfot perfektnek mondjuk, ha bármely F feszített részgráfjára fennáll az $\omega(F) = \chi(F)$ *összefüggés.*

Definíció

$k(G)$*-vel szokás jelölni az ún. klikk fedési számot. Legalább ennyi klikk részgráf kell a G összes csúcsának lefedéséhez.*

Claude Berge, 1926-2002

Definíció

A G gráfot perfektnek mondjuk, ha bármely F feszített részgráfjára fennáll az $\omega(F) = \chi(F)$ összefüggés.

Definíció

$k(G)$-vel szokás jelölni az ún. klikk fedési számot. Legalább ennyi klikk részgráf kell a G összes csúcsának lefedéséhez.

Mivel egy maximális üres részgráf csúcsait csak egyenként lehet klikkel lefedni, így $\alpha(G) \leq k(G)$. Vegyük észre, hogy $k(G) = \chi(\overline{G})$.

Claude Berge, 1926-2002

Definíció

A G gráfot perfektnek mondjuk, ha bármely F feszített részgráfjára fennáll az $\omega(F) = \chi(F)$ összefüggés.

Definíció

$k(G)$-vel szokás jelölni az ún. klikk fedési számot. Legalább ennyi klikk részgráf kell a G összes csúcsának lefedéséhez.

Mivel egy maximális üres részgráf csúcsait csak egyenként lehet klikkel lefedni, így $\alpha(G) \leq k(G)$. Vegyük észre, hogy $k(G) = \chi(\overline{G})$.

Feladat

$\chi(\overline{C_n}) = ?$

Lovász László tétele

A perfekt gráf fogalmát tehát meghatározhatjuk ekvivalens módon így is:

Definíció

G perfekt, ha $\overline{G}$ bármely H feszített részgráfjára $\alpha(F) = k(F)$.

Lovász László tétele

A perfekt gráf fogalmát tehát meghatározhatjuk ekvivalens módon így is:

Definíció

G perfekt, ha $\overline{G}$ bármely H feszített részgráfjára $\alpha(F) = k(F)$.

Berge első sejtése (1963) azt állította, hogy G pontosan akkor perfekt gráf, amikor a komplementere.

Lovász László tétele

A perfekt gráf fogalmát tehát meghatározhatjuk ekvivalens módon így is:

Definíció

G perfekt, ha $\overline{G}$ bármely H feszített részgráfjára $\alpha(F) = k(F)$.

Berge első sejtése (1963) azt állította, hogy G pontosan akkor perfekt gráf, amikor a komplementere.

Tétel (A Perfekt gráf tétel, Lovász László tétele, 1972)

G pontosan akkor perfekt gráf, amikor a komplementere.

Egy véges G gráf bármely F feszített részgráfjára vonatkozóan a következő három tulajdonság ekvivalensen teljesül.

$$\omega(F) = \chi(F) \quad (1)$$
$$\alpha(F) = k(F) \quad (2)$$
$$\omega(F)\alpha(F) \geq |F| \quad (3)$$

A rövidebb szóhasználat miatt a G χ - perfekt, ha az első, α-perfekt ha a második tulajdonság teljesül. A tétel ezek ekvivalenciája. A bizonyításhoz hasznos és önmagában is szép a harmadik ekvivalens tulajdonság. A harmadik tulajdonság szimmetrikus a gráf és komplementere cserére!

Tétel

A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ *minden G' feszített részgráfjára teljesül.*

Tétel

A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ *minden G' feszített részgráfjára teljesül.*

Bizonyítás (Gasparian bizonyítása)

Az elegendőség következik, mivel ha G perfekt, akkor $\omega(G') = \chi(G')$ *mindegyik feszített részgráfjára teljesül, valamint jól ismert, hogy* $\alpha(G')\chi(G') \geq |V(G')|$.

Tétel

A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ *minden G' feszített részgráfjára teljesül.*

Bizonyítás (Gasparian bizonyítása)

Az elegendőség következik, mivel ha G perfekt, akkor $\omega(G') = \chi(G')$ *mindegyik feszített részgráfjára teljesül, valamint jól ismert, hogy* $\alpha(G')\chi(G') \geq |V(G')|$.

A szükségességhez tegyük fel, hogy az állítással ellentétben lenne egy G nem perfekt gráf, amelyre teljesülne az egyenlőtlenség.

Tétel

A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ *minden G' feszített részgráfjára teljesül.*

Bizonyítás (Gasparian bizonyítása)

Az elegendőség következik, mivel ha G perfekt, akkor $\omega(G') = \chi(G')$ *mindegyik feszített részgráfjára teljesül, valamint jól ismert, hogy* $\alpha(G')\chi(G') \geq |V(G')|$.

A szükségességhez tegyük fel, hogy az állítással ellentétben lenne egy G nem perfekt gráf, amelyre teljesülne az egyenlőtlenség. Ha ilyen van, akkor válasszunk ki egy olyan G ellenpéldát, amelynek a rendje minimális.

Tétel

A G gráf perfekt, akkor és csak akkor, ha $\omega(G')\alpha(G') \geq |V(G')|$ minden G' feszített részgráfjára teljesül.

Bizonyítás (Gasparian bizonyítása)

Az elegendőség következik, mivel ha G perfekt, akkor $\omega(G') = \chi(G')$ mindegyik feszített részgráfjára teljesül, valamint jól ismert, hogy $\alpha(G')\chi(G') \geq |V(G')|$.

A szükségességhez tegyük fel, hogy az állítással ellentétben lenne egy G nem perfekt gráf, amelyre teljesülne az egyenlőtlenség. Ha ilyen van, akkor válasszunk ki egy olyan G ellenpéldát, amelynek a rendje minimális.
Tehát $\chi(G) > \omega(G)$, de $\chi(G') = \omega(G')$ mindegyik valódi feszített részgráfjára.

Bizonyítás

(folyt.) Rövidítve, legyen $\omega = \omega(G)$ *és* $\alpha = \alpha(G)$, $V(G) = \{1, \cdots, n\}$.

Bizonyítás

(folyt.) Rövidítve, legyen $\omega = \omega(G)$ *és* $\alpha = \alpha(G)$, $V(G) = \{1, \cdots, n\}$.
Először megmutatjuk, hogy léteznek $C_0, \ldots, C_{\alpha\omega}$ *független halmazok, amelyek minden egyes csúcsot pontosan* α*-szeresen fednek le.*

Bizonyítás

(folyt.) Rövidítve, legyen $\omega = \omega(G)$ *és* $\alpha = \alpha(G)$*,*
$V(G) = \{1, \cdots, n\}$*.*
Először megmutatjuk, hogy léteznek $C_0, \ldots, C\alpha\omega$ *független halmazok, amelyek minden egyes csúcsot pontosan* α*-szeresen fednek le.*
Legyen C_0 *egyik tetszőleges* α *méretű stabil részhalmaza* G*-nek.*
A G *minimalitása miatt tudjuk, hogy mindegyik* $v \in C_0$ *csúcsra a* $V(G) \setminus \{v\}$ *által feszített részgráfja* G*-nek perfekt, így tehát kiszínezhető* ω *színnel.*

Bizonyítás

(folyt.) Rövidítve, legyen $\omega = \omega(G)$ *és* $\alpha = \alpha(G)$, $V(G) = \{1, \cdots, n\}$.
Először megmutatjuk, hogy léteznek $C_0, \ldots, C\alpha\omega$ *független halmazok, amelyek minden egyes csúcsot pontosan* α*-szeresen fednek le.*
Legyen C_0 *egyik tetszőleges* α *méretű stabil részhalmaza G-nek. A G minimalitása miatt tudjuk, hogy mindegyik* $v \in C_0$ *csúcsra a* $V(G) \setminus \{v\}$ *által feszített részgráfja G-nek perfekt, így tehát kiszínezhető* ω *színnel.*
Tehát a $V(G) \setminus \{v\}$ *partícionálható* ω *stabil halmazra.*

Bizonyítás

(folyt.) Ha ezt megtesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i-ket.

Bizonyítás

(folyt.) Ha ezt megtesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i-ket.

Minden $i = 0, \cdots, \alpha\omega$ indexre létezik egy K_i, ω méretű klikk, amely nem metszi C_i-t.

Bizonyítás

(folyt.) Ha ezt megtesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i-ket.

Minden $i = 0, \cdots, \alpha\omega$ indexre létezik egy K_i, ω méretű klikk, amely nem metszi C_i-t.

Ha nem így lenne, akkor a $V(G) \setminus C_i$ által feszített G' részgráfjára a G-nek, $\omega(G') < \omega$ teljesülne, tehát ki lehetne színezni $(\omega - 1)$ színnel.

Bizonyítás

(folyt.) Ha ezt megtesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i-ket.

Minden $i = 0, \cdots, \alpha\omega$ indexre létezik egy K_i, ω méretű klikk, amely nem metszi C_i-t.

Ha nem így lenne, akkor a $V(G) \setminus C_i$ által feszített G' részgráfjára a G-nek, $\omega(G') < \omega$ teljesülne, tehát ki lehetne színezni $(\omega - 1)$ színnel.

Hozzávéve a C_i független halmazt, kapnánk a G-nek egy ω csúcsszínezését, ami ellentmondana annak, hogy $\chi(G) > \omega(G)$.

Bizonyítás

(folyt.) Ha ezt megtesszük a C_0 minden csúcsával, akkor megkapjuk a C_i-ket.

Minden $i = 0, \cdots, \alpha\omega$ indexre létezik egy K_i, ω méretű klikk, amely nem metszi C_i-t.

Ha nem így lenne, akkor a $V(G) \setminus C_i$ által feszített G' részgráfjára a G-nek, $\omega(G') < \omega$ teljesülne, tehát ki lehetne színezni $(\omega - 1)$ színnel.

Hozzávéve a C_i független halmazt, kapnánk a G-nek egy ω csúcsszínezését, ami ellentmondana annak, hogy $\chi(G) > \omega(G)$.

Másrészt $|K_j \cap C_i| = 1$ ha i és j különböző indexek $\{0, \cdots, \alpha\omega\}$ -ből. Ez abból a tényből következik, hogy egy teljes és egy üres részgráf metszete legfeljebb 1 elemű, viszont tudjuk, hogy K_j egy kivételével (ez a C_j) metsz minden C_i-t.

Bizonyítás

(folyt.) Tekintsük az $(\alpha\omega + 1) \times n$ *-es* M *és* N *illeszkedési mátrixokat! Az* M *általános eleme* m_{ij} *pontosan akkor 1, ha* $j \in C_i$*, egyébként 0; míg az* N *általános eleme* n_{ij} *pontosan akkor 1, ha* $j \in K_i$*, egyébként 0.*

Bizonyítás

(folyt.) Tekintsük az $(\alpha\omega + 1) \times n$ -es M és N illeszkedési mátrixokat! Az M általános eleme m_{ij} pontosan akkor 1, ha $j \in C_i$, egyébként 0; míg az N általános eleme n_{ij} pontosan akkor 1, ha $j \in K_i$, egyébként 0.

A fenti megállapítások szerint $MN^T = J - I$, ahol a J az $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ -es csupa 1-et tartalmazó mátrixot jelöli, az I pedig az $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$-es egységmátrixot.

Bizonyítás

(folyt.) Tekintsük az $(\alpha\omega + 1) \times n$ *-es M és N illeszkedési mátrixokat! Az M általános eleme* m_{ij} *pontosan akkor 1, ha* $j \in C_i$*, egyébként 0; míg az N általános eleme* n_{ij} *pontosan akkor 1, ha* $j \in K_i$*, egyébként 0.*

A fenti megállapítások szerint $MN^T = J - I$*, ahol a J az* $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$ *-es csupa 1-et tartalmazó mátrixot jelöli, az I pedig az* $(\alpha\omega + 1) \times (\alpha\omega + 1)$*-es egységmátrixot.*

Mivel a $J - I$ *rangja* $(\alpha\omega + 1)$*, az* $n \geq \alpha\omega + 1$. *Ez azonban ellentmond a kiindulási feltételnek.*

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963

Sok kitűnő kutató munkájára építve egy igazi összefogás végül még Berge életében az erősebb állítással is megbirkózott.

Tétel (Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas, 2006)

G perfekt $\Leftrightarrow$ *G-ben nincs háromnál hosszabb páratlan kör vagy annak komplementere feszített részgráfként.*

A tétel igazolta egy színezési tulajdonság és bizonyos feszített részgráfok hiányának ekvivalenciáját. A kutatócsoport tagjai egyébként is a hasonló szerkezetű tételek leghíresebb kutatói.

Tartalomjegyzék:

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963

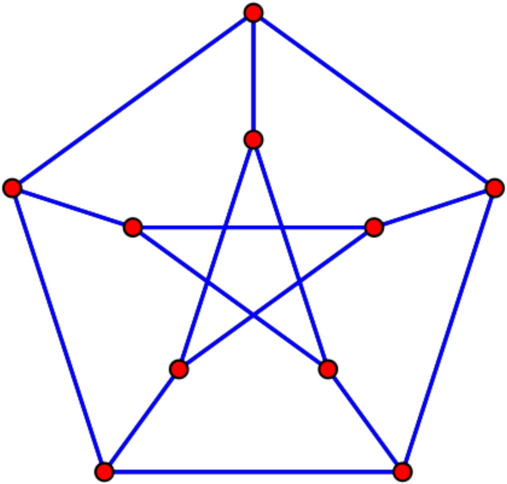
A páratlan körök kitüntetett szerepe már a Brooks-tételnél megjelent. A teljes gráf mellett ez a másik kivétel, jó kiszínezéséhez nem elég maximális fokszámnyi szín.

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963

A páratlan körök kitüntetett szerepe már a Brooks-tételnél megjelent. A teljes gráf mellett ez a másik kivétel, jó kiszínezéséhez nem elég maximális fokszámnyi szín.
Egy érdekes állítás azt mondja, csak ha nagyon átszövik a gráfot a páratlan körök, akkor nagy a gráf kromatikus száma.

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963

A páratlan körök kitüntetett szerepe már a Brooks-tételnél megjelent. A teljes gráf mellett ez a másik kivétel, jó kiszínezéséhez nem elég maximális fokszámnyi szín.
Egy érdekes állítás azt mondja, csak ha nagyon átszövik a gráfot a páratlan körök, akkor nagy a gráf kromatikus száma. Milyen hosszú páratlan körök vannak a Petersen-gráfban? A szimmetria miatt minden csúcson ugyanannyi páratlan kör megy keresztül! Számoljuk meg, a Petersen-gráfban hány páratlan kör megy keresztül egy-egy csúcson?



Páratlan körök, felső becslés

Tétel

Ha a G gráf minden csúcsa legfeljebb k páratlan kör eleme, akkor $\chi(G) \leq \lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \rceil$.

Páratlan körök, felső becslés

Tétel

Ha a G gráf minden csúcsa legfeljebb k páratlan kör eleme, akkor $\chi(G) \leq \lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \rceil$.

Bizonyítás

Ha nincs is páratlan kör G-ben, valóban a 2 pontos becslés. Ha $k = 1$*, akkor addig, amíg egyik csúcs sem tartalmaz egynél több kört nem lesz nagyobb* $\chi(G)$ *háromnál az állítás szerint. Már ez is érdekes.*

Páratlan körök, felső becslés

Tétel

Ha a G gráf minden csúcsa legfeljebb k páratlan kör eleme, akkor $\chi(G) \leq \lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \rceil$.

Bizonyítás

Ha nincs is páratlan kör G-ben, valóban a 2 pontos becslés. Ha $k = 1$, *akkor addig, amíg egyik csúcs sem tartalmaz egynél több kört nem lesz nagyobb* $\chi(G)$ *háromnál az állítás szerint. Már ez is érdekes.*

Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ *és legyen* $t = \lceil \frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \rceil$.
Alkalmazzunk indukciót a G n rendjére.
Könnyű elindulnunk, mert amíg az n nem haladja meg a t-t, addig az egyenlőtlenség triviálisan teljesül.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére:
Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére:
Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Legyen G egy (n+1) rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van.
Megmutatjuk, hogy $\chi(G) \leq t$.
Legyen v a G egy csúcsa.
Ekkor $G \setminus v$-re teljesülnek a feltételek, vagyis t színnel kiszínezhető.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére:
Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Legyen G egy (n+1) rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van.
Megmutatjuk, hogy $\chi(G) \leq t$.
Legyen v a G egy csúcsa.
Ekkor $G \setminus v$-re teljesülnek a feltételek, vagyis t színnel kiszínezhető.

$\frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \leq t$, *amiből* $k \leq \frac{t^2-t-2}{2} = \binom{t}{2} - 1$ *adódik.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére:
Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Legyen G egy (n+1) rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van.
Megmutatjuk, hogy $\chi(G) \leq t$.
Legyen v a G egy csúcsa.
Ekkor $G \setminus v$-re teljesülnek a feltételek, vagyis t színnel kiszínezhető.

$\frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \leq t$, *amiből* $k \leq \frac{t^2-t-2}{2} = \binom{t}{2} - 1$ *adódik.*

A $\binom{t}{2}$ *színpár közül van legalább 1 pár (pl. (piros, kék)), amely nem fordult elő, mint a v szomszédai valamely páratlan körben.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevésünk $n \geq t$ esetére:
Ha H n rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van, akkor $\chi(H) \leq t$.

Legyen G egy (n+1) rendű gráf és mindegyik csúcsa legfeljebb k páratlan körben van.
Megmutatjuk, hogy $\chi(G) \leq t$.
Legyen v a G egy csúcsa.
Ekkor $G \setminus v$-re teljesülnek a feltételek, vagyis t színnel kiszínezhető.

$\frac{\sqrt{8k+9}+1}{2} \leq t$, *amiből* $k \leq \frac{t^2-t-2}{2} = \binom{t}{2} - 1$ *adódik.*

A $\binom{t}{2}$ színpár közül van legalább 1 pár (pl. (piros, kék)), amely nem fordult elő, mint a v szomszédai valamely páratlan körben.

Legyen G' a $G \setminus v$ azon részgráfja, amelyet a piros és kék pontok feszítenek ki.

Bizonyítás

(folyt.)
G' páros gráf!

Bizonyítás

(folyt.)
G' páros gráf!

Ha a G'-ben nincs olyan piros pont, amelynek szomszédja v a G-ben, akkor a v-t pirosra színezhetjük és nem kell új szín, az egyenlőtlenség G-re is teljesül.

Bizonyítás

(folyt.)
G' páros gráf!

Ha a G'-ben nincs olyan piros pont, amelynek szomszédja v a G-ben, akkor a v-t pirosra színezhetjük és nem kell új szín, az egyenlőtlenség G-re is teljesül.

Vegyük a G' azon komponenseit, amelyekben van piros szomszédja v-nek.
Állítjuk, hogy ezekben a komponensekben nincs v-nek kék szomszédja!

Bizonyítás

(folyt.)
G' páros gráf!

Ha a G'-ben nincs olyan piros pont, amelynek szomszédja v a G-ben, akkor a v-t pirosra színezhetjük és nem kell új szín, az egyenlőtlenség G-re is teljesül.

Vegyük a G' azon komponenseit, amelyekben van piros szomszédja v-nek.
Állítjuk, hogy ezekben a komponensekben nincs v-nek kék szomszédja!

Ellenkező esetben menne a komponensben egy piros szomszédtól egy kék szomszédig út, amely páratlan hosszú.
Kiegészítve még a v-ből kiinduló csatlakozó 1-1 éllel egy páratlan kört kapnánk.

Bizonyítás

(folyt.) Ez azonban egy olyan kör lenne, amelyben a v-nek éppen van egy (piros, kék) szomszédpárja, amit feltettünk, hogy nem lehet.
Tehát egyik komponensben sincs v-nek kék szomszédja.
Így a komponensekben felcserélve a piros és kék színeket, az új színezés már olyan, hogy a v-nek nincs piros szomszédja.
Így kiterjeszthető a v-re a színezés, nem kell több szín.
Tehát $\chi(G) \leq t$.

Bizonyítás

(folyt.) Ez azonban egy olyan kör lenne, amelyben a v-nek éppen van egy (piros, kék) szomszédpárja, amit feltettünk, hogy nem lehet.
Tehát egyik komponensben sincs v-nek kék szomszédja.
Így a komponensekben felcserélve a piros és kék színeket, az új színezés már olyan, hogy a v-nek nincs piros szomszédja.
Így kiterjeszthető a v-re a színezés, nem kell több szín.
Tehát $\chi(G) \leq t$.

Keressünk olyan gráfokat, amelyekre az egyenlőtlenség éles!

Berge erős perfekt gráf sejtése, 1963

A valóban perfekt gráfok tanulmányozása a hatvanas években Berge sejtései miatt is gyorsabban folytatódott. Még mielőtt bármelyik kérdés pozitívan eldőlt volna, máris különböző speciális tulajdonságú gráfokat vizsgáltak meg, vajon perfektek-e? Több, nagyon fontos gráfosztályról kiderült nem csak az, hogy perfekt gráfokat tartalmaz, hanem az is, hogy mindezt még a fogalom megszületése előtt bizonyították!

Tétel (Chudnovsky, Robertson, Seymour és Thomas, 2006)

G perfekt $\Leftrightarrow$ G-ben nincs háromnál hosszabb páratlan kör vagy annak komplementere feszített részgráfként.

Mielőtt az előbbi tétel feltette az I-re a pontot sok szép eredmény megszületett.

Intervallumgráfok

Bizonyos gráfoknak létezik metszet reprezentációja. Ha $\mathcal{S}$ egy halmaz, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$ egy halmazrendszer, akkor $\mathcal{F}$ meghatároz egy gráfot.

Intervallumgráfok

Bizonyos gráfoknak létezik metszet reprezentációja. Ha $\mathcal{S}$ egy halmaz, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$ egy halmazrendszer, akkor $\mathcal{F}$ meghatároz egy gráfot.

A csúcsok az $\mathcal{F}$ elemei, valamint két elemet pontosan akkor köt össze él, ha metszetük nem üres.

Intervallumgráfok

Bizonyos gráfoknak létezik metszet reprezentációja. Ha $\mathcal{S}$ egy halmaz, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{S})$ egy halmazrendszer, akkor $\mathcal{F}$ meghatároz egy gráfot.

A csúcsok az $\mathcal{F}$ elemei, valamint két elemet pontosan akkor köt össze él, ha metszetük nem üres.

Ha a G gráf előáll mint egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer metszetgráfja, akkor a G reprezentálható.

Definíció

A számegyenes intervallumainak valamely rendszere által meghatározott metszetgráfokat **intervallum gráfoknak** *nevezzük.*

Feladat

Vajon különböznek-e a nyitott intervallumokkal meghatározott intervallumgáfok?

Feladat

Vajon különböznek-e a nyitott intervallumokkal meghatározott intervallumgáfok?

És ha csak zárt intervallumokat engedünk meg?

Feladat

Vajon különböznek-e a nyitott intervallumokkal meghatározott intervallumgáfok?

És ha csak zárt intervallumokat engedünk meg?

Bővebb-e a tetszőleges intervallumok által reprezentált gráfok halmaza, az 1 hosszúságú intervallumoktól?

Feladat

Vajon különböznek-e a nyitott intervallumokkal meghatározott intervallumgáfok?

És ha csak zárt intervallumokat engedünk meg?

Bővebb-e a tetszőleges intervallumok által reprezentált gráfok halmaza, az 1 hosszúságú intervallumoktól?

Milyen gráfokat lehet nem tartalmazkodó intervallumokkal reprezentálni?

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A kérdés az, hány terembe helyezhetők el a kurzusok. A termek állandóan rendelkezésre állnak.

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A kérdés az, hány terembe helyezhetők el a kurzusok. A termek állandóan rendelkezésre állnak.

Ez egy intervallumgráf színezési problémája.

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A kérdés az, hány terembe helyezhetők el a kurzusok. A termek állandóan rendelkezésre állnak.

Ez egy intervallumgráf színezési problémája.

Egy színosztály független csúcsokat tartalmaz, az ezeknek megfelelő intervallumok nem metszik egymást. Ők egy terembe kerülhetnek.

A bevezetőben említett kurzus elhelyezési problémát egyszerűsítsük le.

Adottak a kurzusok időintervallumai, amelyek rögzítettek.

A kérdés az, hány terembe helyezhetők el a kurzusok. A termek állandóan rendelkezésre állnak.

Ez egy intervallumgráf színezési problémája.

Egy színosztály független csúcsokat tartalmaz, az ezeknek megfelelő intervallumok nem metszik egymást. Ők egy terembe kerülhetnek.

Ha a kromatikus számát ismerjük, akkor megtudjuk legkevesebb hány teremre van szükség.

Állítás

Ha G intervallumgráf, $G' \subseteq G$, akkor G' is intervallumgráf.

Definíció

G háromszögezett gráf, ha bármely legalább 4 hosszú körében van átló.

Állítás

Ha G intervallumgráf, akkor G háromszögezett gráf.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Ha pl. az I_2-től az I_1 balra esik, akkor a metszéspontjaik is balra esnek az I_2 és I_3 metszéspontjaiktól.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Ha pl. az I_2-től az I_1 balra esik, akkor a metszéspontjaik is balra esnek az I_2 és I_3 metszéspontjaiktól.

Ha a körön tovább megyünk, akkor a szomszédos csúcsokhoz tartozó intervallumok metszéspontjai mindig jobbra kerülnek.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Ha pl. az I_2-től az I_1 balra esik, akkor a metszéspontjaik is balra esnek az I_2 és I_3 metszéspontjaiktól.

Ha a körön tovább megyünk, akkor a szomszédos csúcsokhoz tartozó intervallumok metszéspontjai mindig jobbra kerülnek.

Azonban egy körön haladunk, így nem tud bezáródni, az I_1-et balról nem tudja metszeni egyik intervallum sem.

Bizonyítás

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy a G intervallumgráfnak van olyan legalább négy hosszú C köre, amelyben nincs átló.

Ha v_1, v_2, v_3 ebben a sorrendben a C egymást követő csúcsai, akkor a nekik megfelelő I_1, I_2, I_3 intervallumok közül az I_2 metszi a másik kettőt, azonban az I_1, I_3 nem metszők.

Ha pl. az I_2-től az I_1 balra esik, akkor a metszéspontjaik is balra esnek az I_2 és I_3 metszéspontjaiktól.

Ha a körön tovább megyünk, akkor a szomszédos csúcsokhoz tartozó intervallumok metszéspontjai mindig jobbra kerülnek.

Azonban egy körön haladunk, így nem tud bezáródni, az I_1-et balról nem tudja metszeni egyik intervallum sem.

Ez ellentmondás.

Egy G(V,E) gráf összehasonlítási gráf (vagy tranzitívan irányítható gráf), ha létezik az éleinek olyan G(V,A) irányítása - az egyik irányban -, melyre bármely $u, v, w \in V$ esetén, ha $(u, v), (v.w) \in A$, akkor $(u, w) \in A$.

Egy G(V,E) gráf összehasonlítási gráf (vagy tranzitívan irányítható gráf), ha létezik az éleinek olyan G(V,A) irányítása - az egyik irányban -, melyre bármely $u, v, w \in V$ esetén, ha $(u, v), (v.w) \in A$, akkor $(u, w) \in A$.

A feltétel szerint az $(u, w) \in A$ azt is jelenti, hogy létezik él a két pont között; csak akkor lehet jól irányítani!

Állítás (Ghouila-Houri, 1962)

Egy intervallumgráf komplementere tranzitívan irányítható.

Bizonyítás

A G intervallumgráfban ha $\{u, v\} \notin E$*, akkor a neki megfelelő* I_u *és* I_v *intervallumokra pl.* I_u *balra van a másiktól.*

Bizonyítás

A G intervallumgráfban ha $\{u, v\} \notin E$*, akkor a neki megfelelő* I_u *és* I_v *intervallumokra pl.* I_u *balra van a másiktól.*

Irányítsuk a G komplementerében az $(u, v) \in A$ *élt.*

Bizonyítás

A G intervallumgráfban ha $\{u, v\} \notin E$*, akkor a neki megfelelő* I_u *és* I_v *intervallumokra pl.* I_u *balra van a másiktól.*

Irányítsuk a G komplementerében az $(u, v) \in A$ *élt.*

Ha az I_u*,* I_v *és* I_w *az egyenesen diszjunktak és balról jobbra sorakoznak, akkor* $(u, v) \in A$ *és* $(v, w) \in A$ *esetén* $(u, w) \in A$*.*

Tétel (Gilmore - Hoffman, 1964)

G irányítatlan gráf.

Tétel (Gilmore - Hoffman, 1964)

G irányítatlan gráf.

A következő állítások ekvivalensek:

Tétel (Gilmore - Hoffman, 1964)

G irányítatlan gráf.

A következő állítások ekvivalensek:

(i) G intervallumgráf.

Tétel (Gilmore - Hoffman, 1964)

G irányítatlan gráf.

A következő állítások ekvivalensek:

(i) G intervallumgráf.

(ii) G nem tartalmaz legalább 4 hosszú, átlómentes kört és a komplementere összehasonlítási gráf.

Tétel (Gilmore - Hoffman, 1964)

G irányítatlan gráf.

A következő állítások ekvivalensek:

(i) G intervallumgráf.

(ii) G nem tartalmaz legalább 4 hosszú, átlómentes kört és a komplementere összehasonlítási gráf.

(iii) A G maximális klikkjeit lineárisan rendezni lehet oly módon, hogy bármely u csúcsra az u-t tartalmazó maximális klikkek egymást követően állnak.

Bizonyítás

$(i) \Rightarrow (ii)$

Az előző két bebizonyított állítás éppen ezt mondta ki.

Bizonyítás

$(i) \Rightarrow (ii)$
Az előző két bebizonyított állítás éppen ezt mondta ki.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
Tegyük fel, hogy a $\overline{G}(V,E)$ *gráf nem tartalmaz háromnál hosszabb kört és legyen F a* $\overline{G}$ *éleinek egy tranzitív irányítása.*

Lemma

Legyenek A_1 és A_2 G maximális klikkjei.

Lemma

Legyenek A_1 és A_2 G maximális klikkjei.

Minden A_1 és A_2 közötti él G komplementerében azonosan van F által irányítva.

Bizonyítás

Van él A_1 és A_2 között a komplementerben, egyébként az uniójuk nagyobb klikk lenne G-ben.

Lemma

Legyenek A_1 és A_2 G maximális klikkjei.

Minden A_1 és A_2 közötti él G komplementerében azonosan van F által irányítva.

Bizonyítás

Van él A_1 és A_2 között a komplementerben, egyébként az uniójuk nagyobb klikk lenne G-ben.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $(a, b), (d, c) \in F$, $a, c \in A_1$ és $b, d \in A_2$.

Lemma

Legyenek A_1 és A_2 G maximális klikkjei.

Minden A_1 és A_2 közötti él G komplementerében azonosan van F által irányítva.

Bizonyítás

Van él A_1 és A_2 között a komplementerben, egyébként az uniójuk nagyobb klikk lenne G-ben.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy $(a, b), (d, c) \in F$, $a, c \in A_1$ és $b, d \in A_2$.

Ha az a és c vagy a b és d azonos lenne, akkor a tranzitivitással ez ellentmondana, hiszen az egyik klikk csúcsai között a komplementerben is kellene, hogy legyen él.

Bizonyítás

(a lemma bizonyításának folyt.)
Tegyük fel, hogy mind a négy csúcs más.

Bizonyítás

(a lemma bizonyításának folyt.)
Tegyük fel, hogy mind a négy csúcs más.

Az nem lehet, hogy $\{a, d\}$ *és* $\{b, c\}$ *is E-ben legyen, mert akkor kialakulna egy feszített 4-kör G-ben.*

Bizonyítás

(a lemma bizonyításának folyt.)
Tegyük fel, hogy mind a négy csúcs más.

Az nem lehet, hogy $\{a, d\}$ *és* $\{b, c\}$ *is* E*-ben legyen, mert akkor kialakulna egy feszített 4-kör* G*-ben.*

Feltehetjük, hogy pl. $\{a, d\}$ *a komplementerben él. Azonban az* F *akármelyik irányítást is adta az élnek a tranzitivitással ellentmondásba kerülünk.*

Bizonyítás

(a lemma bizonyításának folyt.)
Tegyük fel, hogy mind a négy csúcs más.

Az nem lehet, hogy $\{a, d\}$ *és* $\{b, c\}$ *is E-ben legyen, mert akkor kialakulna egy feszített 4-kör G-ben.*

Feltehetjük, hogy pl. $\{a, d\}$ *a komplementerben él. Azonban az F akármelyik irányítást is adta az élnek a tranzitivitással ellentmondásba kerülünk.*

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)

A G maximális klikkjei között tekintsük a következő rendezést:

$A_1 \prec A_2 \Leftrightarrow$ *Ha az F szerint létezik A_1-ből az A_2-be mutató él.*

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
A G maximális klikkjei között tekintsük a következő rendezést:
$A_1 < A_2 \Leftrightarrow$ *Ha az F szerint létezik* A_1*-ből az* A_2*-be mutató él.*

A klikkek között ez az irányítás a lemma miatt teljes, másrészt pedig tranzitív.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
A G maximális klikkjei között tekintsük a következő rendezést:
$A_1 \prec A_2 \Leftrightarrow$ *Ha az F szerint létezik A_1-ből az A_2-be mutató él.*

A klikkek között ez az irányítás a lemma miatt teljes, másrészt pedig tranzitív.

Valóban, ha $A_1 \prec A_2$ és $A_2 \prec A_3$, akkor léteznek a $(w, x), (y, z) \in F$ élek, $w \in A_1$, $x, y \in A_2$, $z \in A_3$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
A G maximális klikkjei között tekintsük a következő rendezést:
$A_1 < A_2 \Leftrightarrow$ *Ha az F szerint létezik* A_1*-ből az* A_2*-be mutató él.*

A klikkek között ez az irányítás a lemma miatt teljes, másrészt pedig tranzitív.

Valóban, ha $A_1 < A_2$ *és* $A_2 < A_3$*, akkor léteznek a* $(w, x), (y, z) \in F$ *élek,* $w \in A_1$*,* $x, y \in A_2$*,* $z \in A_3$*.*

Ha vagy w és y között vagy x és z között G-ben nincs él, akkor a komplementerben az irányításuk adódik és a $(w, z) \in F$ *következik.*

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_t$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_t$.

Tegyük most fel, hogy a még igazolandó tulajdonság nem teljesül, vagyis léteznek $A_i \prec A_j \prec A_k$ *klikkek, melyekre valamely x csúcsra* $x \in A_i$, $x \notin A_j$, *és* $x \in A_k$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_t$.

Tegyük most fel, hogy a még igazolandó tulajdonság nem teljesül, vagyis léteznek $A_i \prec A_j \prec A_k$ *klikkek, melyekre valamely* x *csúcsra* $x \in A_i$, $x \notin A_j$, *és* $x \in A_k$.

Mivel $x \notin A_j$, *létezik olyan* $y \in A_j$, *amelyre* $\{y, x\} \notin E$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G*-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör* $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_t$.

Tegyük most fel, hogy a még igazolandó tulajdonság nem teljesül, vagyis léteznek $A_i \prec A_j \prec A_k$ *klikkek, melyekre valamely* x *csúcsra* $x \in A_i$, $x \notin A_j$, *és* $x \in A_k$.

Mivel $x \notin A_j$, *létezik olyan* $y \in A_j$, *amelyre* $\{y, x\} \notin E$.

De $A_i \prec A_j$ *-ből az jön, hogy* $(x, y) \in F$, *míg* $A_j \prec A_k$ *-ből az jön, hogy* $(y, x) \in F$.

Bizonyítás

(a tétel bizonyításának folyt.)
Feltehetjük tehát, hogy $\{w, y\}, \{x, z\}, \{x, y\} \in E$.

Mivel G-ben nem lehet átlómentes 4 hosszú kör $\{w, z\} \notin E$ *és* $(w, z) \in F$.

Ebből adódik, hogy $A_1 \prec A_3$.

Feltehetjük tehát, hogy az összes klikket rendeztük, $A_1 \prec A_2 \prec \cdots \prec A_t$.

Tegyük most fel, hogy a még igazolandó tulajdonság nem teljesül, vagyis léteznek $A_i \prec A_j \prec A_k$ *klikkek, melyekre valamely x csúcsra* $x \in A_i$, $x \notin A_j$, *és* $x \in A_k$.

Mivel $x \notin A_j$, *létezik olyan* $y \in A_j$, *amelyre* $\{y, x\} \notin E$.

De $A_i \prec A_j$ *-ből az jön, hogy* $(x, y) \in F$, *míg* $A_j \prec A_k$ *-ből az jön, hogy* $(y, x) \in F$.
Ez ellentmondás.

Bizonyítás

(folyt.) (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)
Rendeljük hozzá minden $u \in V(G)$ *csúcshoz az őt tartalmazó klikkek K(u) halmazát.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
Rendeljük hozzá minden $u \in V(G)$ *csúcshoz az őt tartalmazó klikkek K(u) halmazát.*

A $K(u)$ *klikkhalmaz felfogható a sorbarendezett klikkek egy intervallumának is.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
Rendeljük hozzá minden $u \in V(G)$ *csúcshoz az őt tartalmazó klikkek K(u) halmazát.*

A $K(u)$ *klikkhalmaz felfogható a sorbarendezett klikkek egy intervallumának is.*

A $K(u)$ *és* $K(v)$ *a klikk-intervallumok ugyanakkor metszik egymást, amikor van olyan klikk amelyik mindkettőjüket tartalmazza.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
Rendeljük hozzá minden $u \in V(G)$ *csúcshoz az őt tartalmazó klikkek K(u) halmazát.*

A $K(u)$ *klikkhalmaz felfogható a sorbarendezett klikkek egy intervallumának is.*

A $K(u)$ *és* $K(v)$ *a klikk-intervallumok ugyanakkor metszik egymást, amikor van olyan klikk amelyik mindkettőjüket tartalmazza.*

Másrészt u és v pontosan akkor van összekötve éllel, amikor létezik olyan klikk, amelyben mindketten benne vannak.

Merev körű gráfok

A merev körű, átlós vagy háromszögezett gráfokra megismertünk egy szűkebb gráfosztályt, az intervallumgráfokat.

Merev körű gráfok

A merev körű, átlós vagy háromszögezett gráfokra megismertünk egy szűkebb gráfosztályt, az intervallumgráfokat.

A merev körű tulajdonság szintén öröklődő, tehát ha egy G gráfnak nem létezik 3-nál hosszabb feszített köre, akkor ez minden feszített részgráfjára is igaz.

Definíció

Egy G gráf x csúcsát szimpliciális csúcsnak nevezzük, ha az x szomszédai páronként szomszédosak egymással is.

Merev körű gráfok

A merev körű, átlós vagy háromszögezett gráfokra megismertünk egy szűkebb gráfosztályt, az intervallumgráfokat.

A merev körű tulajdonság szintén öröklődő, tehát ha egy G gráfnak nem létezik 3-nál hosszabb feszített köre, akkor ez minden feszített részgráfjára is igaz.

Definíció

Egy G gráf x csúcsát szimpliciális csúcsnak nevezzük, ha az x szomszédai páronként szomszédosak egymással is.

Másképpen mondva az x nyitott és zárt szomszédsága is teljes gráf.

Dirac Gábor Endre (1961) igazolta, hogy egy merev körű gráfnak mindig van (legalább kettő) szimpliciális csúcsa.

Merev körű gráfok

A merev körű, átlós vagy háromszögezett gráfokra megismertünk egy szűkebb gráfosztályt, az intervallumgráfokat.

A merev körű tulajdonság szintén öröklődő, tehát ha egy G gráfnak nem létezik 3-nál hosszabb feszített köre, akkor ez minden feszített részgráfjára is igaz.

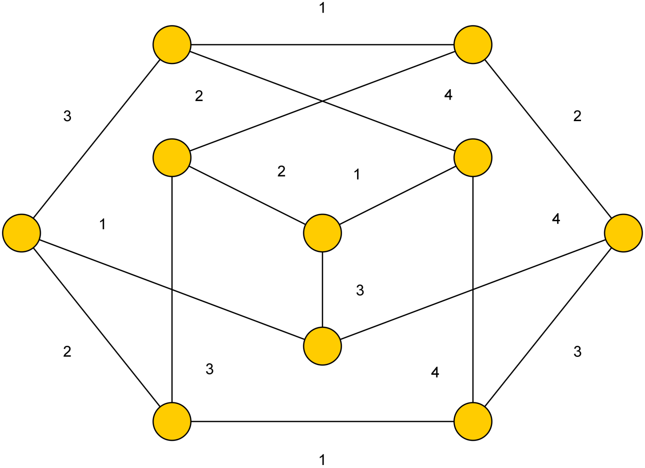
Definíció

Egy G gráf x csúcsát szimpliciális csúcsnak nevezzük, ha az x szomszédai páronként szomszédosak egymással is.

Másképpen mondva az x nyitott és zárt szomszédsága is teljes gráf.

Dirac Gábor Endre (1961) igazolta, hogy egy merev körű gráfnak mindig van (legalább kettő) szimpliciális csúcsa.

Vegyük észre mennyire hasonlít ez az állítás ahhoz, miszerint a fáknak van legalább két levele.


1
2
4
3
2
2
1
1
4
3
2
3
4
3
1

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Csakúgy, mint ahogyan a fákat lebonthatjuk egymás után törölve egy-egy levélpontot, a merev körű gráfokra is létezik ilyen lebontás.

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Csakúgy, mint ahogyan a fákat lebonthatjuk egymás után törölve egy-egy levélpontot, a merev körű gráfokra is létezik ilyen lebontás.

Kiválasztjuk egyik szimpliciális csúcsát és töröljük.

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Csakúgy, mint ahogyan a fákat lebonthatjuk egymás után törölve egy-egy levélpontot, a merev körű gráfokra is létezik ilyen lebontás.

Kiválasztjuk egyik szimpliciális csúcsát és töröljük.

Ha egyszer nem találunk szimpliciális csúcsot, akkor nem merevkörű a gráf.

Szimpliciális csúcsok.

Mivel a fáknak, erdőknek nincs is körük, így merevkörű gráfok.

Egy izolált csúcs szimpliciális, egy levél 1-fokú csúcsa szintén az.

Csakúgy, mint ahogyan a fákat lebonthatjuk egymás után törölve egy-egy levélpontot, a merev körű gráfokra is létezik ilyen lebontás.

Kiválasztjuk egyik szimpliciális csúcsát és töröljük.

Ha egyszer nem találunk szimpliciális csúcsot, akkor nem merevkörű a gráf.

Másrészt ha az eljárást végig folytathatjuk, akkor biztosan merev körű a gráf.

Definíció

Legyen G(V,E) irányítatlan gráf és az $o = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ *egy rendezése a csúcsoknak.*

Definíció

Legyen G(V,E) irányítatlan gráf és az $o = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ *egy rendezése a csúcsoknak.*

Az o rendezést perfekt eliminációs sémának nevezzük, ha mindegyik v_i *a* $[v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n]$ *csúcsok által feszített gráfnak egy szimpliciális csúcsa.*

Definíció

G-ben u és v nem szomszédos csúcsok.

Definíció

Legyen G(V,E) irányítatlan gráf és az $o = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ *egy rendezése a csúcsoknak.*

Az o rendezést perfekt eliminációs sémának nevezzük, ha mindegyik v_i *a* $[v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n]$ *csúcsok által feszített gráfnak egy szimpliciális csúcsa.*

Definíció

G-ben u és v nem szomszédos csúcsok.

Az $S \subset V(G)$ *az u és v csúcsokat szeparáló minimális ponthalmaz, ha egyrészt elhagyásával az u és a v különböző komponensekbe kerülnek, másrészt nincs* $S' \subset S$ *ugyanezzel a tulajdonsággal.*

Tétel

G irányítatlan gráf.

Tétel

G irányítatlan gráf.

A következők ekvivalensek:

Tétel

G irányítatlan gráf.

A következők ekvivalensek:

(i) G merevkörű.

Tétel

G irányítatlan gráf.

A következők ekvivalensek:

(i) G merevkörű.

(ii) G-nek van eliminációs sémája, sőt bármely szimpliciális csúcs lehet az első csúcs.

Tétel

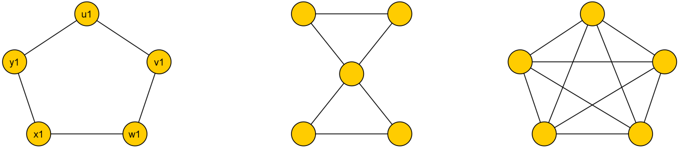
G irányítatlan gráf.

A következők ekvivalensek:

(i) G merevkörű.

(ii) G-nek van eliminációs sémája, sőt bármely szimpliciális csúcs lehet az első csúcs.

(iii) G minden S minimális szeparáló halmaza teljes gráfot feszít G-ben.


u1
v1
w1
x1
y1

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$

Ha veszünk egy legalább 4 hosszú kör két nem szomszédos csúcsát, akkor őket szeparálni S csak úgy tudja, ha mindkét keletkezett ívről egy-egy csúcs belekerül S-be.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$

Ha veszünk egy legalább 4 hosszú kör két nem szomszédos csúcsát, akkor őket szeparálni S csak úgy tudja, ha mindkét keletkezett ívről egy-egy csúcs belekerül S-be.

(iii) szerint ez a két csúcs össze van kötve, tehát a körnek egy átlója.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$

Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$

Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$
Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U és G_V-beli csúccsal.

Bizonyítás

(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)
Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U *és* G_V *az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.*

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U *és* G_V*-beli csúccsal.*

Ha tehát $x, y \in S$ *különböző csúcsok, akkor vegyünk egy legrövidebb utat x-től y-ig a* G_U *érintésével, illetve hasonlóan egy legrövidebb utat a* G_V *érintésével.*

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$
Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U és G_V-beli csúccsal.

Ha tehát $x, y \in S$ különböző csúcsok, akkor vegyünk egy legrövidebb utat x-től y-ig a G_U érintésével, illetve hasonlóan egy legrövidebb utat a G_V érintésével.

A két út együtt egy legalább 4 csúcsú kör és nincs a G_U-n belül sem egy él ami átlója lenne a minimalitás miatt, és hasonlón nincs a G_V-n belül sem.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$
Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U és G_V-beli csúccsal.

Ha tehát $x, y \in S$ különböző csúcsok, akkor vegyünk egy legrövidebb utat x-től y-ig a G_U érintésével, illetve hasonlóan egy legrövidebb utat a G_V érintésével.

A két út együtt egy legalább 4 csúcsú kör és nincs a G_U-n belül sem egy él ami átlója lenne a minimalitás miatt, és hasonlón nincs a G_V-n belül sem.

Természetesen nem lehet él a két komponens csúcsai között sem.

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (i)$

Tegyük fel, hogy S egy minimális u-v elválasztó halmaz.

Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Mivel az S minimális, minden eleme szomszédos valamely G_U és G_V-beli csúccsal.

Ha tehát $x, y \in S$ különböző csúcsok, akkor vegyünk egy legrövidebb utat x-től y-ig a G_U érintésével, illetve hasonlóan egy legrövidebb utat a G_V érintésével.

A két út együtt egy legalább 4 csúcsú kör és nincs a G_U-n belül sem egy él ami átlója lenne a minimalitás miatt, és hasonlón nincs a G_V-n belül sem.

Természetesen nem lehet él a két komponens csúcsai között sem.

Így az átlósság miatt x és y szomszédos. Tehát S teljes.

Dirac tétele

Lemma (Dirac, 1961)

Minden merev körű G gráfnak van szimpliciális csúcsa.

Dirac tétele

Lemma (Dirac, 1961)

Minden merev körű G gráfnak van szimpliciális csúcsa.

Ha G nem teljes, akkor van két, nem szomszédos szimpliciális csúcsa.

Bizonyítás

G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Bizonyítás

G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Bizonyítás

G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel, hogy u és v a G nem szomszédos csúcsai és már minden kevesebb csúcsú gráfra tudjuk, hogy az állítás igaz.

Bizonyítás

G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel, hogy u és v a G nem szomszédos csúcsai és már minden kevesebb csúcsú gráfra tudjuk, hogy az állítás igaz.

Legyen az S egy minimális u-v elválasztó halmaz. Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező, u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Bizonyítás

G rendjére vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Tegyük fel, hogy u és v a G nem szomszédos csúcsai és már minden kevesebb csúcsú gráfra tudjuk, hogy az állítás igaz.

Legyen az S egy minimális u-v elválasztó halmaz. Legyen G_U és G_V az S elhagyása után keletkező, u-t és v-t tartalmazó két komponens.

Az indukció erejével $G_{U \cup S}$ tartalmaz két nem szomszédos, benne szimpliciális csúcsot.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)
Az egyiknek a G_U-ban kell lennie, mert az S teljes gráfot feszít, tehát abban két csúcs szomszédos.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)
Az egyiknek a G_U-ban kell lennie, mert az S teljes gráfot feszít, tehát abban két csúcs szomszédos.

Vagy a $G_{U \cup S}$ maga teljes, ekkor a G_U minden csúcsa szimpliciális a $G_{U \cup S}$-ban.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)
Az egyiknek a G_U-ban kell lennie, mert az S teljes gráfot feszít, tehát abban két csúcs szomszédos.

Vagy a $G_{U \cup S}$ maga teljes, ekkor a G_U minden csúcsa szimpliciális a $G_{U \cup S}$-ban.

Mivel $U \cup S$-be mennek csak G_U-ból élek, így ha egy csúcs szimpliciális $G_{U \cup S}$-ben az U-ból, akkor G-ben is.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)
Az egyiknek a G_U-ban kell lennie, mert az S teljes gráfot feszít, tehát abban két csúcs szomszédos.

Vagy a $G_{U \cup S}$ maga teljes, ekkor a G_U minden csúcsa szimpliciális a $G_{U \cup S}$-ban.

Mivel $U \cup S$-be mennek csak G_U-ból élek, így ha egy csúcs szimpliciális $G_{U \cup S}$-ben az U-ból, akkor G-ben is.

Hasonlóan van a B-ben is egy G-beli szimpliciális csúcs.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)

$(i) \Rightarrow (ii)$

A most bizonyított lemma szerint ha G merev körű, akkor van egy szimpliciális csúcsa, ezt elvéve a kisebb gráf szintén merev körű, így létezik egy perfekt eliminációs sémája, így az első lépéssel kiegészítve a G-nek is van.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)

$(i) \Rightarrow (ii)$

A most bizonyított lemma szerint ha G merev körű, akkor van egy szimpliciális csúcsa, ezt elvéve a kisebb gráf szintén merev körű, így létezik egy perfekt eliminációs sémája, így az első lépéssel kiegészítve a G-nek is van.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Legyen C a G egy legalább 4 hosszú köre.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)

$(i) \Rightarrow (ii)$

A most bizonyított lemma szerint ha G merev körű, akkor van egy szimpliciális csúcsa, ezt elvéve a kisebb gráf szintén merev körű, így létezik egy perfekt eliminációs sémája, így az első lépéssel kiegészítve a G-nek is van.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Legyen C a G egy legalább 4 hosszú köre.

Legyen u az első C-beli csúcs, amely benne van az eliminációs sorrendben.

Bizonyítás

(A tétel bizonyításának folytatása)

$(i) \Rightarrow (ii)$

A most bizonyított lemma szerint ha G merev körű, akkor van egy szimpliciális csúcsa, ezt elvéve a kisebb gráf szintén merev körű, így létezik egy perfekt eliminációs sémája, így az első lépéssel kiegészítve a G-nek is van.

$(ii) \Rightarrow (i)$

Legyen C a G egy legalább 4 hosszú köre.

Legyen u az első C-beli csúcs, amely benne van az eliminációs sorrendben.

Mivel u-nak a C körben van két szomszédja, így azok össze vannak kötve, tehát C-nek van átlója.

Részfa reprezentáció

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfjaként.

Részfa reprezentáció

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfjaként.

Tudjuk, hogy az intervallumgráfok a merev körű gráfok egy részosztálya.

Részfa reprezentáció

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfjaként.

Tudjuk, hogy az intervallumgráfok a merev körű gráfok egy részosztálya.

Az intervallumgráfok reprezentálhatók, mint egy út részútjainak metszetgráfjai.

Részfa reprezentáció

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfjaként.

Tudjuk, hogy az intervallumgráfok a merev körű gráfok egy részosztálya.

Az intervallumgráfok reprezentálhatók, mint egy út részútjainak metszetgráfjai.

Ennek általánosítása, ha utak helyett fákat veszünk.

Definíció

Egy T halmaz részhalmazainak $T_i \;\; i \in I$ családját Helly-tulajdonságúnak mondunk, ha $J \subseteq I$, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ minden $i, j \in J$ teljesülése esetén következik, hogy $\cap_{j \in J} T_j \neq \emptyset$.

Részfa reprezentáció

A merev körű gráfok osztálya reprezentálható egy fa részfáinak metszetgráfjaként.

Tudjuk, hogy az intervallumgráfok a merev körű gráfok egy részosztálya.

Az intervallumgráfok reprezentálhatók, mint egy út részútjainak metszetgráfjai.

Ennek általánosítása, ha utak helyett fákat veszünk.

Definíció

Egy T halmaz részhalmazainak T_i $i \in I$ családját Helly-tulajdonságúnak mondunk, ha $J \subseteq I$, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ minden $i, j \in J$ teljesülése esetén következik, hogy $\cap_{j \in J} T_j \neq \emptyset$.

Ha T egy fa, és T_i mindig egy részfája, akkor igaz a következő állítás.

Állítás

Egy fa részfáinak egy családja kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Állítás

Egy fa részfáinak egy családja kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Bizonyítás

Tehát ha tudjuk a részfák egy családjáról, hogy bármely kettő metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

Állítás

Egy fa részfáinak egy családja kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Bizonyítás

Tehát ha tudjuk a részfák egy családjáról, hogy bármely kettő metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

Kínálkozik a teljes indukció a család méretére vonatkozóan. Induló lépésünk éppen a feltétel.

Állítás

Egy fa részfáinak egy családja kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Bizonyítás

Tehát ha tudjuk a részfák egy családjáról, hogy bármely kettő metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

Kínálkozik a teljes indukció a család méretére vonatkozóan. Induló lépésünk éppen a feltétel.

Tegyük tehát fel, hogy legfeljebb k részfa esetén igaz az állítás.

Állítás

Egy fa részfáinak egy családja kielégíti a Helly-tulajdonságot.

Bizonyítás

Tehát ha tudjuk a részfák egy családjáról, hogy bármely kettő metszete nem üres, akkor az összes metszete sem üres.

Kínálkozik a teljes indukció a család méretére vonatkozóan. Induló lépésünk éppen a feltétel.

Tegyük tehát fel, hogy legfeljebb k részfa esetén igaz az állítás.

Legyenek $T_{i_1}, \cdots, T_{i_k}, T_{i_{k+1}}$ *részfák.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt létezik három pont, a,b és c, melyekre
$a \in \cap_{j=1}^{k} T_{i_j}$, $b \in \cap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}$, $c \in T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}$.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt létezik három pont, a,b és c, melyekre
$a \in \cap_{j=1}^{k} T_{i_j}$, $b \in \cap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}$, $c \in T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}$.
Vegyük észre, hogy minden T_{i_j} tartalmaz legalább két pontot az a, b és c pontokból. A fákban két pont között pontosan egy út van. Így ha egy fa tartalmaz 2 csúcsot, akkor az őket összekötő utat is.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt létezik három pont, a,b és c, melyekre
$a \in \cap_{j=1}^{k} T_{i_j}$, $b \in \cap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}$, $c \in T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}$.
Vegyük észre, hogy minden T_{i_j} tartalmaz legalább két pontot az a, b és c pontokból. A fákban két pont között pontosan egy út van. Így ha egy fa tartalmaz 2 csúcsot, akkor az őket összekötő utat is.

Egy fában 3 csúcs közötti páronkénti utaknak van közös pontja.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt létezik három pont, a,b és c, melyekre
$a \in \cap_{j=1}^{k} T_{i_j}$, $b \in \cap_{j=2}^{k+1} T_{i_j}$, $c \in T_{i_1} \cap T_{i_{k+1}}$.

Vegyük észre, hogy minden T_{i_j} tartalmaz legalább két pontot az a, b és c pontokból. A fákban két pont között pontosan egy út van. Így ha egy fa tartalmaz 2 csúcsot, akkor az őket összekötő utat is.

Egy fában 3 csúcs közötti páronkénti utaknak van közös pontja.

Emiatt $\cap_{j=1}^{k+1} T_{i_j} \neq \emptyset$.

Tétel (Walter 1972, Gavril 1974, Buneman 1974)

A G(V,E) irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások:

Tétel (Walter 1972, Gavril 1974, Buneman 1974)

A G(V,E) irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások:

(i) G merev körű gráf

Tétel (Walter 1972, Gavril 1974, Buneman 1974)

A G(V,E) irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások:

(i) G merev körű gráf

(ii) G reprezentálható, mint egy fa bizonyos részfáinak metszetgráfja.

Tétel (Walter 1972, Gavril 1974, Buneman 1974)

A G(V,E) irányítatlan gráfra ekvivalensek a következő állítások:

(i) G merev körű gráf

(ii) G reprezentálható, mint egy fa bizonyos részfáinak metszetgráfja.

(iii) Létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ fa, amelynek csúcshalmaza a G maximális klikkjeinek olyan halmaza, hogy a $T_{\mathcal{K}_v} : v \in V$ feszített részgráf összefüggő (a $\mathcal{K}_v$ a v-t tartalmazó maximális klikkekből áll).

Bizonyítás

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*

Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K},\mathcal{E})$ *fa.*

Bizonyítás

$(iii) \Rightarrow (ii)$

Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ fa.

Legyen $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$.

Bizonyítás

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*
Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ *fa.*

Legyen $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$.

Ha u és v valamely $\mathcal{K}$ *-beli klikk két eleme, akkor* $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v \neq \emptyset$, *valamint*

Bizonyítás

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*
Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ *fa.*

Legyen $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$.

Ha u és v valamely $\mathcal{K}$ *-beli klikk két eleme, akkor* $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v \neq \emptyset$, *valamint*

$T_{\mathcal{K}_u} \cap T_{\mathcal{K}_v} \neq \emptyset$.

Bizonyítás

(iii) $\Rightarrow$ *(ii)*
Feltehetjük tehát (iii) szerint, hogy létezik egy $T(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ *fa.*

Legyen $u, v \in V$, $\{u, v\} \in E$.

Ha u és v valamely $\mathcal{K}$ *-beli klikk két eleme, akkor* $\mathcal{K}_u \cap \mathcal{K}_v \neq \emptyset$, *valamint*

$T_{\mathcal{K}_u} \cap T_{\mathcal{K}_v} \neq \emptyset$.

Így tehát a G metszetgáfja a $T_{\mathcal{K}_v} : v \in V$ *T-részfák családjának.*

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$

Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$

Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy
$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy
$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.
Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy
$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.
Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.
Egyértelmű úton el lehet jutni a_i-ből a_{i-1}-be és a_{i+1}-be.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.
Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.
Egyértelmű úton el lehet jutni a_i-ből a_{i-1}-be és a_{i+1}-be.

Lehet, hogy egy darabig közös ez a két út a T_i-ben. Az utolsó közös pontja a két útnak legyen b_i.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.
Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.
Egyértelmű úton el lehet jutni a_i-ből a_{i-1}-be és a_{i+1}-be.

Lehet, hogy egy darabig közös ez a két út a T_i-ben. Az utolsó közös pontja a két útnak legyen b_i.

Mivel T_{i-1} és T_{i+1} nem metszők, így a b_i pontokat egymás után úgy lehet összekötni, hogy az összekötő $b_i - -b_{i+1}$ utaknak nincs közös belső pontjuk, így egy kört alakítanak ki.

Bizonyítás

$(ii) \Rightarrow (i)$
Léteznek tehát minden v csúcshoz T_v részfák úgy, hogy
$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy legalább 4 hosszú, átlómentes kör az így reprezentált G gráfban.

Ennek legyen 2 egymást követő csúcsa v_i, v_{i+1} és a nekik megfeleltetett részfák T_i, T_{i+1}.
Létezik $a_i \in T_i \cap T_{i+1}$.
Egyértelmű úton el lehet jutni a_i-ből a_{i-1}-be és a_{i+1}-be.

Lehet, hogy egy darabig közös ez a két út a T_i-ben. Az utolsó közös pontja a két útnak legyen b_i.

Mivel T_{i-1} és T_{i+1} nem metszők, így a b_i pontokat egymás után úgy lehet összekötni, hogy az összekötő $b_i - -b_{i+1}$ utaknak nincs közös belső pontjuk, így egy kört alakítanak ki.
De a T_i-k egy fa részfái, így ez lehetetlen.

Az $(i) \Rightarrow (iii)$ esetet nem bizonyítjuk.

Megjegyzés

Egy korábbi észrevételből következik az alábbi tétel.

Az $(i) \Rightarrow (iii)$ esetet nem bizonyítjuk.

Megjegyzés

Egy korábbi észrevételből következik az alábbi tétel.

Legyen S egy teljes, elvágó csúcshalmaz.

Az $(i) \Rightarrow (iii)$ esetet nem bizonyítjuk.

Megjegyzés

Egy korábbi észrevételből következik az alábbi tétel.

Legyen S egy teljes, elvágó csúcshalmaz.

A keletkezett $G_1, \cdots, G_l$ komponensekhez az S-et hozzávesszük, jelölje $G_i \cup S$ az általuk feszített gráfokat (S-komponenseket). Ekkor

$$\chi(G) = max_i \quad \chi(G_i \cup S)$$

és

$$\omega(G) = max_i \quad \omega(G_i \cup S)$$

fennáll.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S-komponensek perfektek.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S-komponensek perfektek.

Ekkor a G gráf perfekt.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S-komponensek perfektek.

Ekkor a G gráf perfekt.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó gráfra.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S-komponensek perfektek.

Ekkor a G gráf perfekt.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó gráfra.

Elegendő megmutatni, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.

Következmény

Legyen S a G gráf egy teljes, elvágó csúcshalmaza.

Az S-komponensek perfektek.

Ekkor a G gráf perfekt.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó gráfra.

Elegendő megmutatni, hogy $\chi(G) = \omega(G)$.

Mivel az S-komponensek perfektek, felhasználva az előző állítást:
$\chi(G) = max_i \;\; \chi(G_i \cup S) = max_i \;\; \omega(G_i \cup S) = \omega(G)$

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Feltehető, hogy G összefüggő, hiszen korábbi állításunk szerint mindkét gráfparaméterünk a komponensekre vonatkozó értékek maximuma.

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Feltehető, hogy G összefüggő, hiszen korábbi állításunk szerint mindkét gráfparaméterünk a komponensekre vonatkozó értékek maximuma.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Feltehető, hogy G összefüggő, hiszen korábbi állításunk szerint mindkét gráfparaméterünk a komponensekre vonatkozó értékek maximuma.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Legyen S egy minimális elvágó halmaz. Tudjuk, hogy az S teljes gráf.

Tétel (Berge 1960, Hajnal és Surányi 1958)

A merev körű gráfok perfektek.

Bizonyítás

Igazoljunk G rendjére vonatkozó indukcióval.

Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden, a G-nél kevesebb csúcsot tartalmazó háromszögezett gráfra.

Feltehető, hogy G összefüggő, hiszen korábbi állításunk szerint mindkét gráfparaméterünk a komponensekre vonatkozó értékek maximuma.

Ha G teljes, akkor nincs mit bizonyítani.

Legyen S egy minimális elvágó halmaz. Tudjuk, hogy az S teljes gráf.

Mivel az S-komponensek perfektek az indukció miatt, az előző következmény szerint G is az.

Tétel (Meyniel, 1976)

Ha a G irányítatlan gráf minden páratlan köre rendelkezik legalább 2 átlóval, akkor G perfekt gráf.

Állítás (Fulkerson és Gross, 1965)

Egy merev körű, n csúcsú gráf legfeljebb n klikkel rendelkezik. Egyenlőség csak az üres gráf esetén áll fenn.

Állítás

Merev körű gráfokra létezik $O(|V| + |E|)$ idejű algoritmus, amely megadja a $\chi(G)$-t és G klikkjeit.

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem szintezhetők is a gráfok.

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem szintezhetők is a gráfok.

Az első szinten a nyelők, a második szinten a csak nyelőkhöz irányított csúcsok, sít. vannak.

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem szintezhetők is a gráfok.

Az első szinten a nyelők, a második szinten a csak nyelőkhöz irányított csúcsok, sít. vannak.

Ha veszünk egy tranzitív irányítást, akkor a szintek sorszámával történő színezés nemcsak jó, hanem a leghosszabb irányított út (egy forrásból egy nyelőbe)pontjai teljes gráfot alkotnak.

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem szintezhetők is a gráfok.

Az első szinten a nyelők, a második szinten a csak nyelőkhöz irányított csúcsok, sít. vannak.

Ha veszünk egy tranzitív irányítást, akkor a szintek sorszámával történő színezés nemcsak jó, hanem a leghosszabb irányított út (egy forrásból egy nyelőbe)pontjai teljes gráfot alkotnak.

Emiatt az egyik színezés éppen $\omega(G)$ színnel tudja kiszínezni a G gráfot.

Irányított körmentes gráfok csúcsaihoz nemcsak az irányítással kompatibilis lineáris rendezés található, hanem szintezhetők is a gráfok.

Az első szinten a nyelők, a második szinten a csak nyelőkhöz irányított csúcsok, sít. vannak.

Ha veszünk egy tranzitív irányítást, akkor a szintek sorszámával történő színezés nemcsak jó, hanem a leghosszabb irányított út (egy forrásból egy nyelőbe)pontjai teljes gráfot alkotnak.

Emiatt az egyik színezés éppen $\omega(G)$ színnel tudja kiszínezni a G gráfot.

Az összehasonlítási gráf tulajdonság öröklődik a feszített részgráfokra, így $\chi(G') = \omega(G')$ teljesül G minden feszített részgráfjára is. Tehát G perfekt.

Tétel

A tranzitíven irányítható gráfok perfektek.

A Perfekt gráf tétel segítségével a fenti, a híres Dilworth tételt eredményezi.

Tétel

A tranzitíven irányítható gráfok perfektek.

A Perfekt gráf tétel segítségével a fenti, a híres Dilworth tételt eredményezi.

Ugyanis így tehát egy G tranzitíven irányítható gráf komplementere is perfekt, tehát $\alpha(G) = k(G)$.

Tétel (Dilworth, 1950)

Legyen $(X, \leq)$ *parciálisan rendezett halmaz.*

Tétel

A tranzitíven irányítható gráfok perfektek.

A Perfekt gráf tétel segítségével a fenti, a híres Dilworth tételt eredményezi.

Ugyanis így tehát egy G tranzitíven irányítható gráf komplementere is perfekt, tehát $\alpha(G) = k(G)$.

Tétel (Dilworth, 1950)

Legyen $(X, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz.

A minimális lineárisan rendezett részhalmazokra (láncokra) történő bontás mérete megegyezik a legnagyobb antilánc (nem összehasonlítható elemek halmaza) számosságával.

Split gráfok

Definíció

A G=(V,E) irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$*.*
A két rész közötti élekre nincs megkötés.

Split gráfok

Definíció

A G=(V,E) irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$.
A két rész közötti élekre nincs megkötés.

Megjegyzés

A definícióban szereplő felbontás nem feltétlenül egyértelmű.
Egy split gráf komplementere split gráf.
A következők közül pontosan egy teljesül egy split gráfra.

Split gráfok

Definíció

A G=(V,E) irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$.
A két rész közötti élekre nincs megkötés.

Megjegyzés

A definícióban szereplő felbontás nem feltétlenül egyértelmű.
Egy split gráf komplementere split gráf.
A következők közül pontosan egy teljesül egy split gráfra.

(i) $|S| = \alpha(G)$ *és* $|K| = \omega(G)$

Split gráfok

Definíció

A G=(V,E) irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$.
A két rész közötti élekre nincs megkötés.

Megjegyzés

A definícióban szereplő felbontás nem feltétlenül egyértelmű.
Egy split gráf komplementere split gráf.
A következők közül pontosan egy teljesül egy split gráfra.

(i) $|S| = \alpha(G)$ és $|K| = \omega(G)$
(ii) $|S| = \alpha(G)$ és $|K| = \omega(G) - 1$

Split gráfok

Definíció

A G=(V,E) irányítatlan gráf split gráf, ha a csúcshalmaza partícionálható egy teljes és egy üres részre $V = S + K$*.*
A két rész közötti élekre nincs megkötés.

Megjegyzés

A definícióban szereplő felbontás nem feltétlenül egyértelmű.
Egy split gráf komplementere split gráf.
A következők közül pontosan egy teljesül egy split gráfra.

(i) $|S| = \alpha(G)$ *és* $|K| = \omega(G)$
(ii) $|S| = \alpha(G)$ *és* $|K| = \omega(G) - 1$
(iii) $|S| = \alpha(G) - 1$ *és* $|K| = \omega(G)$

A split gráfok jellemzése.

A split gráfok jellemzése.

A következő állítások ekvivalensek.

Tétel

(i) G split gráf.

A split gráfok jellemzése.

A következő állítások ekvivalensek.

Tétel

(i) G split gráf.

(ii) G is és a komplementere is merev körű.

A split gráfok jellemzése.

A következő állítások ekvivalensek.

Tétel

(i) G split gráf.

(ii) G is és a komplementere is merev körű.

(iii) G nem tartalmaz feszített részgráfként $2K_2$-t, C_4-et vagy C_5-öt.

A split gráfok jellemzése.

A következő állítások ekvivalensek.

Tétel

(i) G split gráf.

(ii) G is és a komplementere is merev körű.

(iii) G nem tartalmaz feszített részgráfként $2K_2$-t, C_4-et vagy C_5-öt.

Bizonyítás

$(i) \Rightarrow (ii)$
Nem képzelhető el egy legalább 4 hosszú feszített kör egy split gráfban.
$(ii) \Rightarrow (iii)$
A $2K_2$ a C_4 komplementere.

Bizonyítás

(folyt.) $(iii) \Rightarrow (i)$
Válasszunk ki a G*-nek egy legnagyobb olyan* K *klikkjét, melyre a* $G_{V \setminus K}$ *legkevesebb élű.*

Bizonyítás

(folyt.) (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)
Válasszunk ki a G-nek egy legnagyobb olyan K klikkjét, melyre a $G_{V \setminus K}$ *legkevesebb élű.*

Megmutatjuk, hogy az $S = V \setminus K$ *független csúcshalmaza G-nek. Tegyük fel, hogy* G_S *-ben mégis van egy* $\{x, y\}$ *él.*

Bizonyítás

(folyt.) (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)
Válasszunk ki a G-nek egy legnagyobb olyan K klikkjét, melyre a $G_{V \setminus K}$ *legkevesebb élű.*

Megmutatjuk, hogy az $S = V \setminus K$ *független csúcshalmaza G-nek. Tegyük fel, hogy* G_S *-ben mégis van egy* $\{x, y\}$ *él.*

A K maximális, így nem lehet sem x sem y szomszédos az összes K-beli csúccsal. Ha egy z pont kivételével minden más K-beli csúcs szomszédai lennének, akkor elhagyva a z-t és az x és y csúcsokat K-hoz véve nagyobb klikket kapnánk.

Bizonyítás

(folyt.) (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)

Válasszunk ki a G-nek egy legnagyobb olyan K klikkjét, melyre a $G_{V \setminus K}$ *legkevesebb élű.*

Megmutatjuk, hogy az $S = V \setminus K$ *független csúcshalmaza G-nek. Tegyük fel, hogy* G_S *-ben mégis van egy* $\{x, y\}$ *él.*

A K maximális, így nem lehet sem x sem y szomszédos az összes K-beli csúccsal. Ha egy z pont kivételével minden más K-beli csúcs szomszédai lennének, akkor elhagyva a z-t és az x és y csúcsokat K-hoz véve nagyobb klikket kapnánk.

Léteznek tehát u és v csúcsok, amelyekre $\{x, u\} \notin E$ *és* $\{y, v\} \notin E$

Bizonyítás

(folyt.) $(iii) \Rightarrow (i)$
Mivel G nem tartalmaz C_4*-et és* $2K_2$*-t, így az* $\{x, v\}, \{y, u\}$ *élek közül pontosan az egyik van G-ben.*
Legyen ez pl. az utóbbi.

Bizonyítás

(folyt.) (*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)
Mivel G nem tartalmaz C_4-et és $2K_2$-t, így az $\{x, v\}, \{y, u\}$ élek közül pontosan az egyik van G-ben.
Legyen ez pl. az utóbbi.

Valamely további K-beli w csúcsra ha $\{y, w\} \notin E$ és $\{x, w\} \notin E$, akkor az $\{x, y, v, w\}$ csúcsok $2K_2$-t feszítenek, ha pedig $\{y, w\} \notin E$ de $\{x, w\} \in E$, akkor $\{x, y, u, w\}$ csúcsok kifeszítenek egy C_4-et.

Bizonyítás

(folyt.) *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*
Mivel G *nem tartalmaz* C_4*-et és* $2K_2$*-t, így az* $\{x, v\}, \{y, u\}$ *élek közül pontosan az egyik van* G*-ben.*
Legyen ez pl. az utóbbi.

Valamely további K*-beli* w *csúcsra ha* $\{y, w\} \notin E$ *és* $\{x, w\} \notin E$*, akkor az* $\{x, y, v, w\}$ *csúcsok* $2K_2$*-t feszítenek, ha pedig* $\{y, w\} \notin E$ *de* $\{x, w\} \in E$*, akkor* $\{x, y, u, w\}$ *csúcsok kifeszítenek egy* C_4*-et.*

Tehát y*-nak szomszédja minden* $K \setminus v$ *csúcs, és ha kicseréljük* v*-vel, akkor a* $K' = K \setminus \{v\} \cup \{y\}$ *is maximális klikk.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
Mivel G nem tartalmaz C_4*-et és* $2K_2$*-t, így az* $\{x, v\}, \{y, u\}$ *élek közül pontosan az egyik van G-ben.*
Legyen ez pl. az utóbbi.

Valamely további K-beli w csúcsra ha $\{y, w\} \notin E$ *és* $\{x, w\} \notin E$*, akkor az* $\{x, y, v, w\}$ *csúcsok* $2K_2$*-t feszítenek, ha pedig* $\{y, w\} \notin E$ *de* $\{x, w\} \in E$*, akkor* $\{x, y, u, w\}$ *csúcsok kifeszítenek egy* C_4*-et.*

Tehát y-nak szomszédja minden $K \setminus v$ *csúcs, és ha kicseréljük v-vel, akkor a* $K' = K \setminus \{v\} \cup \{y\}$ *is maximális klikk.*

Mivel S a legkevesebb élt tartalmazta, és x szomszédja y-nak, de nem szomszédja v-nek, így léteznie kell egy y-tól különböző $t \in V \setminus K$ *csúcsnak, amely szomszédos v-vel, de nem szomszédos y-nal.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
A t és az x össze van kötve, különben $\{t, x, y, v\}$ *egy* $2K_2$*-t feszítene.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ *(i)*
A t és az x össze van kötve, különben $\{t, x, y, v\}$ *egy* $2K_2$*-t feszítene.*

Hasonlóan t és u is szomszédos, mert másképpen $\{t, x, y, u\}$ *egy* C_4*-et feszít.*

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ (i)
A t és az x össze van kötve, különben $\{t, x, y, v\}$ egy $2K_2$-t feszítene.

Hasonlóan t és u is szomszédos, mert másképpen $\{t, x, y, u\}$ egy C_4-et feszít.

Ezekből azonban az következik, hogy $\{t, x, y, u, v\}$ egy C_5-öt feszít.

Bizonyítás

(folyt.) (iii) $\Rightarrow$ (i)
A t és az x össze van kötve, különben $\{t, x, y, v\}$ egy $2K_2$-t feszítene.

Hasonlóan t és u is szomszédos, mert másképpen $\{t, x, y, u\}$ egy C_4-et feszít.

Ezekből azonban az következik, hogy $\{t, x, y, u, v\}$ egy C_5-öt feszít.

Ellentmondásra jutottunk, vagyis S független halmaz, tehát G split gráf.

Tartalomjegyzék:

A színezések száma

Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \cdots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

A színezések száma

Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \cdots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

Mikor tekintünk két színezést különbözőnek?

A színezések száma

Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \cdots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

Mikor tekintünk két színezést különbözőnek?

A továbbiakban a G csúcsait $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ számozottnak tekintjük. Két színezés különböző, ha van olyan csúcs, amely más színt kap az egyik, mint a másik színezésnél.

A színezések száma

Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \cdots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

Mikor tekintünk két színezést különbözőnek?

A továbbiakban a G csúcsait $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ számozottnak tekintjük. Két színezés különböző, ha van olyan csúcs, amely más színt kap az egyik, mint a másik színezésnél.

Így például K_n színezéseinek száma $k(k-1)\cdots(k-n+1)$.
A v_1 kaphat k színt.
A v_2 már csak (k-1) színt kaphat és így tovább, a v_n-nek már van (n-1) különböző színű szomszédja, így (k-n+1) szín közül választhatunk.

A színezések száma

Ha a G egyszerű gráf csúcsait ki lehet az $\{1, 2, \cdots, k\}$ színekkel jól színezni, akkor vajon hányféleképpen?

Mikor tekintünk két színezést különbözőnek?

A továbbiakban a G csúcsait $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ számozottnak tekintjük. Két színezés különböző, ha van olyan csúcs, amely más színt kap az egyik, mint a másik színezésnél.

Így például K_n színezéseinek száma $k(k-1)\cdots(k-n+1)$.
A v_1 kaphat k színt.
A v_2 már csak (k-1) színt kaphat és így tovább, a v_n-nek már van (n-1) különböző színű szomszédja, így (k-n+1) szín közül választhatunk.

Abban az esetben, ha $k < n$, akkor nincs jó színezés.
Ekkor a szorzat nullát ad, tehát még ekkor is pontos válasz a színezések számára.

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

100 évvel ezelőtt a 4-szín sejtés nagyon népszerű probléma volt.

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

100 évvel ezelőtt a 4-szín sejtés nagyon népszerű probléma volt.

Ha síkgráfokra Birkhoff függvényét könnyen ki lehetett volna számolni, akkor a négyszínsejtésre is jó segédeszközt kaptak volna.

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

100 évvel ezelőtt a 4-szín sejtés nagyon népszerű probléma volt.

Ha síkgráfokra Birkhoff függvényét könnyen ki lehetett volna számolni, akkor a négyszínsejtésre is jó segédeszközt kaptak volna.

A sejtés ekvivalens formája lett volna a következő:

$P_S(4) > 0$

George David Birkhoff 1912-ben vezette be a $P_G(k)$ függvényt a G gráf k-színezéseinek számára.

Vajon mennyire nehéz a függvény kiszámolása tetszőleges gráfra?

100 évvel ezelőtt a 4-szín sejtés nagyon népszerű probléma volt.

Ha síkgráfokra Birkhoff függvényét könnyen ki lehetett volna számolni, akkor a négyszínsejtésre is jó segédeszközt kaptak volna.

A sejtés ekvivalens formája lett volna a következő:

Ha S síkgráf, akkor $P_S(4) > 0$.

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legkevesebb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legkevesebb módon lehet kiszínezni?

Állítás

Ha G-nek n csúcsa van és nincs éle, akkor $P_G(k) = k^n$.

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legkevesebb módon lehet kiszínezni?

Állítás

Ha G-nek n csúcsa van és nincs éle, akkor $P_G(k) = k^n$.

Az n csúcsú útra $P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legtöbb módon lehet kiszínezni?

Melyik az az n csúcsú gráf, amelyet k színnel a legkevesebb módon lehet kiszínezni?

Állítás

Ha G-nek n csúcsa van és nincs éle, akkor $P_G(k) = k^n$.

Az n csúcsú útra $P_{P_n}(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Ha T n csúcsú fagráf, akkor $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.
$n = 1$*-re k-féle színnel színezhetjük az egyetlen pontot.*

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.
$n = 1$*-re k-féle színnel színezhetjük az egyetlen pontot.*

Ha feltesszük, hogy n-nél kevesebb csúcsú fákra fennáll a képlet, akkor vegyünk az n csúcsú T fának egy levelét. Töröljük az 1-fokú csúcsot.

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.
$n = 1$*-re k-féle színnel színezhetjük az egyetlen pontot.*

Ha feltesszük, hogy n-nél kevesebb csúcsú fákra fennáll a képlet, akkor vegyünk az n csúcsú T fának egy levelét. Töröljük az 1-fokú csúcsot.
A maradék fát $k(k-1)^{(k-2)}$ *módon színezhetjük.*

Minden fa egyforma?

Bizonyítás

Az út első pontját k módon színezhetjük. A következőt (k-1) módon és így tovább.

Fákra azonos a formula! Minden fára!

Teljes indukcióval triviálisnak tekinthetjük.
$n = 1$*-re k-féle színnel színezhetjük az egyetlen pontot.*

Ha feltesszük, hogy n-nél kevesebb csúcsú fákra fennáll a képlet, akkor vegyünk az n csúcsú T fának egy levelét. Töröljük az 1-fokú csúcsot.
A maradék fát $k(k-1)^{(k-2)}$ *módon színezhetjük.*
A levél (k-1) szín közül kaphat, csak az egyetlen szomszédja színét nem, így $P_T(k) = k(k-1)^{n-1}$.

Miért polinom?

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \cdots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G-t jól kiszínezni.

Miért polinom?

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \cdots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G-t jól kiszínezni.

Minden k nemnegatív egészre egy egész szám lesz a függvény értéke.

Miért polinom?

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \cdots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G-t jól kiszínezni.

Minden k nemnegatív egészre egy egész szám lesz a függvény értéke.

Vajon milyen típusú függvény $P_G(k)$?

Miért polinom?

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \cdots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G-t jól kiszínezni.

Minden k nemnegatív egészre egy egész szám lesz a függvény értéke.

Vajon milyen típusú függvény $P_G(k)$?

Tudjuk, hogy egy színezés elképzelhető úgy is, hogy a csúcsokat partícionáljuk független halmazokba, majd ezután egy-egy részt egy-egy színnel kiszínezünk.

Miért polinom?

Megállapíthatjuk, hogy a kombinatorikai jelentése miatt a $P_G(k)$ függvény 0-ra biztosan 0-t ad, de az $1, \cdots, \chi(G) - 1$ egészekre is 0-t ad, hiszen nem lehet ilyen kevés színnel a G-t jól kiszínezni.

Minden k nemnegatív egészre egy egész szám lesz a függvény értéke.

Vajon milyen típusú függvény $P_G(k)$?

Tudjuk, hogy egy színezés elképzelhető úgy is, hogy a csúcsokat partícionáljuk független halmazokba, majd ezután egy-egy részt egy-egy színnel kiszínezünk.

Ez azt jelenti, hogy a k-színezéseket megkapjuk, ha minden lehetséges partícionálás esetén a független részeket minden lehetséges módon más-más színűre kiszínezzük.

Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Egy r-részes partíció esetén k színnel $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ módon tudunk színezni.

Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Egy r-részes partíció esetén k színnel $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ módon tudunk színezni.

Ilyen szorzatokat kell összeadni. Mivel minden ilyen tag egy r-ed fokú polinom, így az összeg is egy polinomja k-nak.

Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Egy r-részes partíció esetén k színnel $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ módon tudunk színezni.

Ilyen szorzatokat kell összeadni. Mivel minden ilyen tag egy r-ed fokú polinom, így az összeg is egy polinomja k-nak.

Egyetlen n részes partíció van, tehát egyetlen összeadandó n-ed fokú polinom.

Világos, hogy ha más a partíció, más a színezés!

Egy r-részes partíció esetén k színnel $k(k-1)\cdots(k-r+1)$ módon tudunk színezni.

Ilyen szorzatokat kell összeadni. Mivel minden ilyen tag egy r-ed fokú polinom, így az összeg is egy polinomja k-nak.

Egyetlen n részes partíció van, tehát egyetlen összeadandó n-ed fokú polinom.

Ez az, amikor mindegyik csúcs külön részbe kerül. A tag k^n, így a $P_G(k)$ kromatikus polinom n-edfokú és a főegyütthatója 1.

Állítás

Ha G több komponensből áll, akkor a komponensek kromatikus polinomjainak szorzata megadja a G kromatikus polinomját.

Állítás

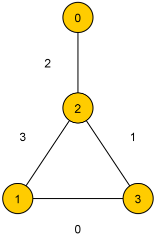
Ha egy G gráf rendelkezik elvágó ponttal, akkor lényegében függetlenül színezhetjük a pont elhagyásával keletkező komponenseket. Amikor azonban összeillesszük őket ebben a közös pontban, akkor mindegyikük számára - egy kivételével - ennek a pontnak a színe adott, így a komponensek kromatikus polinomjainak szorzatát el kell osztani a k-nak a komponensek száma mínusz egyedik hatványával. Pl. egy csillagnak van u elvágó pontja. Az u-komponensek mind egy-egy él. Így az n csúcsú CS_n csillag kromatikus polinomja
$P_{CS_n}(k) = \frac{(k(k-1))^{n-1}}{k^{n-2}} = k(k-1)^{n-1}$.

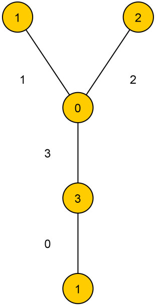
Állítás

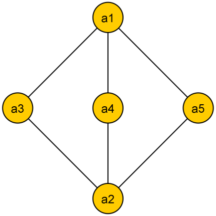
Ha G több komponensből áll, akkor a komponensek kromatikus polinomjainak szorzata megadja a G kromatikus polinomját.

Állítás

Ha egy G gráf rendelkezik elvágó ponttal, akkor lényegében függetlenül színezhetjük a pont elhagyásával keletkező komponenseket. Amikor azonban összeillesszük őket ebben a közös pontban, akkor mindegyikük számára - egy kivételével - ennek a pontnak a színe adott, így a komponensek kromatikus polinomjainak szorzatát el kell osztani a k-nak a komponensek száma mínusz egyedik hatványával. Pl. egy csillagnak van u elvágó pontja. Az u-komponensek mind egy-egy él. Így az n csúcsú CS_n csillag kromatikus polinomja
$P_{CS_n}(k) = \frac{(k(k-1))^{n-1}}{k^{n-2}} = k(k-1)^{n-1}$. *Mint fára ugyanezt kaptuk.*


0
2
2
3
1
1
3
0


1
2
1
2
0
3
3
0
1


a1
a3
a4
a5
a2

A fákra könnyű volt indukcióval számolni, mert egy fának létezik lebontása, egy-egy levél egymás utáni törlésével.

A fákra könnyű volt indukcióval számolni, mert egy fának létezik lebontása, egy-egy levél egymás utáni törlésével.

Pl. egy körre nem létezik ilyen.
$P_{C_m}(k) = ?$
$P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ ezt tudjuk, hiszen a háromszög teljes gráf is.
Ha úgy kezdenénk színezni mint egy utat, az m-edik pontnál lennénk bajba, mert neki két színezett szomszédja lenne, így ha azok eddig azonos színt kaptak volna, akkor most több lehetőségünk lenne eggyel, mint ha nem.
Emiatt különböztessünk meg két esetet.

A fákra könnyű volt indukcióval számolni, mert egy fának létezik lebontása, egy-egy levél egymás utáni törlésével.

Pl. egy körre nem létezik ilyen.
$P_{C_m}(k) = ?$
$P_{C_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ ezt tudjuk, hiszen a háromszög teljes gráf is.
Ha úgy kezdenénk színezni mint egy utat, az m-edik pontnál lennénk bajba, mert neki két színezett szomszédja lenne, így ha azok eddig azonos színt kaptak volna, akkor most több lehetőségünk lenne eggyel, mint ha nem.
Emiatt különböztessünk meg két esetet.

Színezzünk ki egy P_m fát úgy, hogy végpontjaik azonos színűek és úgyis, hogy különbözők. Ha P_1 és P_m azonos színű, akkor olyan, mintha egy (m-1) csúcsú kört színeztünk volna, ha egyesítjük a két végpontot. Másrészt ha más színt kaptak a végpontok, akkor ha egy éllel összekötjük őket, akkor jó színezését kapjuk az m hosszú körnek.

Tehát a $P_{P_m}(k) = P_{C_{m-1}}(k) + P_{C_m}(k)$ összefüggést kapjuk.

$P_{C_m}(k) = k(k-1)^{m-1} - P_{C_{m-1}}(k)$

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)^3 - P_{C_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$P_{C_5}(k) = k(k-1)^4 - P_{C_4}(k) = k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2-3k+3) = k(k-1)(k^3-4k^2+6k-4) = (k-1)^5 + (-1)^5(k-1)$$

$$P_{C_m}(k) = k(k-1)^{m-1} - P_{C_{m-1}}(k) = k(k-1)^{m-1} - ((k-1)^{m-1} + (-1)^{m-1}(k-1)) = (k-1)^m + (-1)^m(k-1)$$

Ezzel igazoltuk, hogy körökre $P_{C_m}(k) = (k-1)^m + (-1)^m(k-1)$.

Általában is alkalmazható a körre megismert módszer.

Általában is alkalmazható a körre megismert módszer.

Ha G-ben az u és v két nem összekötött pont, akkor jelölje $G + uv$ azt a gráfot, amit az u és v összekötésével kapunk a G-ből.

Általában is alkalmazható a körre megismert módszer.

Ha G-ben az u és v két nem összekötött pont, akkor jelölje $G + uv$ azt a gráfot, amit az u és v összekötésével kapunk a G-ből.

Valamint G/uv azt a gráfot, amelyet az u és v összeolvasztásával kapunk. Az új uv csúcs 1-1 éllel szomszédos minden olyan csúccsal, amely szomszédja volt az u és v közül legalább az egyiknek.

Általában is alkalmazható a körre megismert módszer.

Ha G-ben az u és v két nem összekötött pont, akkor jelölje $G + uv$ azt a gráfot, amit az u és v összekötésével kapunk a G-ből.

Valamint G/uv azt a gráfot, amelyet az u és v összeolvasztásával kapunk. Az új uv csúcs 1-1 éllel szomszédos minden olyan csúccsal, amely szomszédja volt az u és v közül legalább az egyiknek.

A következő összefüggés igaz:

$$P_G(k) = P_{G+uv}(k) + P_{G/uv}(k).$$

Hasznos a következő alak is:

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Itt az $\{u, v\}$ élt a G tartalmazza és $G - uv$ azt a gráfot jelenti, amit az él elhagyása után kapunk.

Hasznos a következő alak is:

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Itt az $\{u, v\}$ élt a G tartalmazza és $G - uv$ azt a gráfot jelenti, amit az él elhagyása után kapunk.

Ebben az az előnyös, hogy a jobboldalon a G-nél kisebb gráfok vannak, az egyik pontszámban, a másik pontszámban egyforma, de éleinek száma eggyel kevesebb.

Hasznos a következő alak is:

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Itt az $\{u, v\}$ élt a G tartalmazza és $G - uv$ azt a gráfot jelenti, amit az él elhagyása után kapunk.

Ebben az az előnyös, hogy a jobboldalon a G-nél kisebb gráfok vannak, az egyik pontszámban, a másik pontszámban egyforma, de éleinek száma eggyel kevesebb.

Ez a redukció alkalmas arra, hogy bármely gráf kromatikus polinomát meghatározzuk.

Hasznos a következő alak is:

$$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k).$$

Itt az $\{u, v\}$ élt a G tartalmazza és $G - uv$ azt a gráfot jelenti, amit az él elhagyása után kapunk.

Ebben az az előnyös, hogy a jobboldalon a G-nél kisebb gráfok vannak, az egyik pontszámban, a másik pontszámban egyforma, de éleinek száma eggyel kevesebb.

Ez a redukció alkalmas arra, hogy bármely gráf kromatikus polinomát meghatározzuk.

Ez mégsem hatékony, hiszen túl sok részgráfja van egy gráfnak és nem világos melyek kromatikus polinomára lesz szükségünk.

Hagyjunk el egy élt a 4 csúcsú teljes gráfból. Mi a kromatikus polinomja? Az első ekvivalens alakból

$$P_{K_4-uv}(k) = P_{K_4}(k) + P_{K_3}(k) =$$
$$k(k-1(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)(k-2)$$

Hagyjunk el egy élt a 4 csúcsú teljes gráfból. Mi a kromatikus polinomja? Az első ekvivalens alakból

$$P_{K_4-uv}(k) = P_{K_4}(k) + P_{K_3}(k) =$$
$$k(k-1(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)(k-2)$$

A második alapján

$$P_{K_4-12}(k) = P_{K_4-12-34}(k) - P_{P_3}(k) = P_{C_4}(k) - P_{P_3}(k) =$$
$$(k-1^4) + (-1)^4(k-1) - k(k-1)^2 =$$
$$(k-1)((k-1)^3 + 1 - k(k-1)) = (k-1)k(k-2)^2$$

Hagyjunk el egy élt a 4 csúcsú teljes gráfból. Mi a kromatikus polinomja? Az első ekvivalens alakból

$$P_{K_4-uv}(k) = P_{K_4}(k) + P_{K_3}(k) =$$
$$k(k-1(k-2)(k-3) + k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k-2)(k-2)$$

A második alapján

$$P_{K_4-12}(k) = P_{K_4-12-34}(k) - P_{P_3}(k) = P_{C_4}(k) - P_{P_3}(k) =$$
$$(k-1^4) + (-1)^4(k-1) - k(k-1)^2 =$$
$$(k-1)((k-1)^3 + 1 - k(k-1)) = (k-1)k(k-2)^2$$

Feladat

Határozzuk meg, a két, egymást nem metsző átlót tartalmazó ötszög kromatikus polinomját!

- Vajon mit állapíthatunk még meg egy gráf kromatikus polinomjáról?

- Vajon mit állapíthatunk még meg egy gráf kromatikus polinomjáról?
- Ki lehet-e - izomorfia erejéig - találni a polinomból milyen gráfhoz tartozik?

- Vajon mit állapíthatunk még meg egy gráf kromatikus polinomjáról?
- Ki lehet-e - izomorfia erejéig - találni a polinomból milyen gráfhoz tartozik?
- Ki lehet-e a polinomból következtetni a gráf bizonyos tulajdonságait?

- Vajon mit állapíthatunk még meg egy gráf kromatikus polinomjáról?
- Ki lehet-e - izomorfia erejéig - találni a polinomból milyen gráfhoz tartozik?
- Ki lehet-e a polinomból következtetni a gráf bizonyos tulajdonságait?
- Vajon mit állapíthatunk meg egy gráf kromatikus polinomjáról még?

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.

Az (n-1) fokú tag együtthatójának vajon van-e valami jelentése? Amikor kevesebb mint (k-1) részre partícionáljuk a csúcsokat, akkor ezek kiszínezéseinek számából nem adódik hozzá semmi az (n-1) fokú tag együtthatójához.

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.

Az (n-1) fokú tag együtthatójának vajon van-e valami jelentése? Amikor kevesebb mint (k-1) részre partícionáljuk a csúcsokat, akkor ezek kiszínezéseinek számából nem adódik hozzá semmi az (n-1) fokú tag együtthatójához.

Az egyesével történő partícióval a $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$ szorzatban a k^{n-1} együtthatója $-\frac{n(n-1)}{2}$ lesz.

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.

Az (n-1) fokú tag együtthatójának vajon van-e valami jelentése? Amikor kevesebb mint (k-1) részre partícionáljuk a csúcsokat, akkor ezek kiszínezéseinek számából nem adódik hozzá semmi az (n-1) fokú tag együtthatójához.

Az egyesével történő partícióval a $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$ szorzatban a k^{n-1} együtthatója $-\frac{n(n-1)}{2}$ lesz.

(n-1) független részre úgy lehet osztani n csúcsot, hogy egy részbe két csúcs kerül, ezek éppen nem lehetnek szomszédosak.

Tudjuk, hogy a polinom foka megegyezik a G csúcsainak számával. A főegyüttható 1.

Az (n-1) fokú tag együtthatójának vajon van-e valami jelentése? Amikor kevesebb mint (k-1) részre partícionáljuk a csúcsokat, akkor ezek kiszínezéseinek számából nem adódik hozzá semmi az (n-1) fokú tag együtthatójához.

Az egyesével történő partícióval a $k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)$ szorzatban a k^{n-1} együtthatója $-\frac{n(n-1)}{2}$ lesz.

(n-1) független részre úgy lehet osztani n csúcsot, hogy egy részbe két csúcs kerül, ezek éppen nem lehetnek szomszédosak.

Tehát annyi (n-1) részre történő partíció van, ahány nem szomszédos csúcspár. Így a $k(k-1)\cdots(k-n+2)$ tagok száma éppen ennyi. Összevonva a két adalékot éppen az élszám ellentetjét kapjuk.

Nem lehet egyértelműen következtetni a polinomból a gráfra, pl. mindegyik n-csúcsú fának ugyanaz a kromatikus polinomja.

Állítás

Ha $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ *akkor G egy fa.*

Bizonyítás

A polinom n-edfokú, így G n csúcsú. A második együttható $-(n-1)$*, tehát G (n-1) élű. Ha nem fa lenne, akkor több komponensből állna.*

Nem lehet egyértelműen következtetni a polinomból a gráfra, pl. mindegyik n-csúcsú fának ugyanaz a kromatikus polinomja.

Állítás

Ha $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ akkor G egy fa.

Bizonyítás

A polinom n-edfokú, így G n csúcsú. A második együttható $-(n-1)$, tehát G (n-1) élű. Ha nem fa lenne, akkor több komponensből állna.

Mivel 0 színnel 0 féleképpen lehet kiszínezni egy gráfot, így bármely gráf kromatikus polinomja osztható k-val. A komponensek kromatikus polinomjainak szorzata adja a G kromatikus polinomját, azonban az nem osztható k^2-tel. Tehát G fa.

Állítás

Ha G-nek van éle, akkor $P_G(k)$ együtthatóinak összege zérus.

Bizonyítás

Ha van éle, 1 színnel nem lehet kiszínezni, tehát $P_G(1) = 0$.

Állítás

$P_G(k)$ együtthatóinak alternál az előjele.

Bizonyítás

Az n csúcsú gráfokra az éleinek m számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.

Bizonyítás

Az n csúcsú gráfokra az éleinek m számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
Az üres gráfokra k^n *valóban ilyen. Tegyük fel, hogy a G n csúcsú és m élű, valamint a kisebb gráfokra feltesszük az állítást. Alkalmazzuk a redukciós formulát!*
$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.

Bizonyítás

Az n csúcsú gráfokra az éleinek m számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
Az üres gráfokra k^n *valóban ilyen. Tegyük fel, hogy a G n csúcsú és m élű, valamint a kisebb gráfokra feltesszük az állítást. Alkalmazzuk a redukciós formulát!*
$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.
Tudjuk, hogy $G - uv$*-re és* G/uv*-ra igaz! A* $G - uv$ *főegyütthatója 1, az (n-1)-edik hatványé negatív, majd így alternálva jönnek az előjelek.*

Bizonyítás

Az n csúcsú gráfokra az éleinek m számára vonatkozó indukcióval bizonyítunk.
Az üres gráfokra k^n *valóban ilyen. Tegyük fel, hogy a G n csúcsú és m élű, valamint a kisebb gráfokra feltesszük az állítást. Alkalmazzuk a redukciós formulát!*
$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.
Tudjuk, hogy $G - uv$*-re és* G/uv*-ra igaz! A* $G - uv$ *főegyütthatója 1, az (n-1)-edik hatványé negatív, majd így alternálva jönnek az előjelek. A G/uv viszont csak (n-1) csúcsú, így a főegyüttható itt az (n-1)-edik fokú taghoz tartozik, majd így tovább váltakozva. Ha tehát kivonjuk őket egymásból, akkor a G-uv főegyütthatója megmarad, majd később a negatívból vonunk ki egy nemnegatívat, és a nemnegatívhoz adunk hozzá egy nemnegatívat. Tehát az együtthatók előjele váltakozni fog.*

Állítás

Ha G összefüggő, akkor a $P_G(k)$ együtthatóinak abszolútértékei - a magasabb fokú tagtól az alacsonyabb felé haladva - nőnek az $\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$ kitevőig.

Bizonyítás

Az állítás igaz a fákra. Alkalmazzunk indukciót az élek számára. Ha az összefüggő gráfnak több éle van, akkor kereshetünk egy kört, ennek egy éle legyen e. Alkalmazzuk a redukciós eljárást!

Állítás

Ha G összefüggő, akkor a $P_G(k)$ együtthatóinak abszolútértékei - a magasabb fokú tagtól az alacsonyabb felé haladva - nőnek az $\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$ kitevőig.

Bizonyítás

Az állítás igaz a fákra. Alkalmazzunk indukciót az élek számára. Ha az összefüggő gráfnak több éle van, akkor kereshetünk egy kört, ennek egy éle legyen e. Alkalmazzuk a redukciós eljárást! $P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.

Állítás

Ha G összefüggő, akkor a $P_G(k)$ együtthatóinak abszolútértékei - a magasabb fokú tagtól az alacsonyabb felé haladva - nőnek az $\lfloor \frac{n}{2} + 1 \rfloor$ kitevőig.

Bizonyítás

Az állítás igaz a fákra. Alkalmazzunk indukciót az élek számára. Ha az összefüggő gráfnak több éle van, akkor kereshetünk egy kört, ennek egy éle legyen e. Alkalmazzuk a redukciós eljárást!
$P_G(k) = P_{G-uv}(k) - P_{G/uv}(k)$.
Ha az előző bizonyításra gondolunk most is készen vagyunk, hiszen az új együtthatók abszolút értékei a két másik polinom megfelelő együtthatóinak abszolút értékeinek összegeként adódnak. Az előbbi két kisebb összege, a következő két nagyobb összege.

Következmény

Ha G n csúcsú összefüggő gráf, akkor a $P_G(k)$-ban az i-edik hatvány együtthatójának abszolútértéke legalább $\binom{n-1}{i-1}$.

Következmény

Ha G n csúcsú összefüggő gráf, akkor a $P_G(k)$-ban az i-edik hatvány együtthatójának abszolútértéke legalább $\binom{n-1}{i-1}$.

Bizonyítás

Már az n csúcsú fára is igaz az állítás, az előző bizonyítás alapján ez minden él hozzávételével csak nő.

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyütthatό 1.

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyüttható 1.
- A k^{n-1} együtthatója -m (m a G éleinek száma).

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyüttható 1.
- A k^{n-1} együtthatója -m (m a G éleinek száma).
- A szabad tag 0.

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyüttható 1.
- A k^{n-1} együtthatója -m (m a G éleinek száma).
- A szabad tag 0.
- Az együtthatók váltakozó előjelűek.

A kromatikus polinom néhány tulajdonsága:

- A $P_G(k)$ foka a G rendje.
- A főegyüttható 1.
- A k^{n-1} együtthatója -m (m a G éleinek száma).
- A szabad tag 0.
- Az együtthatók váltakozó előjelűek.
- A G összefüggő, akkor $P_G(k) \leq k(k-1)^{n-1}$ minden pozitív k-ra.

A következő felsorolt tulajdonságok sem jellemzik a kromatikus polinomot!

- $P_G(k)$-nak a 0 gyöke.
- Nincs negatív gyöke.
- Ha egy gyök racionális, akkor egész.
- A racionális (egész) gyökök a $0, 1, \cdots, \chi(G) - 1$ számok közül kerülhetnek ki.

A következő felsorolt tulajdonságok sem jellemzik a kromatikus polinomot!

- $P_G(k)$-nak a 0 gyöke.
- Nincs negatív gyöke.
- Ha egy gyök racionális, akkor egész.
- A racionális (egész) gyökök a $0, 1, \cdots, \chi(G) - 1$ számok közül kerülhetnek ki.

Tétel

Nincs egynél kisebb pozitív gyök.

A következő felsorolt tulajdonságok sem jellemzik a kromatikus polinomot!

- $P_G(k)$-nak a 0 gyöke.
- Nincs negatív gyöke.
- Ha egy gyök racionális, akkor egész.
- A racionális (egész) gyökök a $0, 1, \cdots, \chi(G) - 1$ számok közül kerülhetnek ki.

Tétel

Nincs egynél kisebb pozitív gyök.

Bizonyítás

Többet látunk be. Ha $0 < x < 1$ *és n páros, akkor* $P_G(x) < 0$*, ha n páratlan, akkor* $P_G(x) > 0$*. Feltehetjük, hogy G összefüggő. Fákra igaz az erősebb állítás. Ha egy kör élét elhagyjuk, akkor a redukciós összefüggésben a különbség előjele az indukciós feltevés miatt valóban az n paritásától függ.*

Egész gyökök

Emlékezzünk arra, a merev körű gráfoknak van perfekt eliminációs sémája. Fel lehet őket építeni oly módon, hogy az új csúcs mindig pontosan egy teljes részgráf összes csúcsához fog illeszkedni. Másrészt ha ez így van, akkor a merevkörű gráfok kromatikus polinomját ennek alapján el tudjuk képzelni. Tudni fogjuk milyen alakú lesz. Ha az építésben gondolkodunk, akkor az új csúcsot biztosan éppen annyi színnel nem színezhetjük, ahány elemű az a teljes gráf amelyhez illeszkedik.

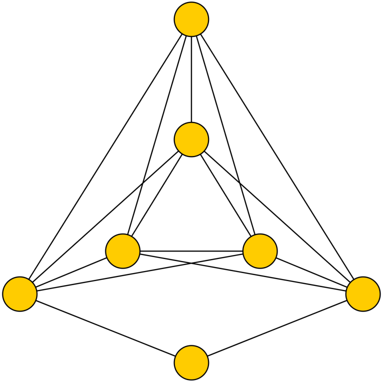
Egész gyökök

Emlékezzünk arra, a merev körű gráfoknak van perfekt eliminációs sémája. Fel lehet őket építeni oly módon, hogy az új csúcs mindig pontosan egy teljes részgráf összes csúcsához fog illeszkedni. Másrészt ha ez így van, akkor a merevkörű gráfok kromatikus polinomját ennek alapján el tudjuk képzelni. Tudni fogjuk milyen alakú lesz. Ha az építésben gondolkodunk, akkor az új csúcsot biztosan éppen annyi színnel nem színezhetjük, ahány elemű az a teljes gráf amelyhez illeszkedik.

Tétel

Ha G merevkörű gráf, akkor $P_G(k) = \bigcap_{i=1}^{n}(k - c_i)$*, ahol a nemnegatív* c_i *számok rendre a teljes gráfok méretét jelentik. Tehát a merevkörű gráfok kromatikus polinomjainak nemnegatív egész gyökei vannak.*

R.C. Read példája



Van-e olyan, csak egész gyökökkel rendelkező $P_G(k)$, melyre a G nem merevkörű gráf?

Van-e olyan, csak egész gyökökkel rendelkező $P_G(k)$, melyre a G nem merevkörű gráf?

Ez a 7 csúcsú gráf ilyen!

Van-e olyan, csak egész gyökökkel rendelkező $P_G(k)$, melyre a G nem merevkörű gráf?

Ez a 7 csúcsú gráf ilyen!

$P_R(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)^3(k-4)$.

Van-e olyan, csak egész gyökökkel rendelkező $P_G(k)$, melyre a G nem merevkörű gráf?

Ez a 7 csúcsú gráf ilyen!

$P_R(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)^3(k-4)$.

Read példája a legkisebb, csak egész gyökű kromatikus polinommal rendelkező nem merev körű gráf.

Kutatási problémák

- Határozzuk meg a négyzetrács, háromszögrács, hatszögrács - mint gráfosztály - egy részének kromatikus polinomját!

Kutatási problémák

- Határozzuk meg a négyzetrács, háromszögrács, hatszögrács - mint gráfosztály - egy részének kromatikus polinomját!
- Osztályozzuk - kis n-re - az egyszerű gráfokat a kromatikus polinom szerint. Vajon adott n-re melyik polinomhoz tartozik a legtöbb nem izomorf n csúcsú gráf?

Kutatási problémák

- Határozzuk meg a négyzetrács, háromszögrács, hatszögrács - mint gráfosztály - egy részének kromatikus polinomját!
- Osztályozzuk - kis n-re - az egyszerű gráfokat a kromatikus polinom szerint. Vajon adott n-re melyik polinomhoz tartozik a legtöbb nem izomorf n csúcsú gráf?
- Ha G 3-szorosan összefüggő és nem páros gráf, akkor nincs gyöke az $(1, 2)$ intervallumban. (Jackson sejtése, 1993)

Tartalomjegyzék:

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.
G éleit k-színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \cdots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.
G éleit k-színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \cdots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy ilyen jó címkézést k-színezésnek, vagy jó k-színezésnek mondunk. A csúcsok színezésénél a G esetleges párhuzamos éleinek nem volt szerepe, hiszen két csúcs különböző színt kellett, hogy kapjon akkor is ha csak egy él kötötte össze őket.

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.
G éleit k-színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \cdots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy ilyen jó címkézést k-színezésnek, vagy jó k-színezésnek mondunk. A csúcsok színezésénél a G esetleges párhuzamos éleinek nem volt szerepe, hiszen két csúcs különböző színt kellett, hogy kapjon akkor is ha csak egy él kötötte össze őket.

Az élek színezését vizsgálva általában nem kötjük ki G-ről, hogy egyszerű gráf, azonban a hurokélt nem engedjük meg.

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.
G éleit k-színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \cdots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy ilyen jó címkézést k-színezésnek, vagy jó k-színezésnek mondunk. A csúcsok színezésénél a G esetleges párhuzamos éleinek nem volt szerepe, hiszen két csúcs különböző színt kellett, hogy kapjon akkor is ha csak egy él kötötte össze őket.

Az élek színezését vizsgálva általában nem kötjük ki G-ről, hogy egyszerű gráf, azonban a hurokélt nem engedjük meg.
Ha u és v csúcsok között p él fut, akkor ezeket mind más-más színűre kell színeznünk.

Egy G gráf két éle szomszédos, ha van közös csúcsuk.
G éleit k-színezhetőnek mondjuk, ha létezik a G éleinek címkézése az $1, \cdots, k$ számokkal oly módon, hogy szomszédos élek különböző számot kapnak.

Egy ilyen jó címkézést k-színezésnek, vagy jó k-színezésnek mondunk. A csúcsok színezésénél a G esetleges párhuzamos éleinek nem volt szerepe, hiszen két csúcs különböző színt kellett, hogy kapjon akkor is ha csak egy él kötötte össze őket.

Az élek színezését vizsgálva általában nem kötjük ki G-ről, hogy egyszerű gráf, azonban a hurokélt nem engedjük meg.
Ha u és v csúcsok között p él fut, akkor ezeket mind más-más színűre kell színeznünk.

Definíció

Azt a legkisebb nemnegatív egész k számot, amelyre G k-színezhető $\chi'(G)$-vel jelöljük és élkromatikus számnak, vagy kromatikus indexnek nevezzük.

1-faktor

Állítás

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

1-faktor

Állítás

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

Egy színosztály a G-ben egy párosítás.
Az élszínezés a G éleinek partícionálása párosításokra.

1-faktor

Állítás

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

Egy színosztály a G-ben egy párosítás.
Az élszínezés a G éleinek partícionálása párosításokra.
Jelölje $\alpha'(G)$ a legnagyobb G-beli párosítás méretét.

Állítás

$\alpha'(G) \leq \frac{n}{2}$.

1-faktor

Állítás

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

Egy színosztály a G-ben egy párosítás.
Az élszínezés a G éleinek partícionálása párosításokra.
Jelölje $\alpha'(G)$ a legnagyobb G-beli párosítás méretét.

Állítás

$\alpha'(G) \leq \frac{n}{2}$.

Állítás

Ha G-nek van m ≥ 1 éle, akkor $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$ fennáll.

1-faktor

Állítás

$\Delta(G) \leq \chi'(G)$

A színosztályok a G éleinek független halmazai.

Egy színosztály a G-ben egy párosítás.
Az élszínezés a G éleinek partícionálása párosításokra.
Jelölje $\alpha'(G)$ a legnagyobb G-beli párosítás méretét.

Állítás

$\alpha'(G) \leq \frac{n}{2}$.

Állítás

Ha G-nek van $m \geq 1$ éle, akkor $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$ fennáll.

Általánosan, párhuzamos élekre is gondoljunk.

A kromatikus index.

Állítás

- *Az üres gráf kromatikus indexe nulla.*

A kromatikus index.

Állítás

- *Az üres gráf kromatikus indexe nulla.*
- $\chi'(P_t) = 2$, *egy út éleit alternálva színezhetjük.*

A kromatikus index.

Állítás

- *Az üres gráf kromatikus indexe nulla.*
- $\chi'(P_t) = 2$, *egy út éleit alternálva színezhetjük.*
- $\chi'(C_t) = 2$, *ha t páros,*

A kromatikus index.

Állítás

- *Az üres gráf kromatikus indexe nulla.*
- $\chi'(P_t) = 2$, *egy út éleit alternálva színezhetjük.*
- $\chi'(C_t) = 2$, *ha t páros,*

  $\chi'(C_t) = 3$, *ha t páratlan.*

A kromatikus index.

Állítás

- *Az üres gráf kromatikus indexe nulla.*
- $\chi'(P_t) = 2$, *egy út éleit alternálva színezhetjük.*
- $\chi'(C_t) = 2$, *ha t páros,*

  $\chi'(C_t) = 3$, *ha t páratlan.*
- $\chi'(T) = 2$, *hiszen indukcióval a T csúcsszámára könnyű belátni, hogy egy levél pontot bekötő él színezését a* $\Delta(T)$ *szín valamelyikével megtehetjük.*

Állítás

Egy páros gráf élgráfja perfekt. G kétrészes multigráf. $\chi'(G) = \Delta(G)$ fennáll.

Bizonyítás

Az üres gráfra teljesül. Bizonyítsunk az élszámra vonatkozó teljes indukcióval.

Állítás

Egy páros gráf élgráfja perfekt. G kétrészes multigráf. $\chi'(G) = \Delta(G)$ fennáll.

Bizonyítás

Az üres gráfra teljesül. Bizonyítsunk az élszámra vonatkozó teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy G egy $e = \{u, v\}$ élét elhagyva $G \setminus e$ $\Delta = \Delta(G)$ színnel élszínezhető.

Állítás

Egy páros gráf élgráfja perfekt. G kétrészes multigráf. $\chi'(G) = \Delta(G)$ fennáll.

Bizonyítás

Az üres gráfra teljesül. Bizonyítsunk az élszámra vonatkozó teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy G egy $e = \{u, v\}$ élét elhagyva $G \setminus e$ $\Delta = \Delta(G)$ színnel élszínezhető.

Jelölje S_u, S_v az u és v csúcsokhoz illeszkedő élekhez még fel nem használt színek halmazát.

Állítás

Egy páros gráf élgráfja perfekt. G kétrészes multigráf. $\chi'(G) = \Delta(G)$ *fennáll.*

Bizonyítás

Az üres gráfra teljesül. Bizonyítsunk az élszámra vonatkozó teljes indukcióval.

Tegyük fel, hogy G *egy* $e = \{u, v\}$ *élét elhagyva* $G \setminus e$ $\Delta = \Delta(G)$ *színnel élszínezhető.*

Jelölje S_u, S_v *az* u *és* v *csúcsokhoz illeszkedő élekhez még fel nem használt színek halmazát.*

Nyilván S_u *és* S_v *nem üresek, valamint ha metszetük nem lenne üres, belőlük bármely alkalmas lenne* e *kiszínezésére.*

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljünk ki egy-egy színt, S_u-ból a pirosat, S_v-ből a zöldet.

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljünk ki egy-egy színt, S_u-ból a pirosat, S_v-ből a zöldet.

Tekintsük a $H_u(p,z)$ részgráfot, amely áll az u-ból és a belőle piros vagy zöld éleken haladva elérhető csúcsokból és élekből a $G \setminus e$ gráfban.

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljünk ki egy-egy színt, S_u-ból a pirosat, S_v-ből a zöldet.

Tekintsük a $H_u(p,z)$ részgráfot, amely áll az u-ból és a belőle piros vagy zöld éleken haladva elérhető csúcsokból és élekből a $G \setminus e$ gráfban.
Ha ebben a v is benne lenne, akkor egy u-ból v-be vezető alternáló piros - zöld utat az e éllel kiegészítve páratlan kört kapnánk a kétrészes G-ben. Tehát v nincs $H_u(p,z)$-ben.

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljünk ki egy-egy színt, S_u-ból a pirosat, S_v-ből a zöldet.

Tekintsük a $H_u(p, z)$ részgráfot, amely áll az u-ból és a belőle piros vagy zöld éleken haladva elérhető csúcsokból és élekből a $G \setminus e$ gráfban.
Ha ebben a v is benne lenne, akkor egy u-ból v-be vezető alternáló piros - zöld utat az e éllel kiegészítve páratlan kört kapnánk a kétrészes G-ben. Tehát v nincs $H_u(p, z)$-ben.
Most cseréljük fel a színeket $H_u(p, z)$-ben!
Ezután az e élt kiszínezhetjük pirossal!
Elegendőnek bizonyult a $\Delta(G)$ szín.

Bizonyítás

(folyt.) Feltehető tehát, hogy a metszetük üres. Szemeljünk ki egy-egy színt, S_u-ból a pirosat, S_v-ből a zöldet.

Tekintsük a $H_u(p,z)$ részgráfot, amely áll az u-ból és a belőle piros vagy zöld éleken haladva elérhető csúcsokból és élekből a $G \setminus e$ gráfban.
Ha ebben a v is benne lenne, akkor egy u-ból v-be vezető alternáló piros - zöld utat az e éllel kiegészítve páratlan kört kapnánk a kétrészes G-ben. Tehát v nincs $H_u(p,z)$-ben.
Most cseréljük fel a színeket $H_u(p,z)$-ben!
Ezután az e élt kiszínezhetjük pirossal!
Elegendőnek bizonyult a $\Delta(G)$ szín.

Következmény

König tétele $\chi'(K_{n,m}) = max\{n,m\}$ fennáll.

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Legyen $G(H, T, E)$ *egy páros gráf, amely leírja a szituációt!*

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Legyen $G(H, T, E)$ egy páros gráf, amely leírja a szituációt!

H a hallgatók, T a tanárok halmaza. Kössünk össze egy hallgatót k éllel egy tanárral, ha nála k kurzusa van.

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Legyen $G(H, T, E)$ *egy páros gráf, amely leírja a szituációt!*

H a hallgatók, T a tanárok halmaza. Kössünk össze egy hallgatót k éllel egy tanárral, ha nála k kurzusa van.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ *a legkevesebb vizsgaalkalom, amennyire biztosan szükség van.*

Szigorú vizsgáztatás!

Példa

Egy szemeszter végén ha egy tanár k tárgyat tanított egy hallgatónak, akkor k szóbeli vizsgán kell résztvennie, amelyek egyenként t órásak.

Határozzuk meg a tanszék minimális, vizsgákra fordítandó idejét!

Legyen $G(H, T, E)$ *egy páros gráf, amely leírja a szituációt!*

H a hallgatók, T a tanárok halmaza. Kössünk össze egy hallgatót k éllel egy tanárral, ha nála k kurzusa van.

$\chi'(G) = \Delta(G)$ *a legkevesebb vizsgaalkalom, amennyire biztosan szükség van.*

Így ha t-vel szorzunk, megkapjuk a teljes időt.

Vizing tétele, 1964

Tétel

Egy G egyszerű gráf kromatikus indexe vagy a maximális fokszám, vagy eggyel több.

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Vizing tétele, 1964

Tétel

Egy G egyszerű gráf kromatikus indexe vagy a maximális fokszám, vagy eggyel több.

$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bizonyítás

Elegendő a felső korlátot igazolni.

Vizing tétele, 1964

Tétel

Egy G egyszerű gráf kromatikus indexe vagy a maximális fokszám, vagy eggyel több.
$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bizonyítás

Elegendő a felső korlátot igazolni.

Ha az állítás nem lenne igaz, akkor létezne minimális ellenpélda, vagyis olyan G egyszerű gráf, amelyre $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ teljesül, de bármely e élre $\chi'(G \setminus e) \leq \Delta(G \setminus e) + 1$ áll fenn.

Vizing tétele, 1964

Tétel

Egy G egyszerű gráf kromatikus indexe vagy a maximális fokszám, vagy eggyel több.
$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$

Bizonyítás

Elegendő a felső korlátot igazolni.

Ha az állítás nem lenne igaz, akkor létezne minimális ellenpélda, vagyis olyan G egyszerű gráf, amelyre $\chi'(G) > \Delta(G) + 1$ *teljesül, de bármely e élre* $\chi'(G \setminus e) \leq \Delta(G \setminus e) + 1$ *áll fenn.*

Jelölje röviden $\Delta = \Delta(G)$ *a maximális fokszámot és legyen* $e = \{u, v\}$ *egy rögzített él,* $H = G \setminus e$.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ *nagyságú S színhalmazból megtörtént.*

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ *nagyságú S színhalmazból megtörtént.*

Valamely csúcsnál hiányzó színnek mondjuk az s színt, ha ebben a színezésben neki nincs s színű illeszkedő éle.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ *nagyságú S színhalmazból megtörtént.*

Valamely csúcsnál hiányzó színnek mondjuk az s színt, ha ebben a színezésben neki nincs s színű illeszkedő éle.

Mivel több szín van S-ben mint a maximális fok, így minden csúcshoz tartozik egy vagy több hiányzó szín S-ből.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ *nagyságú S színhalmazból megtörtént.*

Valamely csúcsnál hiányzó színnek mondjuk az s színt, ha ebben a színezésben neki nincs s színű illeszkedő éle.

Mivel több szín van S-ben mint a maximális fok, így minden csúcshoz tartozik egy vagy több hiányzó szín S-ből.

Ha lenne u-nak és v-nek közös hiányzó színe, akkor az e-t ezzel kiszínezhetnénk.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel, hogy H színezése a $\Delta + 1$ *nagyságú S színhalmazból megtörtént.*

Valamely csúcsnál hiányzó színnek mondjuk az s színt, ha ebben a színezésben neki nincs s színű illeszkedő éle.

Mivel több szín van S-ben mint a maximális fok, így minden csúcshoz tartozik egy vagy több hiányzó szín S-ből.

Ha lenne u-nak és v-nek közös hiányzó színe, akkor az e-t ezzel kiszínezhetnénk.

Tegyük fel tehát, hogy nincs közös hiányzó színük. Ekkor próbáljunk úgy átszínezni, hogy az u-nak egy másik w szomszédjával legyen közös hiányzó színe.
Így kapnánk ellentmondást!

Bizonyítás

(folyt.) Induljunk tehát az $e_1 = \{u, v_1\}$ *élből és tegyük fel, hogy* $H = G \setminus e_1$ *egy* S *színezésében közös hiányzó színük nincs, de pl.* s *hiányzik* u*-nál,* t_1 *hiányzik* v_1*-nél.*

Bizonyítás

(folyt.) Induljunk tehát az $e_1 = \{u, v_1\}$ *élből és tegyük fel, hogy* $H = G \setminus e_1$ *egy* S *színezésében közös hiányzó színük nincs, de pl.* s *hiányzik* u*-nál,* t_1 *hiányzik* v_1*-nél.*

Ekkor az $e_2 = \{u, v_2\}$ *él lesz a* t_1 *színű* u*-nál.*
Hogy ne legyünk készen, v_2*-nél a* t_2 *lesz a hiányzó szín és hasonlóan definiálhatjuk rendre a* $v_1, v_2, \cdots, v_i$ *pontsorozatot, amelyek az* u *szomszédai, valamint egy* $t_1, t_2, \cdots, t_i$ *színsorozatot, melyre* t_i *hiányzik a* v_i*-nél és az* e_i u*-t és* v_i*-t köti össze, a színe pedig* t_{i-1}*.*

Bizonyítás

(folyt.) Induljunk tehát az $e_1 = \{u, v_1\}$ *élből és tegyük fel, hogy* $H = G \setminus e_1$ *egy* S *színezésében közös hiányzó színük nincs, de pl.* s *hiányzik* u*-nál,* t_1 *hiányzik* v_1*-nél.*

Ekkor az $e_2 = \{u, v_2\}$ *él lesz a* t_1 *színű* u*-nál.*
Hogy ne legyünk készen, v_2*-nél a* t_2 *lesz a hiányzó szín és hasonlóan definiálhatjuk rendre a* $v_1, v_2, \cdots, v_i$ *pontsorozatot, amelyek az* u *szomszédai, valamint egy* $t_1, t_2, \cdots, t_i$ *színsorozatot, melyre* t_i *hiányzik a* v_i*-nél és az* e_i u*-t és* v_i*-t köti össze, a színe pedig* t_{i-1}*.*

Legfeljebb egy t_i *színű él van, amely az* u*-hoz vagy a* v*-hez illeszkedik.*
Ha $v \notin \{v_1, v_2, \cdots, v_i\}$*, akkor legyen* $v = v_{i+1}$*, és a hiányzó szín legyen* t_{i+1}*.*
Ezek a sorozatok legfeljebb Δ *hosszúak.*
Legyenek v_k *és* t_k *az utolsó elemük.*

Bizonyítás

(folyt.) Az egyik oka lehet annak, hogy a sorozat megállt, hogy nincs u-nak olyan új szomszédja amelynek szintén van t_k színű illeszkedő éle.

Bizonyítás

(folyt.) Az egyik oka lehet annak, hogy a sorozat megállt, hogy nincs u-nak olyan új szomszédja amelynek szintén van t_k színű illeszkedő éle.

Színezzük át az éleket, kapjon az e_i, t_i színt $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Ekkor a G-t is ki tudtuk színezni Δ színnel.

Bizonyítás

(folyt.) Az egyik oka lehet annak, hogy a sorozat megállt, hogy nincs u-nak olyan új szomszédja amelynek szintén van t_k *színű illeszkedő éle.*

Színezzük át az éleket, kapjon az e_i, t_i *színt* $(i = 1, 2, \cdots, k)$. *Ekkor a G-t is ki tudtuk színezni* Δ *színnel.*

A másik ok, amiért elakadhatunk a sorozat folytatásában az az, hogy valamely $j < k$ *értékre a* v_k *hiányzó* t_k *színe megegyezik* t_{j-1}*-vel, az u-t és* v_j*-t összekötő* e_{j-1} *színével.*

Bizonyítás

(folyt.) Az egyik oka lehet annak, hogy a sorozat megállt, hogy nincs u-nak olyan új szomszédja amelynek szintén van t_k színű illeszkedő éle.

Színezzük át az éleket, kapjon az e_i, t_i színt $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Ekkor a G-t is ki tudtuk színezni Δ színnel.

A másik ok, amiért elakadhatunk a sorozat folytatásában az az, hogy valamely $j < k$ értékre a v_k hiányzó t_k színe megegyezik t_{j-1}-vel, az u-t és v_j-t összekötő e_{j-1} színével.

*Ebben az esetben a j előtti i-kre színezzük át e_i-t t_i színűre. Az $\{u, v_j\}$ él színét töröljük, a v_j hiányzó színe legyen legyen $t_{j-1} = t_k$.
A további élekkel már ne törődjünk. Így tehát minden G-beli él ki lesz színezve, kivéve $e_{j-1} = \{u, v_j\}$-t.*

Bizonyítás

(folyt.) A továbbiakban hozzájutunk egy olyan átszínezéshez, amelyben lesz olyan szín, amely hiányzó az u-nál is és a v_j*-nél is.*

Bizonyítás

(folyt.) A továbbiakban hozzájutunk egy olyan átszínezéshez, amelyben lesz olyan szín, amely hiányzó az u-nál is és a v_j-nél is.

Tekintsük a $G(s, t_k)$ részgráfot, amelyet a s-színű és a t_k színű élek és a végpontjaik alkotnak. A részgráf minden komponense vagy út, vagy kör.

Bizonyítás

(folyt.) A továbbiakban hozzájutunk egy olyan átszínezéshez, amelyben lesz olyan szín, amely hiányzó az u-nál is és a v_j-nél is.

Tekintsük a $G(s, t_k)$ részgráfot, amelyet a s-színű és a t_k színű élek és a végpontjaik alkotnak. A részgráf minden komponense vagy út, vagy kör.

Az s az u-nál hiányzó, a t_k pedig a v_j és a v_k-nál.

Bizonyítás

(folyt.) A továbbiakban hozzájutunk egy olyan átszínezéshez, amelyben lesz olyan szín, amely hiányzó az u-nál is és a v_j-nél is.

Tekintsük a $G(s, t_k)$ részgráfot, amelyet a s-színű és a t_k színű élek és a végpontjaik alkotnak. A részgráf minden komponense vagy út, vagy kör.

Az s az u-nál hiányzó, a t_k pedig a v_j és a v_k-nál.

A három említett csúcs foka a részgráfban legfeljebb 1. Emiatt ez a három csúcs nem lehet a $G(s, t_k)$ részgráf egy komponensében.

Bizonyítás

(folyt.) Két esetet különböztetünk meg.

1. eset

Az u és v_j csúcsok különböző komponensben vannak.

Bizonyítás

(folyt.) Két esetet különböztetünk meg.

1. eset

Az u és v_j csúcsok különböző komponensben vannak.

Az v_j-t tartalmazó komponensben cseréljük fel az s és a t_k színeket! Ekkor az s hiányzó lesz a v_j-nél.

Bizonyítás

(folyt.) Két esetet különböztetünk meg.

1. eset

Az u és v_j csúcsok különböző komponensben vannak.

Az v_j-t tartalmazó komponensben cseréljük fel az s és a t_k színeket! Ekkor az s hiányzó lesz a v_j-nél.

Mivel az s szín az u-nál is hiányzó, így jó lesz az e_{j-1}-t s-sel kiszínezni.

Bizonyítás

(folyt.)

2. eset

Az u és v_k csúcsok különböző komponensben vannak. Változtassuk meg az $\{u, v_i\}$ él színét t_i-re, minden k-nál kisebb i esetén!

Bizonyítás

(folyt.)

2. eset

Az u és v_k csúcsok különböző komponensben vannak. Változtassuk meg az $\{u, v_i\}$ él színét t_i-re, minden k-nál kisebb i esetén!

Az átszínezés nem hat ki $G(s, t_k)$-ra. Most az egyetlen színezetlen él G-ben az $\{u, v_k\}$. Mint az előbb, cseréljük meg az élek színét a v_k-t tartalmazó komponensben!

Bizonyítás

(folyt.)

2. eset

Az u és v_k csúcsok különböző komponensben vannak.
Változtassuk meg az $\{u, v_i\}$ él színét t_i-re, minden k-nál kisebb i esetén!

Az átszínezés nem hat ki $G(s, t_k)$-ra.
Most az egyetlen színezetlen él G-ben az $\{u, v_k\}$.
Mint az előbb, cseréljük meg az élek színét a v_k-t tartalmazó komponensben!

Ekkor az s hiányzó színe lesz a v_k-nak.
s-sel kiszínezhetjük az $\{u, v_k\}$ élt.

Bizonyítás

(folyt.)

2. eset

Az u és v_k csúcsok különböző komponensben vannak.
Változtassuk meg az $\{u, v_i\}$ él színét t_i-re, minden k-nál kisebb i esetén!

Az átszínezés nem hat ki $G(s, t_k)$-ra.
Most az egyetlen színezetlen él G-ben az $\{u, v_k\}$.
Mint az előbb, cseréljük meg az élek színét a v_k-t tartalmazó komponensben!

Ekkor az s hiányzó színe lesz a v_k-nak.
s-sel kiszínezhetjük az $\{u, v_k\}$ élt.

Ezzel ellentmondásra jutottunk, a G kiszínezhető Δ színnel.

Csak két osztály!

A maximális fokszám, vagy a következő szám egy egyszerű gráf kromatikus indexe.

Csak két osztály!

A maximális fokszám, vagy a következő szám egy egyszerű gráf kromatikus indexe.

Ez két osztályba sorolja az egyszerű gráfokat.
A páros körök élei kiszínezhetők 2 színnel, de a páratlan körök csak 3-mal!

- $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$
- $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$

Csak két osztály!

A maximális fokszám, vagy a következő szám egy egyszerű gráf kromatikus indexe.

Ez két osztályba sorolja az egyszerű gráfokat.
A páros körök élei kiszínezhetők 2 színnel, de a páratlan körök csak 3-mal!

- $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$
- $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$

Állítás

G $2n+1$ rendű, Δ-reguláris gráf, ekkor $\chi'(G) = \Delta + 1$ teljesül.

Csak két osztály!

A maximális fokszám, vagy a következő szám egy egyszerű gráf kromatikus indexe.

Ez két osztályba sorolja az egyszerű gráfokat.
A páros körök élei kiszínezhetők 2 színnel, de a páratlan körök csak 3-mal!

- $\chi'(K_{2n}) = 2n - 1$
- $\chi'(K_{2n+1}) = 2n + 1$

Állítás

G $2n+1$ rendű, Δ-reguláris gráf, ekkor $\chi'(G) = \Delta + 1$ teljesül.

Egy színosztályba nem eshet n-nél több él!

Tornák szervezése.

A körmérkőzéses versenyeket úgy próbálják lebonyolítani, hogy minél kevesebb forduló alatt elérjék, hogy mindenki játsszon mindenkivel egy mérkőzést.

Tornák szervezése.

A körmérkőzéses versenyeket úgy próbálják lebonyolítani, hogy minél kevesebb forduló alatt elérjék, hogy mindenki játsszon mindenkivel egy mérkőzést.

Ahhoz, hogy a Vizing - tétel erejével kapott minimális forduló számot el tudják érni, a párokba állítást meg kell szervezni.

Feladat

Adjuk meg a teljes gráfok élhalmazának párosításokra bontását úgy, hogy a lehető legkevesebb párosításból álljon!

Feladatok

- A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.
  A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

Feladatok

- A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.
  A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

  Egy jó versenyforma a páros játék.
  Bármely két játékos mint pár egy meccset játszik bármely másik két játékosból összeállított párral (összesen 15 meccsre kerül sor).

Feladatok

- A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.
  A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

  Egy jó versenyforma a páros játék.
  Bármely két játékos mint pár egy meccset játszik bármely másik két játékosból összeállított párral (összesen 15 meccsre kerül sor).

  Egyik pár sem akar egy napon egynél több meccset lejátszani.
  Legalább hány nap kell a lebonyolításhoz?

Feladatok

- A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.
  A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

  Egy jó versenyforma a páros játék.
  Bármely két játékos mint pár egy meccset játszik bármely másik két játékosból összeállított párral (összesen 15 meccsre kerül sor).

  Egyik pár sem akar egy napon egynél több meccset lejátszani.
  Legalább hány nap kell a lebonyolításhoz?

  Adjunk is meg egy menetrendet a meccsek lejátszására!

Feladatok

- A kollégiumban öten szeretnek teniszezni.
  A kieséses bajnokságot hamar elvetették.

  Egy jó versenyforma a páros játék.
  Bármely két játékos mint pár egy meccset játszik bármely másik két játékosból összeállított párral (összesen 15 meccsre kerül sor).

  Egyik pár sem akar egy napon egynél több meccset lejátszani.
  Legalább hány nap kell a lebonyolításhoz?

  Adjunk is meg egy menetrendet a meccsek lejátszására!

- Az előző tenisztorna lejátszásához legalább hány nap kell, ha senki nem akar egy napon egynél több meccset lejátszani?

- Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

- Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

  Egyszerre három fő játszhat a játék szabályai szerint.

- Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

  Egyszerre három fő játszhat a játék szabályai szerint.

  Abból lehet igazságos egyéni eredményt hirdetni, ha bármely 3 játékos játszik együtt azonos időtartamban (pl. egy órát).

- Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

  Egyszerre három fő játszhat a játék szabályai szerint.

  Abból lehet igazságos egyéni eredményt hirdetni, ha bármely 3 játékos játszik együtt azonos időtartamban (pl. egy órát).

  Hány nap alatt lehet lebonyolítani az egész tornát, ha egy napon mindenki legfeljebb k órában képes játszani a vizsgákra készülés miatt?

- Az ulti nevű népszerű magyar kártyajátékot n hallgató kedveli a kollégiumban.

  Egyszerre három fő játszhat a játék szabályai szerint.

  Abból lehet igazságos egyéni eredményt hirdetni, ha bármely 3 játékos játszik együtt azonos időtartamban (pl. egy órát).

  Hány nap alatt lehet lebonyolítani az egész tornát, ha egy napon mindenki legfeljebb k órában képes játszani a vizsgákra készülés miatt?

  Ki tud nagyobb (n,k) mátrixot kitölteni?

- Ha G 3-reguláris, hídmentes és 3-színezhető gráf, akkor egy jó élszínezés esetén bármely vágásban a három különböző színben megjelenő élek számának paritása megegyezik egymással.

- Ha G 3-reguláris, hídmentes és 3-színezhető gráf, akkor egy jó élszínezés esetén bármely vágásban a három különböző színben megjelenő élek számának paritása megegyezik egymással.
- Ha egy 3 reguláris G gráf nem kétszeresen élösszefüggő, akkor $\chi'(G) = 4$.

- Ha G 3-reguláris, hídmentes és 3-színezhető gráf, akkor egy jó élszínezés esetén bármely vágásban a három különböző színben megjelenő élek számának paritása megegyezik egymással.
- Ha egy 3 reguláris G gráf nem kétszeresen élösszefüggő, akkor $\chi'(G) = 4$.
- Ha a G gráfnak m éle van és $m > \Delta(G)\alpha'(G)$, akkor $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Az előző feladat szerint, ha egy gráfnak bizonyos értelemben túl sok éle van, akkor a Vizing - tétel szerinti 2. osztályba tartozik.

Az előző feladat szerint, ha egy gráfnak bizonyos értelemben túl sok éle van, akkor a Vizing - tétel szerinti 2. osztályba tartozik.

Bizonyítás

Korábban megjegyeztük, hogy triviálisan teljesül, hogy a maximális párosítás méretének és az élszínezés osztályai számának szorzata legalább az élek száma, $\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)}$.

$$\chi'(G) \geq \frac{m}{\alpha'(G)} > \frac{\Delta(G)\alpha'(G)}{\alpha'(G)} = \Delta(G),$$

vagyis $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Definíció

Az n csúcsú, m élű G gráf telített, ha $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$.

Definíció

Az n csúcsú, m élű G gráf telített, ha $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$.

Állítás

Ha n páros, akkor G nem lehet telített.

Definíció

Az n csúcsú, m élű G gráf telített, ha $m > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \Delta(G)$.

Állítás

Ha n páros, akkor G nem lehet telített.

Állítás

Minden telített gráf a 2. osztályban van.

Definíció

Az n csúcsú, m élű G gráf n'(páratlan) csúcsú, m' élű H részgráfja telített, ha $m' > \lfloor \frac{n'}{2} \rfloor \Delta(G) = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Definíció

Az n csúcsú, m élű G gráf n'(páratlan) csúcsú, m' élű H részgráfja telített, ha $m' > \lfloor \frac{n'}{2} \rfloor \Delta(G) = \Delta(G)\frac{n'-1}{2}$.

Állítás

Ha H a G telített részgráfja, akkor $\Delta(H) = \Delta(G)$ *fennáll, tehát a H önmagában is telített, vagyis H a 2. osztályban van..*

Állítás

Ha H a G egy telített részgráfja, akkor G a 2. osztályban van..

Az állítás nyilvánvaló, hiszen a kromatikus index monoton paraméter, a H a 2. osztályban van és $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Állítás

Ha H a G egy telített részgráfja, akkor G a 2. osztályban van..

Az állítás nyilvánvaló, hiszen a kromatikus index monoton paraméter, a H a 2. osztályban van és $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Egyrészt a fenti állítás miatt egy részgráf telítettsége miatt maga a gráf is a 2. osztályban van.

Állítás

Ha H a G egy telített részgráfja, akkor G a 2. osztályban van..

Az állítás nyilvánvaló, hiszen a kromatikus index monoton paraméter, a H a 2. osztályban van és $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Egyrészt a fenti állítás miatt egy részgráf telítettsége miatt maga a gráf is a 2. osztályban van.

Másrészt nyilván léteznek olyan gráfok, amelyeknek nincs valódi telített részgráfja.

Állítás

Ha H a G egy telített részgráfja, akkor G a 2. osztályban van..

Az állítás nyilvánvaló, hiszen a kromatikus index monoton paraméter, a H a 2. osztályban van és $\Delta(H) = \Delta(G)$.

Egyrészt a fenti állítás miatt egy részgráf telítettsége miatt maga a gráf is a 2. osztályban van.

Másrészt nyilván léteznek olyan gráfok, amelyeknek nincs valódi telített részgráfja.

Azonban vannak olyan gráfok is, amelyek a 2. osztályban vannak, de nincs telített részgráfjuk.
Ilyen pl. a Petersen-gráf hiszen páros rendű.

Az alábbi telítettségi sejtést Amanda G. Chetwynd és Anthony J. W. Hilton fogalmazta meg.

Az alábbi telítettségi sejtést Amanda G. Chetwynd és Anthony J. W. Hilton fogalmazta meg.

Sejtés

Legyen G maximális foka nagyobb, mint a csúcsszám harmada. Ekkor G pontosan akkor tartozik a 2. osztályba, ha G-nek van telített részgráfja.

Az alábbi telítettségi sejtést Amanda G. Chetwynd és Anthony J. W. Hilton fogalmazta meg.

Sejtés

Legyen G maximális foka nagyobb, mint a csúcsszám harmada. Ekkor G pontosan akkor tartozik a 2. osztályba, ha G-nek van telített részgráfja.

Ha a Petersen-gráfból törlünk egy csúcsot, még akkor is a 2. osztályban marad, nem tartalmaz telített részgráfot, és 9 csúcsú, 3 maximális fokszámú. Tehát a sejtés hasonló alakban nem erősíthető.

Szorosan kapcsolódik a telítettségi sejtés az 1-faktor sejtéshez.

Szorosan kapcsolódik a telítettségi sejtés az 1-faktor sejtéshez.

Sejtés

Ha G n (páros) rendű, Δ reguláris és $\Delta \geq \frac{n}{2}$, akkor G élhalmazát fel lehet bontani Δ teljes párosítás diszjunkt uniójára.
($\chi'(G) = \Delta(G)$)

Szorosan kapcsolódik a telítettségi sejtés az 1-faktor sejtéshez.

Sejtés

Ha G n (páros) rendű, Δ reguláris és $\Delta \geq \frac{n}{2}$, akkor G élhalmazát fel lehet bontani Δ teljes párosítás diszjunkt uniójára. $(\chi'(G) = \Delta(G))$

Tétel

A telítettségi sejtésből következne az 1-faktor sejtés.

Tartalomjegyzék:

f-színezések

Adott egy G gráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel.

f-színezések

Adott egy G gráf és egy *f* függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel.

Definíció

A G f-színezésének nevezünk az éleinek egy olyan színezését amelyre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcshoz legfeljebb $f(v)$ számú egyszínű él illeszkedik.
Azt a legkisebb k számot, amelyre létezik G-nek f-színezése k színnel a G f-kromatikus indexének nevezzük, jelölése $\chi'_f(G)$.

f-színezések

Adott egy G gráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel.

Definíció

A G f-színezésének nevezünk az éleinek egy olyan színezését amelyre teljesül, hogy minden $v \in V(G)$ csúcshoz legfeljebb $f(v)$ számú egyszínű él illeszkedik.
Azt a legkisebb k számot, amelyre létezik G-nek f-színezése k színnel a G f-kromatikus indexének nevezzük, jelölése $\chi'_f(G)$.

Ha az f minden csúcshoz egyet rendel, akkor a hagyományos élszínezésről van szó.

Felső korlátok

A Vizing tételhez hasonló tételek igazak $\chi'_f(G)$-re is. Jelölje

$$\Delta_f(G) = max_{v \in V(G)}\{\lceil \frac{d(v)}{f(v)} \rceil\}$$

a maximális fokszám általánosítását.

Felső korlátok

A Vizing tételhez hasonló tételek igazak $\chi'_f(G)$-re is. Jelölje

$$\Delta_f(G) = max_{v \in V(G)}\{\lceil \frac{d(v)}{f(v)} \rceil\}$$

a maximális fokszám általánosítását.

Lemma

Legyen G egyszerű gráf. Ekkor a G f-kromatikus számára fennáll a

$$\Delta_f(G) \leq \chi'_f(G) \leq max_{v \in V(G)}\{\lceil \frac{d(v)+1}{f(v)} \rceil\} \leq \Delta_f(G) + 1$$

egyenlőtlenség.

A G egyszerű gráfokat most is két osztályba lehet sorolni, C_f1-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$, valamint C_f2-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1$.

A G egyszerű gráfokat most is két osztályba lehet sorolni, C_f1-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$, valamint C_f2-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1$.

Tétel (Hakimi és Kariv, 1986)

Ha G páros gráf, akkor $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$.

A G egyszerű gráfokat most is két osztályba lehet sorolni, C_f1-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$, valamint C_f2-be, ha $\chi'_f(G) = \Delta_f(G) + 1$.

Tétel (Hakimi és Kariv, 1986)

Ha G páros gráf, akkor $\chi'_f(G) = \Delta_f(G)$.

Tétel (Hakimi és Kariv, 1986)

G egyszerű gráf és az f függvény minden csúcshoz páros számot rendel. G ekkor is C_f1-be tartozik.

Legyen

$$V_0(G) = \{v : \Delta_f(G) = \frac{d(v)}{f(v)}, v \in V(G)\}$$

azon csúcsok halmaza, amelyeknél a $\Delta_f(G)$ definíciójában az egyenlőség adódik. A definiált halmaz üres, ha a hányadosok közül a maximális nem egész szám.

Jelölje $d_f(v) = \frac{d(v)}{f(v)}$ a v csúcs f-arányát.

Legyen

$$V_0(G) = \{v : \Delta_f(G) = \frac{d(v)}{f(v)}, v \in V(G)\}$$

azon csúcsok halmaza, amelyeknél a $\Delta_f(G)$ definíciójában az egyenlőség adódik. A definiált halmaz üres, ha a hányadosok közül a maximális nem egész szám.
Jelölje $d_f(v) = \frac{d(v)}{f(v)}$ a v csúcs f-arányát.

Tétel (Zhang és Liu, 2005)

A G egyszerű gráfra

$$V_0(G) = \emptyset \Leftrightarrow G \in C_f 1$$

.

Definíció

A $V_0(G)$ csúcshalmaz által feszített G_{Δ_f} részgráfot a G f-magjának nevezzük.

Definíció

A $V_0(G)$ csúcshalmaz által feszített G_{Δ_f} részgráfot a G f-magjának nevezzük.

Tétel (Zhang és Liu, 2006)

A G egyszerű gráf a $C_f 1$ osztályba tartozik, ha G_{Δ_f} egy erdő.

Definíció

A G gráfot $\Delta_f(G)$-meghámozhatónak nevezzük, ha a G összes u csúcsát egymás után levághatjuk úgy, hogy amikor az u levágása történik legfeljebb egy szomszédja marad, amelynek az f-aránya $\Delta_f(G)$.

Tétel (Zhang és Liu)

A G egyszerű gráf. Ha G $\Delta_f(G)$-meghámozható, akkor a $C_f 1$ osztályba tartozik.

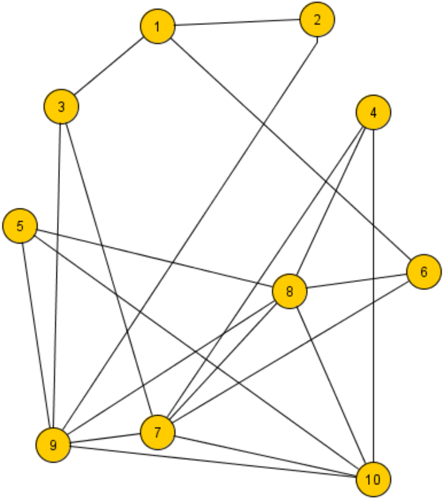
Ha a G gráf f-magja erdő, akkor G $\Delta_f(G)$-meghámozható, mivel a $V_0(G)$ csúcsait egyesével levághatjuk, minden lépésben levél pontot választva, annak legfeljebb 1 szomszédja marad G_{Δ_f}-ben.

Ha a G gráf f-magja erdő, akkor G $\Delta_f(G)$-meghámozható, mivel a $V_0(G)$ csúcsait egyesével levághatjuk, minden lépésben levél pontot választva, annak legfeljebb 1 szomszédja marad G_{Δ_f}-ben.

Több is igaz, nem csak a fa-magú gráfok meghámozhatók.

Példa

A 10 csúcsú G példához az első 5 csúcsra $f(v_i) = 1$, a következő 5 csúcsra $f(v_i) = 2$.
Így $\Delta_f(G) = 3$.
$V_0(G) = \{v_1, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9\}$.
A G gráf $\Delta_f(G)$-meghámozható, ugyanis a csúcsokat sorszám szerint eltávolíthatjuk!


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Mi mondható a teljes gráfra?

Mi mondható a teljes gráfra?

Tétel (Zhang és Liu, 2005)

Ha a K_n teljes gráf minden v csúcsára $f(v) = k$ és $k|(n-1)$, akkor K_n a C_f2 osztályba tartozik, egyébként a C_f1 osztályba.

Mit mondhatunk a reguláris gráfokra?

Mi mondható a teljes gráfra?

Tétel (Zhang és Liu, 2005)

Ha a K_n teljes gráf minden v csúcsára $f(v) = k$ és $k|(n-1)$, akkor K_n a C_f2 osztályba tartozik, egyébként a C_f1 osztályba.

Mit mondhatunk a reguláris gráfokra?

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

A $\Delta(G)$-reguláris G gráf az első osztályban van, ha f_{min} páros szám, vagy nem osztója $\Delta(G)$-nak (f_{min} a legkisebb érték, amit az f egy csúcshoz rendelt).

Mi mondható a teljes gráfra?

Tétel (Zhang és Liu, 2005)

Ha a K_n teljes gráf minden v csúcsára $f(v) = k$ és $k|(n-1)$, akkor K_n a C_f2 osztályba tartozik, egyébként a C_f1 osztályba.

Mit mondhatunk a reguláris gráfokra?

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

A $\Delta(G)$-reguláris G gráf az első osztályban van, ha f_{min} páros szám, vagy nem osztója $\Delta(G)$-nak (f_{min} a legkisebb érték, amit az f egy csúcshoz rendelt).

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

A G $\Delta(G) = 2n+1$-reguláris gráf és az f minden csúcshoz a $(2s+1)$ páratlan számot rendeli. Ha $(2s+1)|\Delta(G)$, akkor G a második osztályban van.

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

Legyen G egy n rendű, Δ-reguláris, nem teljes gráf. Egyetlen w csúcsban $f(w) > f_{min}$. G pontosan akkor van C_f1-ben, ha $G \setminus w$ is.

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

Legyen G egy n rendű, Δ-reguláris, nem teljes gráf. Egyetlen w csúcsban $f(w) > f_{min}$. G pontosan akkor van C_f1-ben, ha $G \setminus w$ is.

Tétel (Zhang, Wang és Liu)

Legyen G páros rendű, nem teljes, Δ-reguláris gráf. Az f függvény minden csúcshoz ugyanazt rendeli. Ekkor G pontosan akkor tartozik C_f1-be, ha bármely csúcsát törölve is az első osztályba tartozik.

Probléma

Találjunk a fentiekhez hasonló állítást Δ-reguláris gráfokra, amikor $f_{min}|\Delta$ és f_{min} páratlan!

Probléma

Találjunk a fentiekhez hasonló állítást Δ*-reguláris gráfokra, amikor* $f_{min}|\Delta$ *és* f_{min} *páratlan!*

Probléma

Mely gráfosztályok tartoznak a C_f1 *osztályba bármely pozitív egész f függvényre?*

Probléma

Találjunk a fentiekhez hasonló állítást Δ-reguláris gráfokra, amikor $f_{min}|\Delta$ és f_{min} páratlan!

Probléma

Mely gráfosztályok tartoznak a C_f1 osztályba bármely pozitív egész f függvényre?

Probléma

Adjunk szükséges és elégséges feltételeket arra, vajon mely G egyszerű gráf tartozik C_f1-be és C_f2-be

Szövegek továbbítása

Az élszínezési problémák vizsgálatának egyik gyakorlati motivációja a számítógépek közötti szövegek átküldésének problémája.

Szövegek továbbítása

Az élszínezési problémák vizsgálatának egyik gyakorlati motivációja a számítógépek közötti szövegek átküldésének problémája.

Tegyük fel ugyanis, hogy a v számítógépnek $f(v)$ kommunikációs portja van.

Szövegek továbbítása

Az élszínezési problémák vizsgálatának egyik gyakorlati motivációja a számítógépek közötti szövegek átküldésének problémája.

Tegyük fel ugyanis, hogy a v számítógépnek $f(v)$ kommunikációs portja van.

Bármely komputer-párhoz adott, hány fájlt kell a gépek között átküldeni. A feladat az átküldések ütemezése. Célunk a leggyorsabb teljes állománycsere.

Szövegek továbbítása

Az élszínezési problémák vizsgálatának egyik gyakorlati motivációja a számítógépek közötti szövegek átküldésének problémája.

Tegyük fel ugyanis, hogy a v számítógépnek $f(v)$ kommunikációs portja van.

Bármely komputer-párhoz adott, hány fájlt kell a gépek között átküldeni. A feladat az átküldések ütemezése. Célunk a leggyorsabb teljes állománycsere.

Feltéve, hogy mindegyik fájl azonos hosszú (az átküldések azonos ideig tartanak) éppen az f-színezés a megfelelő modell.

A G multigráf csúcsai legyenek a hálózat aktív pontjai, a számítógépek.

A G multigráf csúcsai legyenek a hálózat aktív pontjai, a számítógépek.

Mindegyik fájlnak feleljen meg egy él a két gép között. Az időt mérjük egy fájl átküldési idejében, legyen ez az egység.

A G multigráf csúcsai legyenek a hálózat aktív pontjai, a számítógépek.

Mindegyik fájlnak feleljen meg egy él a két gép között. Az időt mérjük egy fájl átküldési idejében, legyen ez az egység.

Az éleket - vagyis a fájlokat - színezzük meg az egységnyi időintervallumokkal. Mindegyik azt a színt kapja, amikor átküldjük. Egy v gép egyszerre - egy színben - legfeljebb $f(v)$ fájlt küldhet, illetve fogadhat.

A G multigráf csúcsai legyenek a hálózat aktív pontjai, a számítógépek.

Mindegyik fájlnak feleljen meg egy él a két gép között. Az időt mérjük egy fájl átküldési idejében, legyen ez az egység.

Az éleket - vagyis a fájlokat - színezzük meg az egységnyi időintervallumokkal. Mindegyik azt a színt kapja, amikor átküldjük. Egy v gép egyszerre - egy színben - legfeljebb $f(v)$ fájlt küldhet, illetve fogadhat.

Az f-színezési problémában minimális számú szín felhasználását szeretnénk.
Ez megfelel az átküldés összes ideje minimalizálásának.

fg-színezés

A szövegek továbbításának problémája természetes módon általánosabbá válik, ha figyelembe vesszük a kommunikációs csatornák kapacitását is.

fg-színezés

A szövegek továbbításának problémája természetes módon általánosabbá válik, ha figyelembe vesszük a kommunikációs csatornák kapacitását is.
Adott egy G multigráf és egy *f* függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel, valamint adott egy *g* függvény, amely mindegyik csúcspárhoz egy-egy pozitív egészet rendel.

fg-színezés

A szövegek továbbításának problémája természetes módon általánosabbá válik, ha figyelembe vesszük a kommunikációs csatornák kapacitását is.
Adott egy G multigráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel, valamint adott egy g függvény, amely mindegyik csúcspárhoz egy-egy pozitív egészet rendel.

Definíció

A G multigráf olyan f-színezését, amelyben be kell tartanunk azt is, hogy gép párok között $g(uv)$ felülről korlátozza az u és v csúcsok közötti $E(uv)$ párhuzamos élhalmazban előforduló azonosan színezett élek számát, fg-színezésnek nevezzük.

fg-színezés

A szövegek továbbításának problémája természetes módon általánosabbá válik, ha figyelembe vesszük a kommunikációs csatornák kapacitását is.
Adott egy G multigráf és egy f függvény, amely G csúcsaihoz pozitív egészeket rendel, valamint adott egy g függvény, amely mindegyik csúcspárhoz egy-egy pozitív egészet rendel.

Definíció

A G multigráf olyan f-színezését, amelyben be kell tartanunk azt is, hogy gép párok között $g(uv)$ felülről korlátozza az u és v csúcsok közötti $E(uv)$ párhuzamos élhalmazban előforduló azonosan színezett élek számát, fg-színezésnek nevezzük.
Azt a legkisebb számot, amennyi szín elegendő a G multigráf fg-színezéséhez a G fg-kromatikus indexének nevezzük és $\chi'_{fg}(G)$ -vel jelöljük.

Felső korlátok az általános esetben

Tétel (Vizing, Gupta)

Minden nemüres multigráfra $\chi'(G) \leq \max_{v,w \in V(G)}\{d(w + p(vw))\}$, *ahol* $p(vw)$ *a párhuzamos élek száma a két csúcs között.*

Felső korlátok az általános esetben

Tétel (Vizing, Gupta)

Minden nemüres multigráfra $\chi'(G) \leq \max_{v,w \in V(G)}\{d(w + p(vw))\}$, *ahol* $p(vw)$ *a párhuzamos élek száma a két csúcs között.*

Tétel (Shannon)

A G multigráfra $\chi'(G) \leq \frac{3\Delta(G)}{2}$*.(Shannon)*

Egy H multigráfban nyilvánvalóan legfeljebb $\lfloor\frac{|V(H)|}{2}\rfloor$ élt tartalmazhat egy párosítás, tehát ez egy színosztály méretének is felső korlátja.

Egy H multigráfban nyilvánvalóan legfeljebb $\lfloor\frac{|V(H)|}{2}\rfloor$ élt tartalmazhat egy párosítás, tehát ez egy színosztály méretének is felső korlátja. Legyen

$$I(G) = \max_{H\subseteq G, |V(H)|\geq 3} \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor\frac{|V(H)|}{2}\rfloor} \rceil.$$

Nyilvánvalóan $I(G) \leq \chi'(G)$

Egy H multigráfban nyilvánvalóan legfeljebb $\lfloor \frac{|V(H)|}{2} \rfloor$ élt tartalmazhat egy párosítás, tehát ez egy színosztály méretének is felső korlátja. Legyen

$$l(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 3} \left\lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{|V(H)|}{2} \rfloor} \right\rceil.$$

Nyilvánvalóan $l(G) \leq \chi'(G)$

Tétel (Nishizeki, T., Kashiwagi, K., 1990)

$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \lfloor \frac{11\Delta(G)+8}{10} \rfloor\}$.

Sejtés (Goldberg sejtése)

Minden $5 \leq k$ *páratlan egészre fennáll a*

$$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \lfloor \frac{k\Delta(G) + (k-3)}{k-1} \rfloor\}$$

felső becslés.

Sejtés (Goldberg sejtése)

Minden $5 \leq k$ *páratlan egészre fennáll a*

$$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \lfloor \frac{k\Delta(G) + (k-3)}{k-1} \rfloor\}$$

felső becslés.

Sejtés (Goldberg és Seymour sejtése)

$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \Delta(G) + 1\}$.

Sejtés (Goldberg sejtése)

Minden $5 \leq k$ páratlan egészre fennáll a

$$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \lfloor \frac{k\Delta(G) + (k-3)}{k-1} \rfloor\}$$

felső becslés.

Sejtés (Goldberg és Seymour sejtése)

$\chi'(G) \leq \max\{l(G), \Delta(G) + 1\}$.

f-színezésre a korábbi, egyszerű gráfokra vonatkozó állításhoz hasonló igaz.

Tétel (Hakimi és Kariv)

Minden G multigráfra

$$\chi'_f(G) \leq \max_{v,w \in V(G)} \lceil \frac{d(v) + p(vw)}{f(v)} \rceil$$

teljesül.

Visszakapunk egy másik korábbi állítást, ha az f függvény azonosan 1.

Tétel (Hakimi és Kariv)

Minden G multigráfra

$$\chi'_f(G) \leq \max_{v,w \in V(G)} \lceil \frac{d(v) + p(vw)}{f(v)} \rceil$$

teljesül.

Visszakapunk egy másik korábbi állítást, ha az f függvény azonosan 1. Legyen

$$l_f(G) = \max_{H \subseteq G, |V(H)| \geq 3} \lceil \frac{|E(H)|}{\lfloor \frac{\sum_{v \in V(H)} f(v)}{2} \rfloor} \rceil.$$

Tétel (Nakano, S., Nishizeki, T., Saito, N.)

$\chi'_f(G) \leq \max\{l_f(G), \lfloor \frac{9\Delta_f(G)+6}{8} \rfloor\}.$

fg-színezés

Tétel (Nakano, S., Nishizeki, T.)

$\chi'_{fg}(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta_{fg}(G)}{2} \rfloor,$

fg-színezés

Tétel (Nakano, S., Nishizeki, T.)

$\chi'_{fg}(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta_{fg}(G)}{2} \rfloor$,

ahol
$\Delta_{fg}(G) = \max\{\Delta_f(G), \Delta_g(G)\}$, valamint
$\Delta_f(G) = \max_{v \in V(G)} \lceil \frac{d(v)}{f(v)} \rceil$, és
$\Delta_g(G) = \max_{vw \in E(G)} \lceil \frac{p(vw)}{g(vw)} \rceil$.

g-éllefedő színezések

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen

g-éllefedő színezések

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen

Speciálisan, ha $g(v) = 1$ minden csúcsra, akkor éllefedő színezésről beszélünk.

g-éllefedő színezések

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen
Speciálisan, ha $g(v) = 1$ minden csúcsra, akkor éllefedő színezésről beszélünk.
Ellentétben az eddigi színezési problémákkal itt kevesebb színnel könnyebb teljesíteni a feltételt.

g-éllefedő színezések

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen
Speciálisan, ha $g(v) = 1$ minden csúcsra, akkor éllefedő színezésről beszélünk.
Ellentétben az eddigi színezési problémákkal itt kevesebb színnel könnyebb teljesíteni a feltételt.

Definíció

Jelölje $\chi'_{gc}(G)$ azt a legnagyobb k számot, melyre létezik a G-nek g-éllefedő színezése k színnel. Ha a g függvény azonosan 1 a csúcsokra, akkor $\chi'_c(G)$ jelenti az éllefedő színezési számot.

g-éllefedő színezések

A G éleinek színezésekor írjuk elő, hogy minden v csúcsnál mindegyik színű élből legalább $g(v)$ legyen
Speciálisan, ha $g(v) = 1$ minden csúcsra, akkor éllefedő színezésről beszélünk.
Ellentétben az eddigi színezési problémákkal itt kevesebb színnel könnyebb teljesíteni a feltételt.

Definíció

Jelölje $\chi'_{gc}(G)$ azt a legnagyobb k számot, melyre létezik a G-nek g-éllefedő színezése k színnel. Ha a g függvény azonosan 1 a csúcsokra, akkor $\chi'_c(G)$ jelenti az éllefedő színezési számot.

Vezessük be a $\mu(v) = \max\{p(uv) : u \in V(G)\}$ jelölést és legyen $\mu(G) = \max\{\mu(v) : v \in V(G)\}$, ahol $p(uv)$ az u és v csúcsok közötti párhuzamos élek számát jelöli).

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min\{\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \rfloor : v \in V(G)\}$.

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min\{\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \rfloor : v \in V(G)\}$.
Egy adott C élszínezésre legyen $E(i)$ az i színt kapott élek halmaza.
Jelölje $i_C(v)$ a C színezésnél a v-hez illeszkedő i színű élek számát.

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min\{\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \rfloor : v \in V(G)\}$.
Egy adott C élszínezésre legyen $E(i)$ az i színt kapott élek halmaza.
Jelölje $i_C(v)$ a C színezésnél a v-hez illeszkedő i színű élek számát.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G egy páros gráf.

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min\{\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \rfloor : v \in V(G)\}$.
Egy adott C élszínezésre legyen $E(i)$ az i színt kapott élek halmaza.
Jelölje $i_C(v)$ a C színezésnél a v-hez illeszkedő i színű élek számát.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G egy páros gráf. Ekkor $\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$.

Tétel (Gupta, 1974)

Minden G multigráfra
$\min\{d(v) - \mu(v) : v \in V(G)\} \leq \chi'_c(G) \leq \delta(G)$.

Legyen $\delta_g(G) = \min\{\lfloor \frac{d_G(v)}{g(v)} \rfloor : v \in V(G)\}$.
Egy adott C élszínezésre legyen $E(i)$ az i színt kapott élek halmaza.
Jelölje $i_C(v)$ a C színezésnél a v-hez illeszkedő i színű élek számát.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G egy páros gráf. Ekkor $\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$. Továbbá, ha $\chi'_{gc}(G) = k \geq 2$, akkor létezik olyan g-éllefedő C színezése G-nek, melyre $||E(i)| - |E(j)|| \leq 1$, bármely $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ esetén, valamint teljesül még az $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$ is minden $v \in V(G)$ csúcs és $i, j \in \{1, \cdots, k\}$ esetén.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha $g(v)$ pozitív páros szám minden csúcsra, akkor
$\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$ *teljesül.*

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha $g(v)$ pozitív páros szám minden csúcsra, akkor
$\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$ *teljesül.*

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ feltétel minden csúcsra teljesül, akkor $\chi'_{gc}(G) \geq \min_{v \in V(G)}\{\lfloor \frac{d(v)-\mu(v)}{g(v)} \rfloor\}$.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha $g(v)$ pozitív páros szám minden csúcsra, akkor $\chi'_{gc}(G) = \delta_g(G)$ teljesül.

Tétel (Song és Liu, 2005)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ feltétel minden csúcsra teljesül, akkor $\chi'_{gc}(G) \geq \min_{v \in V(G)}\{\lfloor \frac{d(v)-\mu(v)}{g(v)} \rfloor\}$.

Vezessük be a következő jelölést: $\delta'_g(G) = \min_{v \in V(G)}\{\lfloor \frac{d(v)-1}{g(v)} \rfloor\}$.

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ *feltétel minden csúcsra teljesül és* $1 \leq \delta'_g(G) \leq 4$ *is fennáll, akkor*

$$\chi'_{gc}(G) \geq \delta'_g(G).$$

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ *feltétel minden csúcsra teljesül és* $1 \leq \delta'_g(G) \leq 4$ *is fennáll, akkor*

$$\chi'_{gc}(G) \geq \delta'_g(G).$$

Szokás egy gráfot $gc1$ osztályban lévőnek mondani, ha teljesül rá a $\chi'_{gc}(G) = \delta'_g(G)$ egyenlőség, egyébként pedig $gc2$ osztályúnak.

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen G tetszőleges gráf. Ha az $1 \leq g(v) \leq d(v)$ *feltétel minden csúcsra teljesül és* $1 \leq \delta'_g(G) \leq 4$ *is fennáll, akkor*

$$\chi'_{gc}(G) \geq \delta'_g(G).$$

Szokás egy gráfot *gc*1 osztályban lévőnek mondani, ha teljesül rá a $\chi'_{gc}(G) = \delta'_g(G)$ egyenlőség, egyébként pedig *gc*2 osztályúnak.

Egy G egyszerű gráfot gc-kritikusnak mondunk, ha a G a *gc*2 osztályban van és $\chi'_{gc}(G + e) > \chi'_{gc}(G)$ minden új élre.

Probléma

Jellemezzük azokat a G gráfokat, amelyek a $gc1$ osztályban vannak!

Probléma

Milyen tulajdonságaik vannak a gc-kritikus gráfoknak?

Alsó és felső korlátok a csúcsoknál

Definíció

Egy G gráfnak a (g,f)-színezése egy olyan élszínezése, amelyre teljesül, hogy minden v csúcsnál, minden színű élből előfordul legalább $g(v)$, de legfeljebb $f(g)$.

Alsó és felső korlátok a csúcsoknál

Definíció

Egy G gráfnak a (g,f)-színezése egy olyan élszínezése, amelyre teljesül, hogy minden v csúcsnál, minden színű élből előfordul legalább $g(v)$, de legfeljebb $f(g)$.

Jelölje $\chi'_{gf}(G)$ azt a legkisebb k számot, melyre létezik G-nek (g,f)-színezése k színnel.
$\chi'_{gf}(G)$-t a G (g,f)-kromatikus indexének nevezzük.

Alsó és felső korlátok a csúcsoknál

Definíció

Egy G gráfnak a (g,f)-színezése egy olyan élszínezése, amelyre teljesül, hogy minden v csúcsnál, minden színű élből előfordul legalább $g(v)$, de legfeljebb $f(g)$.

Jelölje $\chi'_{gf}(G)$ azt a legkisebb k számot, melyre létezik G-nek (g,f)-színezése k színnel.
$\chi'_{gf}(G)$-t a G (g,f)-kromatikus indexének nevezzük.

Azt a legnagyobb k számot, melyre létezik G-nek (g,f)-színezése k színnel, $\overline{\chi'}_{gf}(G)$-vel jelöljük és a G felső (g,f)-kromatikus indexének nevezzük.

(g,f)-faktor

Definíció

A G egy H részgráfját a G (g,f)-faktorának nevezzük, ha $|V(H)| = |V(G)|$ *és* $g(v) \leq d_H(v) \leq f(v)$ *minden v csúcsra teljesül.*

(g,f)-faktor

Definíció

A G egy H részgráfját a G (g,f)-faktorának nevezzük, ha $|V(H)| = |V(G)|$ és $g(v) \leq d_H(v) \leq f(v)$ minden v csúcsra teljesül. Ha a G maga is egy (g,f)-faktora önmagának, akkor a G-t (g,f)-gráfnak hívjuk.

(g,f)-faktor

Definíció

A G egy H részgráfját a G (g,f)-faktorának nevezzük, ha $|V(H)| = |V(G)|$ és $g(v) \leq d_H(v) \leq f(v)$ minden v csúcsra teljesül. Ha a G maga is egy (g,f)-faktora önmagának, akkor a G-t (g,f)-gráfnak hívjuk.
Legyen $\Delta_f(G) = \max\{\lceil \frac{d_G(v))}{f(v)} \rceil : v \in V(G)\}$.
A G gráf egy (g,f)-faktorizációja az éleknek egy olyan $F_1, \ldots, F_m$ partíciója, melyre mindegyik F_i egy (g,f)-faktor.

(g,f)-faktor

Definíció

A G egy H részgráfját a G (g,f)-faktorának nevezzük, ha $|V(H)| = |V(G)|$ és $g(v) \le d_H(v) \le f(v)$ minden v csúcsra teljesül. Ha a G maga is egy (g,f)-faktora önmagának, akkor a G-t (g,f)-gráfnak hívjuk.

Legyen $\Delta_f(G) = \max\{\lceil \frac{d_G(v))}{f(v)} \rceil : v \in V(G)\}$.

A G gráf egy (g,f)-faktorizációja az éleknek egy olyan $F_1, \ldots, F_m$ partíciója, melyre mindegyik F_i egy (g,f)-faktor.

Egy G-nek pontosan akkor van (g,f)-színezése, ha az éleinek van (g,f) partíciója.

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen a G egy gráf, g és f nemnegatív egész értékű függvények a csúcsokon és $g(v) \leq f(g)$ *minden csúcsra.*

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen a G egy gráf, g és f nemnegatív egész értékű függvények a csúcsokon és $g(v) \leq f(g)$ minden csúcsra.
Ha G-nek létezik (g,f) színezése, akkor

$$\chi'_f(G) \leq \chi'_{gf}(G) \leq \overline{\chi'}_{gf}(G) \leq \chi'_{gc}(G)$$

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen a G egy gráf, g és f nemnegatív egész értékű függvények a csúcsokon és $g(v) \leq f(g)$ minden csúcsra.
Ha G-nek létezik (g,f) színezése, akkor

$$\chi'_f(G) \leq \chi'_{gf}(G) \leq \overline{\chi'}_{gf}(G) \leq \chi'_{gc}(G)$$

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen G egy egyszerű gráf. Tegyük fel, hogy
$\chi'_f(G) = \max_{v \in V(G)}\{\lceil \frac{d(v)+1}{f(v)} \rceil\}$,
$\chi'_{gc}(G) = \min_v \in V(G)\{\lfloor \frac{d(v)-1}{g(v)} \rfloor\}$, *és*
$\chi'_{gc}(G) \geq \chi'_f(G)$ *teljesül.*

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen a G egy gráf, g és f nemnegatív egész értékű függvények a csúcsokon és $g(v) \leq f(g)$ minden csúcsra.
Ha G-nek létezik (g,f) színezése, akkor

$$\chi'_f(G) \leq \chi'_{gf}(G) \leq \overline{\chi'}_{gf}(G) \leq \chi'_{gc}(G)$$

Tétel (Xu és Liu, 2008)

Legyen G egy egyszerű gráf. Tegyük fel, hogy
$\chi'_f(G) = \max_{v \in V(G)}\{\lceil \frac{d(v)+1}{f(v)} \rceil\}$,
$\chi'_{gc}(G) = \min_v \in V(G)\{\lfloor \frac{d(v)-1}{g(v)} \rfloor\}$, *és*
$\chi'_{gc}(G) \geq \chi'_f(G)$ *teljesül.*

Ekkor van a G-nek (g,f)-színezése és
$\chi'_{gf}(G) = \chi'_f(G)$, *valamint* $\overline{\chi'}_{gf}(G) = \chi'_{gc}(G)$.

Kiegyensúlyozott élszínezés

Definíció

A G gráf k színnel történő C élszínezése kiegyensúlyozott, ha $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$, *minden* $1 \leq i < j \leq k$ *színpárra és* $v \in V(G)$ *csúcsra.*

Kiegyensúlyozott élszínezés

Definíció

A G gráf k színnel történő C élszínezése kiegyensúlyozott, ha $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$, *minden* $1 \leq i < j \leq k$ *színpárra és* $v \in V(G)$ *csúcsra.*

Legyen $V_t(G) = \{v \in V(G) : t|d(v)\}$, *ahol a t pozitív egész.*

Kiegyensúlyozott élszínezés

Definíció

A G gráf k színnel történő C élszínezése kiegyensúlyozott, ha $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$, *minden* $1 \leq i < j \leq k$ *színpárra és* $v \in V(G)$ *csúcsra.*

Legyen $V_t(G) = \{v \in V(G) : t|d(v)\}$, *ahol a t pozitív egész. A G azon részgráfját, amelyet a* $V_t(G)$ *feszít a G t-magjának hívjuk.*

Tétel (Hilton és de Werra, 1994)

Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.

Kiegyensúlyozott élszínezés

Definíció

A G gráf k színnel történő C élszínezése kiegyensúlyozott, ha $|i_C(v) - j_C(v)| \leq 1$, minden $1 \leq i < j \leq k$ színpárra és $v \in V(G)$ csúcsra.

Legyen $V_t(G) = \{v \in V(G) : t|d(v)\}$, ahol a t pozitív egész.
A G azon részgráfját, amelyet a $V_t(G)$ feszít a G t-magjának hívjuk.

Tétel (Hilton és de Werra, 1994)

Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.
Ha a k nem osztója egyik csúcs fokának sem, akkor létezik a G-nek kiegyensúlyozott k-élszínezése.

Ha G egyszerű gráf, akkor a $k = \Delta(G) + 1$ esetben az előző tétel Vizing tételét adja vissza.
Ha $k = \delta(G) - 1$, akkor Gupta tétele következik.

Tétel

Legyen G egy multigráf és $k \geq 2$.

Ha G egyszerű gráf, akkor a $k = \Delta(G) + 1$ esetben az előző tétel Vizing tételét adja vissza.
Ha $k = \delta(G) - 1$, akkor Gupta tétele következik.

Tétel

Legyen G egy multigráf és $k \geq 2$.
Ha $\mu(G) \leq d(v)(mod\ k) \leq k - \mu(v)$ mindegyik csúcsra teljesül, akkor G-nek van egy kiegyensúlyozott k-élszínezése.

Ha G egyszerű gráf, akkor a $k = \Delta(G) + 1$ esetben az előző tétel Vizing tételét adja vissza.
Ha $k = \delta(G) - 1$, akkor Gupta tétele következik.

Tétel

Legyen G egy multigráf és $k \geq 2$.
Ha $\mu(G) \leq d(v) (mod\ k) \leq k - \mu(v)$ mindegyik csúcsra teljesül, akkor G-nek van egy kiegyensúlyozott k-élszínezése.

Tétel (Zhang és Liu)

Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.

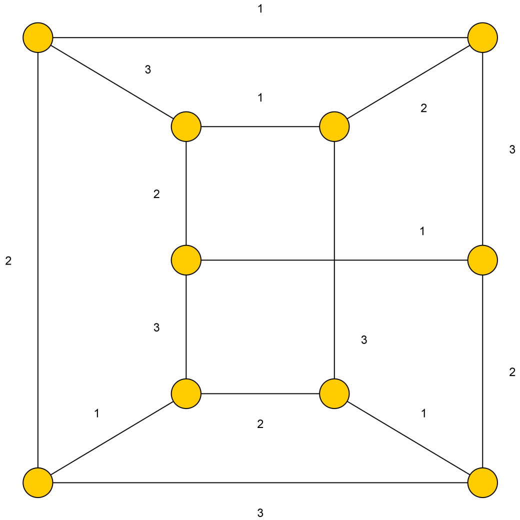
Ha G egyszerű gráf, akkor a $k = \Delta(G) + 1$ esetben az előző tétel Vizing tételét adja vissza.
Ha $k = \delta(G) - 1$, akkor Gupta tétele következik.

Tétel

Legyen G egy multigráf és $k \geq 2$.
Ha $\mu(G) \leq d(v)(mod\ k) \leq k - \mu(v)$ mindegyik csúcsra teljesül, akkor G-nek van egy kiegyensúlyozott k-élszínezése.

Tétel (Zhang és Liu)

Legyen G egyszerű gráf és $k \geq 2$.
Ha G k-magja erdő, akkor G-nek létezik kiegyensúlyozott k-élszínezése.


1
3
1
2
3
2
1
2
3
3
2
1
2
1
3

Élek listaszínezése

Legyen G egy gráf. G minden e éléhez tartozik színek egy $L(e)$ listája.
A G gráf a listákból jól kiszínezhető, ha van olyan élszínezése, hogy a színt az él listájából választjuk és szomszédos élek nem kapnak azonos színt.
Adott egy pozitív k szám.

Élek listaszínezése

Legyen G egy gráf. G minden e éléhez tartozik színek egy $L(e)$ listája.
A G gráf a listákból jól kiszínezhető, ha van olyan élszínezése, hogy a színt az él listájából választjuk és szomszédos élek nem kapnak azonos színt.
Adott egy pozitív k szám.

Azt mondjuk, hogy a G k-lista élszínezhető, ha bármilyen, legalább k hosszú listákat is rendelnek a csúcsokhoz, a G a listákból jól él listaszínezhető.

Definíció

Jelölje $\chi'_l(G)$ azt a legkisebb k számot, melyre a G k-lista élszínezhető, a neve lista kromatikus index.

A lista élszínezési sejtés.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \cdots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.

A lista élszínezési sejtés.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \cdots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.

Ezért $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

A lista élszínezési sejtés.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \cdots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.

Ezért $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

A mohó színezés adja a $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ felső becslést.

A lista élszínezési sejtés.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \cdots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.

Ezért $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

A mohó színezés adja a $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ felső becslést.

A csúcsok színezésekor a lista kromatikus szám lehet sokkal nagyobb, mint a kromatikus szám.

A lista élszínezési sejtés.

A listaszínezés a klasszikus színezés általánosítása, hiszen ha mindegyik lista az $\{1, \cdots, k\}$, akkor a normál színezést kapjuk.

Ezért $\chi'(G) \leq \chi'_l(G)$.

A mohó színezés adja a $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ felső becslést.

A csúcsok színezésekor a lista kromatikus szám lehet sokkal nagyobb, mint a kromatikus szám.

Sejtés

A lista élszínezési sejtés:
$\chi'(G) = \chi'_l(G)$.

Dinitz és Galvin

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette ugyanezt $K_{n,n}$-re.

Dinitz és Galvin

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette ugyanezt $K_{n,n}$-re.
Úgy is elképzelhetjük a kérdést, hogy egy általánosított $(n \times n - es)$ sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni úgy, hogy minden sorban és oszlopban csupa különböző színek kerüljenek, de a színeket csak a mezőkhöz rendelt n hosszú listák elemeiből választhatjuk.

Dinitz és Galvin

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette ugyanezt $K_{n,n}$-re.
Úgy is elképzelhetjük a kérdést, hogy egy általánosított $(n \times n - es)$ sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni úgy, hogy minden sorban és oszlopban csupa különböző színek kerüljenek, de a színeket csak a mezőkhöz rendelt n hosszú listák elemeiből választhatjuk.
Fred Galvin, aki a magyar kombinatorika fellegvárában, Budapesten is dolgozott Erdős Pál és Hajnal András környezetében, 1994-ben bebizonyította a híres Dinitz-sejtést!

Dinitz és Galvin

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette ugyanezt $K_{n,n}$-re.
Úgy is elképzelhetjük a kérdést, hogy egy általánosított $(n \times n - es)$ sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni úgy, hogy minden sorban és oszlopban csupa különböző színek kerüljenek, de a színeket csak a mezőkhöz rendelt n hosszú listák elemeiből választhatjuk.
Fred Galvin, aki a magyar kombinatorika fellegvárában, Budapesten is dolgozott Erdős Pál és Hajnal András környezetében, 1994-ben bebizonyította a híres Dinitz-sejtést!
Erdős Pál előadásaiban gyakran emlegette a KÖNYVET, amelyben minden matematikai tétel a legegyszerűbb, legelegánsabb bizonyítással szerepel.

Dinitz és Galvin

Speciálisan Jeffrey Howard Dinitz 1979-ben sejtette ugyanezt $K_{n,n}$-re.
Úgy is elképzelhetjük a kérdést, hogy egy általánosított $(n \times n - es)$ sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni úgy, hogy minden sorban és oszlopban csupa különböző színek kerüljenek, de a színeket csak a mezőkhöz rendelt n hosszú listák elemeiből választhatjuk.
Fred Galvin, aki a magyar kombinatorika fellegvárában, Budapesten is dolgozott Erdős Pál és Hajnal András környezetében, 1994-ben bebizonyította a híres Dinitz-sejtést!
Erdős Pál előadásaiban gyakran emlegette a KÖNYVET, amelyben minden matematikai tétel a legegyszerűbb, legelegánsabb bizonyítással szerepel.
Ha valaki gyönyörű megoldást talált egy problémára, akkor azt mondta: ez a KÖNYVBŐL való, elmondom.

Fred Galvin, 1994

Tétel

$\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Fred Galvin, 1994

Tétel

$\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Először belátunk egy irányított gráfokra vonatkozó segédállítást.

Definíció

Legyen G(V,A) egy irányított gráf.

Fred Galvin, 1994

Tétel

$\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Először belátunk egy irányított gráfokra vonatkozó segédállítást.

Definíció

Legyen G(V,A) egy irányított gráf.
A csúcsok egy $M \subseteq V$ halmaza mag, ha M független G-ben és minden $u \notin M$ csúcshoz létezik olyan $v \in M$ melyre $(u, v) \in A$, vagyis létezik bármely K-n kívüli csúcsba egy irányított él M-ből (a mag, több matematikai jelentéssel bíró szó).

Lemma

Legyen G(V,A) egy irányított gráf, és tegyük fel, hogy minden $v \in V$ csúcshoz adott egy L(v) színhalmaz, amelynek mérete nagyobb mint a v kifoka.
Ha G minden feszített részgráfjának van magja, akkor G-nek van listaszínezése az L(v) listákból.

Bizonyítás

A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Lemma

Legyen G(V,A) egy irányított gráf, és tegyük fel, hogy minden $v \in V$ csúcshoz adott egy L(v) színhalmaz, amelynek mérete nagyobb mint a v kifoka.
Ha G minden feszített részgráfjának van magja, akkor G-nek van listaszínezése az L(v) listákból.

Bizonyítás

A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

1 csúcsú gráfra nincs mit meggondolni.

Lemma

Legyen G(V,A) egy irányított gráf, és tegyük fel, hogy minden $v \in V$ csúcshoz adott egy L(v) színhalmaz, amelynek mérete nagyobb mint a v kifoka.
Ha G minden feszített részgráfjának van magja, akkor G-nek van listaszínezése az L(v) listákból.

Bizonyítás

A csúcsok száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

1 csúcsú gráfra nincs mit meggondolni.
Válasszunk egy $c \in L = \cup_{v \in V} L(v)$ színt és legyen $A(c) := \{v \in V : c \in L(v)\}$ azon csúcsok halmaza, amelyek listája tartalmazza a c színt.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ *feszített részgráfnak van egy* $M(c)$ *magja.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ *feszített részgráfnak van egy* $M(c)$ *magja.*

Színezzünk ki minden $K(c)$*-beli csúcsot a c színnel, hiszen a* $K(c)$ *független halmaz, majd töröljük a* $K(c)$*)-t G-ből és a c színt az L-ből.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ *feszített részgráfnak van egy* $M(c)$ *magja.*

Színezzünk ki minden $K(c)$*-beli csúcsot a* c *színnel, hiszen a* $K(c)$ *független halmaz, majd töröljük a* $K(c))$*-t* G*-ből és a* c *színt az* L*-ből.*

Legyen G' *a* $V \setminus K(c)$ *által feszített részgráf, melyben minden* v *csúcshoz az* $L(v) \setminus c$ *listák tartoznak.*

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ feszített részgráfnak van egy $M(c)$ magja.

Színezzünk ki minden $K(c)$-beli csúcsot a c színnel, hiszen a $K(c)$ független halmaz, majd töröljük a $K(c)$)-t G-ből és a c színt az L-ből.

Legyen G' a $V \setminus K(c)$ által feszített részgráf, melyben minden v csúcshoz az $L(v) \setminus c$ listák tartoznak.

Minden $v \in A(c) \setminus K(c)$-re a mag tulajdonsága miatt a kifok eggyel csökkent.

Bizonyítás

(folyt.) Az indukciós feltevés miatt a $G_{A(c)}$ feszített részgráfnak van egy $M(c)$ magja.

Színezzünk ki minden $K(c)$-beli csúcsot a c színnel, hiszen a $K(c)$ független halmaz, majd töröljük a $K(c)$)-t G-ből és a c színt az L-ből.

Legyen G' a $V \setminus K(c)$ által feszített részgráf, melyben minden v csúcshoz az $L(v) \setminus c$ listák tartoznak.

Minden $v \in A(c) \setminus K(c)$-re a mag tulajdonsága miatt a kifok eggyel csökkent.

De az $L(v) \setminus c$ listák hossza is csökkent eggyel.

Bizonyítás

(folyt.) A G' egyéb csúcsaiban pedig nem változott sem a kifok, sem a listaméret.

Bizonyítás

(folyt.) A G' egyéb csúcsaiban pedig nem változott sem a kifok, sem a listaméret.
Tehát teljesül G'-re a lemma feltétele.

Bizonyítás

(folyt.) A G' egyéb csúcsaiban pedig nem változott sem a kifok, sem a listaméret.
Tehát teljesül G'-re a lemma feltétele.

Mivel kisebb gráf, így az indukciós feltevés miatt G' is színezhető, így G is a listákból.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Él köt össze egy nőt és egy férfit, ha ismerősök.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Él köt össze egy nőt és egy férfit, ha ismerősök.

Egy párosítás házaspárokat határozzon meg.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Él köt össze egy nőt és egy férfit, ha ismerősök.

Egy párosítás házaspárokat határozzon meg.

Minden nőnek és férfinak van egy preferencia sorrendje az ellenkező neműek között.

Az előbbi lemma használatához találni kéne olyan irányítást a $K_{n,n}$ élgráfjában, melyre a $d^+(v) \leq n - 1$ teljesül minden v-re, és amelyben minden feszített részgráfnak van magja.

A következő fogalomhoz képzeljük el, hogy egy páros gráf egyik osztálya, az Y bizonyos férfiakat jelent, az X bizonyos nőket.

Él köt össze egy nőt és egy férfit, ha ismerősök.

Egy párosítás házaspárokat határozzon meg.

Minden nőnek és férfinak van egy preferencia sorrendje az ellenkező neműek között.

Ha pl. $N(v) = \{u_1 > \cdots > u_{d(v)}\}$ a v ismerőseinek halmaza, akkor a v-nek u_1 tetszik a legjobban.

Stabil párosítás.

Definíció (Stabil párosítás)

A $G = (X \cup Y, E)$ *kétrészes gráf egy* M *párosítását stabilnak nevezzük, ha a következő feltétel teljesül:*
Ha $\{u, v\} \in E \setminus M$, $u \in X$, $v \in Y$, *akkor vagy* $\{u, y\} \in M$ *és az* $N(u)$*-ban* $y > u$, *vagy* $\{x, v\} \in M$ *és* $N(v)$*-ben* $x > u$, *vagy mindkettő teljesül.*

Stabil párosítás.

Definíció (Stabil párosítás)

A $G = (X \cup Y, E)$ kétrészes gráf egy M párosítását stabilnak nevezzük, ha a következő feltétel teljesül:
Ha $\{u, v\} \in E \setminus M$, $u \in X$, $v \in Y$, akkor vagy $\{u, y\} \in M$ és az $N(u)$-ban $y > u$, vagy $\{x, v\} \in M$ és $N(v)$-ben $x > u$, vagy mindkettő teljesül.

Lemma

Mindig létezik stabil párosítás.

Stabil párosítás.

Definíció (Stabil párosítás)

A $G = (X \cup Y, E)$ *kétrészes gráf egy* M *párosítását stabilnak nevezzük, ha a következő feltétel teljesül:*
Ha $\{u, v\} \in E \setminus M$, $u \in X$, $v \in Y$, *akkor vagy* $\{u, y\} \in M$ *és az* $N(u)$*-ban* $y > u$, *vagy* $\{x, v\} \in M$ *és* $N(v)$*-ben* $x > u$, *vagy mindkettő teljesül.*

Lemma

Mindig létezik stabil párosítás.

Tétel

$\chi'(K_{n,n}) = \chi'_l(K_{n,n})$.

Bizonyítás

Gondolhatunk a $K_{n,n}$ éleire, mint egy $n \times n$-es sakktábla mezőire, és hivatkozhatunk egy élre a koordinátáival.

Bizonyítás

Gondolhatunk a $K_{n,n}$ éleire, mint egy $n \times n$-es sakktábla mezőire, és hivatkozhatunk egy élre a koordinátáival.

Az (i,j) és (r,s) élek pontosan akkor szomszédosak, ha $i = r$ vagy $j = s$.

Bizonyítás

Gondolhatunk a $K_{n,n}$ éleire, mint egy $n \times n$-es sakktábla mezőire, és hivatkozhatunk egy élre a koordinátáival.

Az (i,j) és (r,s) élek pontosan akkor szomszédosak, ha $i = r$ vagy $j = s$.

Írjuk a mezőkbe az $\{1, \cdots, n\}$ számokat úgy, hogy Latin négyzetet kapjunk (minden sorban és oszlopban pontosan egy álljon minden számból).

Bizonyítás

Gondolhatunk a $K_{n,n}$ éleire, mint egy $n \times n$-es sakktábla mezőire, és hivatkozhatunk egy élre a koordinátáival.

Az (i,j) és (r,s) élek pontosan akkor szomszédosak, ha $i = r$ vagy $j = s$.

Írjuk a mezőkbe az $\{1, \cdots, n\}$ számokat úgy, hogy Latin négyzetet kapjunk (minden sorban és oszlopban pontosan egy álljon minden számból).

Jelölje L(i,j) az (i,j) mezőbe írt számot.
Irányítsuk meg az éleket!
$(i,j) \to (i,j')$, *ha* $L(i,j) < L(i,j')$.
$(i,j) \to (i',j)$, *ha* $L(i,j) > L(i',j)$.
azaz a sorokban a kisebbtől a nagyobb felé irányítunk, míg az oszlopokban éppen fordítva.

Bizonyítás

(folyt.) Minden (i,j)-re $d^{+}(i,j) = n-1$.

Bizonyítás

(folyt.) Minden (i,j)-re $d^+(i,j) = n - 1$.

Valóban, ha $L(i,j) = k$, *akkor a sorában van nála (n-k) nagyobb érték és az oszlopában pedig (k-1) nála kisebb érték.*

Bizonyítás

(folyt.) Minden (i,j)-re $d^+(i,j) = n - 1$.

Valóban, ha $L(i,j) = k$, *akkor a sorában van nála (n-k) nagyobb érték és az oszlopában pedig (k-1) nála kisebb érték.*

Az első lemma szerint elegendő megmutatnunk, hogy az irányított gráfunkban minden feszített részgráfnak van magja!

Bizonyítás

(folyt.) Minden (i,j)-re $d^+(i,j) = n-1$.

Valóban, ha $L(i,j) = k$*, akkor a sorában van nála (n-k) nagyobb érték és az oszlopában pedig (k-1) nála kisebb érték.*

Az első lemma szerint elegendő megmutatnunk, hogy az irányított gráfunkban minden feszített részgráfnak van magja!

Tekintsük mezőknek egy $A \subseteq V$ *részhalmazát.*

Bizonyítás

(folyt.) Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Bizonyítás

(folyt.) Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Rendeljük hozzá A-hoz a $G = (X \cup Y, E)$ páros gráfot, ahol minden $(i, j) \in A$ esetén legyen az $i \in X$ és $j \in Y$ összekötve G-ben.

Bizonyítás

(folyt.) Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Rendeljük hozzá A-hoz a $G = (X \cup Y, E)$ páros gráfot, ahol minden $(i, j) \in A$ esetén legyen az $i \in X$ és $j \in Y$ összekötve G-ben.

Az irányított gráfunk természetes módon meghatározza a G páros gráf egy csúcsa szomszédságának egy sorrendjét.

Bizonyítás

(folyt.) Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Rendeljük hozzá A-hoz a $G = (X \cup Y, E)$ *páros gráfot, ahol minden* $(i, j) \in A$ *esetén legyen az* $i \in X$ *és* $j \in Y$ *összekötve G-ben.*

Az irányított gráfunk természetes módon meghatározza a G páros gráf egy csúcsa szomszédságának egy sorrendjét.

N(i)-ben $j' > j$, ha $(i, j) \to (i, j')$
N(j)-ben $i' > i$, ha $(i, j) \to (i', j)$

Bizonyítás

(folyt.) Legyen X azon soroknak a halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező, ill. Y azon oszlopok halmaza, melyekbe esik kiválasztott mező.

Rendeljük hozzá A-hoz a $G = (X \cup Y, E)$ *páros gráfot, ahol minden* $(i,j) \in A$ *esetén legyen az* $i \in X$ *és* $j \in Y$ *összekötve G-ben.*

Az irányított gráfunk természetes módon meghatározza a G páros gráf egy csúcsa szomszédságának egy sorrendjét.

N(i)-ben $j' > j$*, ha* $(i,j) \to (i,j')$
N(j)-ben $i' > i$*, ha* $(i,j) \to (i',j)$

A stabil párosítás létezése miatt G-ben van egy M stabil párosítás.

Bizonyítás

(folyt.) Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Bizonyítás

(folyt.) Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Valóban mag lesz, mert M független, valamint, ha $(i,j) \in A \setminus M$, akkor a stabil párosítás definíciója szerint vagy létezik $(i,j') \in M$, melyre $j' > j$, vagy $(i',j) \in M$, melyre $i' > i$, és ez az irányított gráfunkra nézve azt jelenti, hogy $(i,j) \to (i',j') \in M$, vagy $(i,j) \to (i',j) \in M$.

Bizonyítás

(folyt.) Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Valóban mag lesz, mert M független, valamint, ha $(i, j) \in A \setminus M$, akkor a stabil párosítás definíciója szerint vagy létezik $(i, j')\in M$, melyre $j' > j$, vagy $(i', j) \in M$, melyre $i' > i$, és ez az irányított gráfunkra nézve azt jelenti, hogy $(i, j) \to (i', j') \in M$, vagy $(i, j) \to (i', j) \in M$.

Ezzel a bizonyítás teljes.

Bizonyítás

(folyt.) Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Valóban mag lesz, mert M független, valamint, ha $(i, j) \in A \setminus M$*, akkor a stabil párosítás definíciója szerint vagy létezik* $(i, j') \in M$*, melyre* $j' > j$*, vagy* $(i', j) \in M$*, melyre* $i' > i$*, és ez az irányított gráfunkra nézve azt jelenti, hogy* $(i, j) \to (i', j') \in M$*, vagy* $(i, j) \to (i', j) \in M$*.*

Ezzel a bizonyítás teljes.

Bár a páros gráfok éleinek színezése mindig megy legalább n méretű listákból, az általános esetre vonatkozó sejtés máig is nyitott kérdés.

Bizonyítás

(folyt.) Az M mint az A egy részhalmaza lesz a kívánt mag.

Valóban mag lesz, mert M független, valamint, ha $(i, j) \in A \setminus M$, akkor a stabil párosítás definíciója szerint vagy létezik $(i, j') \in M$, melyre $j' > j$, vagy $(i', j) \in M$, melyre $i' > i$, és ez az irányított gráfunkra nézve azt jelenti, hogy $(i, j) \to (i', j') \in M$, vagy $(i, j) \to (i', j) \in M$.

Ezzel a bizonyítás teljes.

Bár a páros gráfok éleinek színezése mindig megy legalább n méretű listákból, az általános esetre vonatkozó sejtés máig is nyitott kérdés.

Sejtés (A lista élszínezési sejtés)

$\chi'(G) = \chi'_l(G)$.

Csúcsot is, élet is színezzünk!

A G gráf k-színnel történő totális színezésében a csúcsokhoz is és az élekhez is rendelünk színeket a megadott k színből.

Csúcsot is, élet is színezzünk!

A G gráf k-színnel történő totális színezésében a csúcsokhoz is és az élekhez is rendelünk színeket a megadott k színből.

Akkor jó a színezés, ha nem kap azonos színt sem két szomszédos csúcs, sem két szomszédos él, sem egy illeszkedő csúcs és él. G totálisan k-színezhető, ha létezik totális k-színezése.

Csúcsot is, élet is színezzünk!

A G gráf k-színnel történő totális színezésében a csúcsokhoz is és az élekhez is rendelünk színeket a megadott k színből.

Akkor jó a színezés, ha nem kap azonos színt sem két szomszédos csúcs, sem két szomszédos él, sem egy illeszkedő csúcs és él. G totálisan k-színezhető, ha létezik totális k-színezése.

Tétel

A G gráf totális kromatikus száma $\chi''(G)$ az a legkisebb pozitív egész k szám, melyre a G totálisan k-színezhető.

Totális színezés

Nyilvánvaló, hogy $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ minden gráfra igaz.

Totális színezés

Nyilvánvaló, hogy $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ minden gráfra igaz.

Sejtés (A totális színezési sejtés)

$\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2.$

Totális színezés

Nyilvánvaló, hogy $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ minden gráfra igaz.

Sejtés (A totális színezési sejtés)

$\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Nagyon érdekes a totális kromatikus szám és a lista kromatikus index egy kapcsolata.

Totális színezés

Nyilvánvaló, hogy $\chi''(G) \geq \Delta(G) + 1$ minden gráfra igaz.

Sejtés (A totális színezési sejtés)

$\chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Nagyon érdekes a totális kromatikus szám és a lista kromatikus index egy kapcsolata.

Tétel

Minden G gráfra $\chi''(G) \leq \chi'_l(G) + 2$ *teljesül.*

Bizonyítás

Legyen $\chi'_l(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.

Bizonyítás

Legyen $\chi'_l(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.
A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ *éléhez rendeljük az* $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ *színlistát.*

Bizonyítás

Legyen $\chi'_l(G) = k$*.*

$$\chi(G) \le \Delta(G) + 1 \le \chi'(G) + 1 \le \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.
A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ *éléhez rendeljük az* $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ *színlistát.*
Mivel mindegyik élhez legalább k elemű listát rendeltünk, így ki lehet színezni a G éleit a listájukból, legyen ez a színezés a c'*.*

Bizonyítás

Legyen $\chi_l'(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi_l'(G) + 1 < \chi_l'(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.
A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ *éléhez rendeljük az* $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ *színlistát.*
Mivel mindegyik élhez legalább k elemű listát rendeltünk, így ki lehet színezni a G éleit a listájukból, legyen ez a színezés a c'.
Nem használjuk fel az $e = \{u, v\}$ *kiszínezéséhez a c(u) és c(v) színek egyikét sem.*

Bizonyítás

Legyen $\chi'_l(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.
A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ *éléhez rendeljük az* $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ *színlistát.*
Mivel mindegyik élhez legalább k elemű listát rendeltünk, így ki lehet színezni a G éleit a listájukból, legyen ez a színezés a c'.
Nem használjuk fel az $e = \{u, v\}$ *kiszínezéséhez a c(u) és c(v) színek egyikét sem.*
Ha tehát az éleket a c' *szerint, a csúcsokat a c szerint színezzük, az egy jó totális színezés (k+2) színnel.*

Bizonyítás

Legyen $\chi'_l(G) = k$.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \leq \chi'(G) + 1 \leq \chi'_l(G) + 1 < \chi'_l(G) + 2 = k + 2$$

Így tehát a G kiszínezhető (k+2) színnel, legyen c egy ilyen színezés, L a színek halmaza.
A G tetszőleges $e = \{u, v\}$ *éléhez rendeljük az* $L'(e) = L \setminus \{c(u), c(v)\}$ *színlistát.*
Mivel mindegyik élhez legalább k elemű listát rendeltünk, így ki lehet színezni a G éleit a listájukból, legyen ez a színezés a c'.
Nem használjuk fel az $e = \{u, v\}$ *kiszínezéséhez a c(u) és c(v) színek egyikét sem.*
Ha tehát az éleket a c' *szerint, a csúcsokat a c szerint színezzük, az egy jó totális színezés (k+2) színnel.*
Tehát $\chi''(G) \leq \chi'_l(G) + 2$ *teljesül.*

Tartalomjegyzék:

Feladat

Egy kulcskarikán vannak a fontos szobák kulcsai. Külsőre a kulcsok egyformák. Legkevesebb hány színnel jelöljük meg a kulcsokat, hogy mindig meg tudjuk állapítani melyik ajtót melyik kulcs nyitja?

Feladat

Egy kulcskarikán vannak a fontos szobák kulcsai. Külsőre a kulcsok egyformák. Legkevesebb hány színnel jelöljük meg a kulcsokat, hogy mindig meg tudjuk állapítani melyik ajtót melyik kulcs nyitja?

Ha pl. három kulcs van a karikán, akkor mindhármat más színnel kell kiszínezni. Ha két színnel színeznénk, akkor pl. nem tudnánk eldönteni melyik a középső. Nincs a karikán külön jelzés, melyik kulcs az első.

Feladat

Egy kulcskarikán vannak a fontos szobák kulcsai. Külsőre a kulcsok egyformák. Legkevesebb hány színnel jelöljük meg a kulcsokat, hogy mindig meg tudjuk állapítani melyik ajtót melyik kulcs nyitja?

Ha pl. három kulcs van a karikán, akkor mindhármat más színnel kell kiszínezni. Ha két színnel színeznénk, akkor pl. nem tudnánk eldönteni melyik a középső. Nincs a karikán külön jelzés, melyik kulcs az első.

Ha egyetlen kulcsot pl. pirossal színeznénk, akkor sem tudjuk melyik a második kulcs, mert haladhatunk az óra szerint és ellenkezőleg is! Ha a másodikat zöldre színezzük, akkor már mindegyikről fogjuk tudni hányadik, akkor is ha a többi mind fehér.

Feladat

Egy kulcskarikán vannak a fontos szobák kulcsai. Külsőre a kulcsok egyformák. Legkevesebb hány színnel jelöljük meg a kulcsokat, hogy mindig meg tudjuk állapítani melyik ajtót melyik kulcs nyitja?

Ha pl. három kulcs van a karikán, akkor mindhármat más színnel kell kiszínezni. Ha két színnel színeznénk, akkor pl. nem tudnánk eldönteni melyik a középső. Nincs a karikán külön jelzés, melyik kulcs az első.

Ha egyetlen kulcsot pl. pirossal színeznénk, akkor sem tudjuk melyik a második kulcs, mert haladhatunk az óra szerint és ellenkezőleg is! Ha a másodikat zöldre színezzük, akkor már mindegyikről fogjuk tudni hányadik, akkor is ha a többi mind fehér.

De elegendő lehet-e kevesebb szín használata?

Könnyen belátható, hogy 3,4 vagy 5 kulcs esetén nem.

Könnyen belátható, hogy 3,4 vagy 5 kulcs esetén nem.

Azonban ha van legalább 6 kulcsunk, akkor ha pirossal megjelöljük az elsőt, harmadikat és negyediket, akkor a többi lehet kék, minden kulcsot megtalálunk.

Könnyen belátható, hogy 3,4 vagy 5 kulcs esetén nem.

Azonban ha van legalább 6 kulcsunk, akkor ha pirossal megjelöljük az elsőt, harmadikat és negyediket, akkor a többi lehet kék, minden kulcsot megtalálunk.

Definíció

Egy G egyszerű gráf automorfizmusa a csúcsainak egy olyan permutációja, hogy az él és nem él reláció megmarad.

Könnyen belátható, hogy 3,4 vagy 5 kulcs esetén nem.

Azonban ha van legalább 6 kulcsunk, akkor ha pirossal megjelöljük az elsőt, harmadikat és negyediket, akkor a többi lehet kék, minden kulcsot megtalálunk.

Definíció

Egy G egyszerű gráf automorfizmusa a csúcsainak egy olyan permutációja, hogy az él és nem él reláció megmarad.
Ha G csúcsai címkézettek, akkor ha minden csúcs olyan csúcsba megy, amelynek azonos a címkéje vele, akkor megőrzi a címkét a leképezés.

Definíció

Ha a G gráf csúcsai r különböző címkével jelöltek, akkor a címkézést r-megkülönböztetőnek nevezzük, ha nincs G-nek olyan automorfizmusa amely megőrzi a címkéket.

Definíció

Ha a G gráf csúcsai r különböző címkével jelöltek, akkor a címkézést r-megkülönböztetőnek nevezzük, ha nincs G-nek olyan automorfizmusa amely megőrzi a címkéket.
Jelölje $D(G)$ a G gráf megkülönböztető számát, amely az a legkisebb r, amennyi címkével létezik r-megkülönböztető címkézése G-nek.

Definíció

Ha a G gráf csúcsai r különböző címkével jelöltek, akkor a címkézést r-megkülönböztetőnek nevezzük, ha nincs G-nek olyan automorfizmusa amely megőrzi a címkéket.
Jelölje $D(G)$ a G gráf megkülönböztető számát, amely az a legkisebb r, amennyi címkével létezik r-megkülönböztető címkézése G-nek.

Ha a címkézés egy jó színezés, vagyis szomszédos csúcsok nem kaphatnak egyforma címkét, akkor jó r-megkülönböztető színezésről beszélünk.

Definíció

Ha a G gráf csúcsai r különböző címkével jelöltek, akkor a címkézést r-megkülönböztetőnek nevezzük, ha nincs G-nek olyan automorfizmusa amely megőrzi a címkéket.
Jelölje $D(G)$ a G gráf megkülönböztető számát, amely az a legkisebb r, amennyi címkével létezik r-megkülönböztető címkézése G-nek.

Ha a címkézés egy jó színezés, vagyis szomszédos csúcsok nem kaphatnak egyforma címkét, akkor jó r-megkülönböztető színezésről beszélünk.

Definíció

Jelölje $\chi_D(G)$ a G gráf megkülönböztető kromatikus számát, amely azt a legkisebb r-et jelenti, amennyi színnel létezik jó r-megkülönböztető színezése G-nek.

A konferenciák szervezésével kapcsolatban is megfogalmazható a megkülönböztető kromatikus szám fogalma.

A konferenciák szervezésével kapcsolatban is megfogalmazható a megkülönböztető kromatikus szám fogalma.

Egy konferenciaközpontban a különböző konferenciákhoz termeket rendelnek. Az egyes konferenciák legyenek egy G gráf csúcsai, a szomszédság legyen az időbeni átfedés, ütközés.

A konferenciák szervezésével kapcsolatban is megfogalmazható a megkülönböztető kromatikus szám fogalma.

Egy konferenciaközpontban a különböző konferenciákhoz termeket rendelnek. Az egyes konferenciák legyenek egy G gráf csúcsai, a szomszédság legyen az időbeni átfedés, ütközés.

A csúcsokhoz színeket - mint előadótermeket - rendelünk. $\chi(G)$ éppen a minimális előadóterem számot jelenti, amennyiben még megtartható az összes konferencia.

A konferenciák szervezésével kapcsolatban is megfogalmazható a megkülönböztető kromatikus szám fogalma.

Egy konferenciaközpontban a különböző konferenciákhoz termeket rendelnek. Az egyes konferenciák legyenek egy G gráf csúcsai, a szomszédság legyen az időbeni átfedés, ütközés.

A csúcsokhoz színeket - mint előadótermeket - rendelünk. $\chi(G)$ éppen a minimális előadóterem számot jelenti, amennyiben még megtartható az összes konferencia.

Ha a színezés egy jó r-megkülönböztető színezés, akkor az így színezett G egyértelműen megmutatja melyik konferencia melyik teremben van.

Állítás

Minden G gráfra $\chi_D(G) \geq \max\{\chi(G), D(G)\}$.

Állítás

Minden G gráfra $\chi_D(G) \geq \max\{\chi(G), D(G)\}$.

Ha G-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor $D(G) = 1$ *és* $\chi_D(G) = \chi(G)$.

Állítás

Minden G gráfra $\chi_D(G) \geq \max\{\chi(G), D(G)\}$.

Ha G-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor $D(G) = 1$ *és* $\chi_D(G) = \chi(G)$.

A $\chi_D(G)$ *lehet sokkal nagyobb, mint* $D(G)$.
Jelölje $G + H$ *azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy diszjunkt csúcsokkal vesszük a G-t és a H-t és mindegyik V(G)-beli pontot összekötjük minden V(H)-beli ponttal.*

Állítás

Minden G gráfra $\chi_D(G) \geq max\{\chi(G), D(G)\}$.

Ha G-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor $D(G) = 1$ *és* $\chi_D(G) = \chi(G)$.

A $\chi_D(G)$ *lehet sokkal nagyobb, mint* $D(G)$.
Jelölje $G + H$ *azt a gráfot, amelyet úgy kapunk, hogy diszjunkt csúcsokkal vesszük a G-t és a H-t és mindegyik V(G)-beli pontot összekötjük minden V(H)-beli ponttal.*

Csakúgy, mint a kromatikus számra $\chi_D(G + H) = \chi_D(G) + \chi_D(H)$.

Utak

Állítás

Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$.

Utak

Állítás

Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$.

A páros hosszú (csúcsok száma) utakat felváltva pirosra, kékre színezve megkülönböztető színezést kapunk, tehát $\chi_D(P_{2m}) = D(P_{2m}) = 2$.

Utak

Állítás

Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$*.*

A páros hosszú (csúcsok száma) utakat felváltva pirosra, kékre színezve megkülönböztető színezést kapunk, tehát $\chi_D(P_{2m}) = D(P_{2m}) = 2$*.*

Páratlan hosszú útra is jó, ha piros az egyik vége, a többi kék, tehát $D(P_{2m+1}) = 2$*.*

Utak

Állítás

Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$*.*

A páros hosszú (csúcsok száma) utakat felváltva pirosra, kékre színezve megkülönböztető színezést kapunk, tehát $\chi_D(P_{2m}) = D(P_{2m}) = 2$*.*

Páratlan hosszú útra is jó, ha piros az egyik vége, a többi kék, tehát $D(P_{2m+1}) = 2$*.*

Páratlan sok csúcsú útra a váltakozó színezés nem különbözteti meg a balt a jobbtól, így kell 3 szín.

Utak

Állítás

Az utaknak van nem triviális automorfizmusuk, így $D(P_m) \geq 2$.

A páros hosszú (csúcsok száma) utakat felváltva pirosra, kékre színezve megkülönböztető színezést kapunk, tehát $\chi_D(P_{2m}) = D(P_{2m}) = 2$.

Páratlan hosszú útra is jó, ha piros az egyik vége, a többi kék, tehát $D(P_{2m+1}) = 2$.

Páratlan sok csúcsú útra a váltakozó színezés nem különbözteti meg a balt a jobbtól, így kell 3 szín.

Ha egyik végpont piros, majd utána felváltva fehéret és zöldet rendelünk a csúcsokhoz, akkor egy jó 3-megkülönböztető színezést kaptunk, tehát $\chi_D(P_{2m+1}) = 3$.

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

$\chi_D(C_6) = 4$

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

$\chi_D(C_6) = 4$

Ha a kör hatnál hosszabb, akkor legyen az első és negyedik csúcs piros, fehér a többi páros és zöld a többi páratlan.

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

$\chi_D(C_6) = 4$

Ha a kör hatnál hosszabb, akkor legyen az első és negyedik csúcs piros, fehér a többi páros és zöld a többi páratlan.

Két színnel nem csak páratlan esetben nem megy a jó 2-megkülönböztető színezés.

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

$\chi_D(C_6) = 4$

Ha a kör hatnál hosszabb, akkor legyen az első és negyedik csúcs piros, fehér a többi páros és zöld a többi páratlan.

Két színnel nem csak páratlan esetben nem megy a jó 2-megkülönböztető színezés.

Tehát $\chi_D(C_n) = 3$*, ha n nagyobb, mint 6.*

Körök

Állítás

$\chi_D(C_4) = 4$

$\chi_D(C_5) = 3$

$\chi_D(C_6) = 4$

Ha a kör hatnál hosszabb, akkor legyen az első és negyedik csúcs piros, fehér a többi páros és zöld a többi páratlan.

Két színnel nem csak páratlan esetben nem megy a jó 2-megkülönböztető színezés.

Tehát $\chi_D(C_n) = 3$, *ha n nagyobb, mint 6.*

$\chi_D(\mathit{Petersen\ gráf}) = 4$

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow$ *G teljes többrészes gráf.*

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow G$ *teljes többrészes gráf.*

Bizonyítás

$(\Leftarrow)$ *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow$ *G teljes többrészes gráf.*

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*
De ekkor ha minden más csúcsot helybenhagyunk és ezt a két csúcsot meg megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G-nek.

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow$ *G teljes többrészes gráf.*

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*
De ekkor ha minden más csúcsot helybenhagyunk és ezt a két csúcsot meg megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G-nek.
Tehát nem lehetnek különböző színű csúcsok.
($\Rightarrow$) *Tegyük fel indirekt, G nem egy teljes többrészes gráf, de*
$\chi_D(G) = |V(G)| = n$.

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow$ *G teljes többrészes gráf.*

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*
De ekkor ha minden más csúcsot helybenhagyunk és ezt a két csúcsot meg megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G-nek.
Tehát nem lehetnek különböző színű csúcsok.
($\Rightarrow$) *Tegyük fel indirekt, G nem egy teljes többrészes gráf, de*
$\chi_D(G) = |V(G)| = n$.
Van G-nek u,v csúcsa amelyek nem szomszédosak, sőt amelyeknek a szomszédsága nem azonos.

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow$ *G teljes többrészes gráf.*

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*
De ekkor ha minden más csúcsot helybenhagyunk és ezt a két csúcsot meg megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G-nek.
Tehát nem lehetnek különböző színű csúcsok.
($\Rightarrow$) *Tegyük fel indirekt, G nem egy teljes többrészes gráf, de*
$\chi_D(G) = |V(G)| = n$.
Van G-nek u,v csúcsa amelyek nem szomszédosak, sőt amelyeknek a szomszédsága nem azonos.
Színezzük u-t és v-t pirossal, a többi csúcsot pedig más-más színnel. Ez egy jó (n-1)-megkülönböztető színezése G-nek.

Tétel

$\chi_D(G) = |V(G)| \Leftrightarrow G$ teljes többrészes gráf.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Ha a G két csúcsa ugyanazt a színt kapja egy jó színezésben, akkor nem szomszédosak, így egy részben vannak.*
De ekkor ha minden más csúcsot helybenhagyunk és ezt a két csúcsot meg megcseréljük, akkor egy valódi, színtartó automorfizmusát kapjuk G-nek.
Tehát nem lehetnek különböző színű csúcsok.
($\Rightarrow$) *Tegyük fel indirekt, G nem egy teljes többrészes gráf, de*
$\chi_D(G) = |V(G)| = n$.
Van G-nek u,v csúcsa amelyek nem szomszédosak, sőt amelyeknek a szomszédsága nem azonos.
Színezzük u-t és v-t pirossal, a többi csúcsot pedig más-más színnel. Ez egy jó (n-1)-megkülönböztető színezése G-nek.
Tehát $\chi_D(G) \leq n - 1$, *ami ellentmondás.*

Definíció

Legyen $K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}$ *az a többrészes gráf, amelynek* j_i *darab* a_i *méretű része van.*

Definíció

Legyen $K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}$ *az a többrészes gráf, amelynek* j_i *darab* a_i *méretű része van.*
Tegyük fel továbbá, hogy $a_1 > \cdots > a_r$.

Definíció

Legyen $K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}$ az a többrészes gráf, amelynek j_i darab a_i méretű része van.
Tegyük fel továbbá, hogy $a_1 > \cdots > a_r$.

Ahhoz, hogy a definiált általános többrészes gráfnak meg tudjuk határozni a megkülönböztetési számát szükség van arra, hogy elég szín legyen ahhoz, hogy meg tudjuk kölönböztetni a részeken belüli csúcspárokat is és meg tudjuk különböztetni az azonos méretű részeket egymástól.

Definíció

Legyen $K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}$ az a többrészes gráf, amelynek j_i darab a_i méretű része van.
Tegyük fel továbbá, hogy $a_1 > \cdots > a_r$.

Ahhoz, hogy a definiált általános többrészes gráfnak meg tudjuk határozni a megkülönböztetési számát szükség van arra, hogy elég szín legyen ahhoz, hogy meg tudjuk kölönböztetni a részeken belüli csúcspárokat is és meg tudjuk különböztetni az azonos méretű részeket egymástól.

Az a_i méretű részek között sem lehet kettő, amelyek ugyanazon színeket kapták.

Tétel

$$D(K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}) = min \quad \{p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \;\; minden \;\; i - re.$$

Tétel

$$D(K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}) = min \quad \{p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \quad minden \quad i - re.$$

Bizonyítás

Mivel egy független részben csak két pont cseréje egy automorfizmus, így minden részben a csúcsokat páronként más színűre kell színezni.

Tétel

$$D(K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}) = min \quad \{p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \quad minden \quad i - re.$$

Bizonyítás

Mivel egy független részben csak két pont cseréje egy automorfizmus, így minden részben a csúcsokat páronként más színűre kell színezni.

Továbbá elegendő szín kell ahhoz, hogy két azonos méretű részt meg tudjunk egymástól különböztetni.

Tétel

$D(K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}) = min \quad \{p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \quad minden \quad i - re.$

Bizonyítás

Mivel egy független részben csak két pont cseréje egy automorfizmus, így minden részben a csúcsokat páronként más színűre kell színezni.

Továbbá elegendő szín kell ahhoz, hogy két azonos méretű részt meg tudjunk egymástól különböztetni.

Ehhez $\binom{D(G)}{a_i} \geq j_i$ *szükséges mindegyik indexre.*

Tétel

$$D(K_{a_1 j_1, a_2 j_2 \cdots, a_r j_r}) = min \quad \{p : \binom{p}{a_i} \geq j_i \;\; minden \;\; i - re.$$

Bizonyítás

Mivel egy független részben csak két pont cseréje egy automorfizmus, így minden részben a csúcsokat páronként más színűre kell színezni.

Továbbá elegendő szín kell ahhoz, hogy két azonos méretű részt meg tudjunk egymástól különböztetni.

Ehhez $\binom{D(G)}{a_i} \geq j_i$ *szükséges mindegyik indexre.*
Elegendő is annyi szín, hogy az egyenlőtlenség minden indexre teljesüljön.

A fák esete

Definíció

Egy T fagráf közepének nevezzük azon csúcsok által feszített részgráfot, amelyektől a legtávolabbi csúcs minimális távolságra van.

A fák esete

Definíció

Egy T fagráf közepének nevezzük azon csúcsok által feszített részgráfot, amelyektől a legtávolabbi csúcs minimális távolságra van.
A centrum vagy egyetlen pont, vagy két összekötött pont.

A fák esete

Definíció

Egy T fagráf közepének nevezzük azon csúcsok által feszített részgráfot, amelyektől a legtávolabbi csúcs minimális távolságra van.
A centrum vagy egyetlen pont, vagy két összekötött pont.

Tétel

Ha a T fának több csúcsa, akkor $\chi_D(T) = 2$ *pontosan azon fákra áll amelyeknek csak a triviális automorfizmusa van, vagy a közepe egyetlen élből áll és az egyetlen nem triviális automorfizmusa megcseréli az él két végpontját.*

Bizonyítás

($\Rightarrow$) *Nyilván* $\chi_D(T)$ *legalább 2.*

Bizonyítás

($\Rightarrow$) *Nyilván* $\chi_D(T)$ *legalább 2.*

Meg kell adni egy jó 2-megkülönböztető színezést. Csak a váltakozó színezés jó, azonban ez jó is ha csak triviális automorfizmusa van.

Bizonyítás

($\Rightarrow$) *Nyilván* $\chi_D(T)$ *legalább 2.*

Meg kell adni egy jó 2-megkülönböztető színezést. Csak a váltakozó színezés jó, azonban ez jó is ha csak triviális automorfizmusa van.

Ha az $\{x, y\}$ *él a közepe, akkor csak az x-t és y-t megcserélő egyetlen nem triviális automorfizmusa van a fának. De x és y színe különböző, mert szomszédosak, így ez nem őrzi meg a színt.*

Bizonyítás

($\Rightarrow$) *Nyilván* $\chi_D(T)$ *legalább 2.*

Meg kell adni egy jó 2-megkülönböztető színezést. Csak a váltakozó színezés jó, azonban ez jó is ha csak triviális automorfizmusa van.

Ha az $\{x, y\}$ *él a közepe, akkor csak az x-t és y-t megcserélő egyetlen nem triviális automorfizmusa van a fának. De x és y színe különböző, mert szomszédosak, így ez nem őrzi meg a színt.*

Ebből következik, hogy ez a színezés jó-2 megkülönböztető színezés.

Bizonyítás

$(\Leftarrow)$ *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

1. A T közepe a v csúcs. Tekintsünk egy jó 2-megkülönböztető színezését a fának, v kapja a piros színt.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

1. A T közepe a v csúcs. Tekintsünk egy jó 2-megkülönböztető színezését a fának, v kapja a piros színt.

Nyilván v-től páros távolságra piros, páratlan távolságra kék a csúcsok színe.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

1. A T közepe a v csúcs. Tekintsünk egy jó 2-megkülönböztető színezését a fának, v kapja a piros színt.

Nyilván v-től páros távolságra piros, páratlan távolságra kék a csúcsok színe.

Minden automorfizmusra a v fix marad, hiszen a távolságoknak is meg kell maradni és az egyetlen centrum.

Bizonyítás

($\Leftarrow$) *Tegyük fel, hogy* $\chi_D(T) = 2$.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a centrum egy csúcs, vagy egy él.

1. A T közepe a v csúcs. Tekintsünk egy jó 2-megkülönböztető színezését a fának, v kapja a piros színt.

Nyilván v-től páros távolságra piros, páratlan távolságra kék a csúcsok színe.

Minden automorfizmusra a v fix marad, hiszen a távolságoknak is meg kell maradni és az egyetlen centrum.

Valamint a 2-színezésnek is meg kell maradni. Ezért nem lehet más csak a triviális automorfizmus.

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ él.

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ él.

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x,y\} \cup T_y$ felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ *él.*

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x,y\} \cup T_y$ *felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.*

Tekintsük a létező jó 2-megkülönböztető színezését G-nek! Legyen x piros, y kék. Ha T-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor készen vagyunk.

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ *él.*

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x,y\} \cup T_y$ *felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.*

Tekintsük a létező jó 2-megkülönböztető színezését G-nek! Legyen x piros, y kék. Ha T-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor készen vagyunk.

Legyen h egy valódi automorfizmusa T-nek. Akkor az x és y vagy fix marad, vagy egymással cserélődik. Ha az x és az y is fix, akkor a T_x *is és a* T_y *is megőrzi minden színét, mert a távolság meg kell, hogy maradjon és így a szín is.*

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ él.

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x,y\} \cup T_y$ felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.

Tekintsük a létező jó 2-megkülönböztető színezését G-nek! Legyen x piros, y kék. Ha T-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor készen vagyunk.

Legyen h egy valódi automorfizmusa T-nek. Akkor az x és y vagy fix marad, vagy egymással cserélődik. Ha az x és az y is fix, akkor a T_x is és a T_y is megőrzi minden színét, mert a távolság meg kell, hogy maradjon és így a szín is.

Mivel $\chi_D(T) = 2$, így a h mégsem lehet valódi.

Bizonyítás

2. A T közepe egy $\{x, y\}$ *él.*

Képzeljük el a $T = T_x \cup \{x, y\} \cup T_y$ *felbontást, ahol az x és y is eleme a két lelógó részfának, az él elvágásával kapott két komponensnek.*

Tekintsük a létező jó 2-megkülönböztető színezését G-nek! Legyen x piros, y kék. Ha T-nek csak a triviális automorfizmusa van, akkor készen vagyunk.

Legyen h egy valódi automorfizmusa T-nek. Akkor az x és y vagy fix marad, vagy egymással cserélődik. Ha az x és az y is fix, akkor a T_x *is és a* T_y *is megőrzi minden színét, mert a távolság meg kell, hogy maradjon és így a szín is.*

Mivel $\chi_D(T) = 2$*, így a h mégsem lehet valódi.*

Az x és y-t felcserélő esetet nem tárgyaljuk.

Gyökeres fa

Definíció

A G gráfban z egy kitüntetett csúcs, a gyökér. G, z egy gyökeres gráf, A G csúcsainak egy címkézését r-megkülönböztetőnek mondjuk, ha nincs olyan automorfizmusa amely a címkéket megőrzi és a gyökeret fixen tartja. A megkülönböztető kromatikus száma a G, z gyökeres gráfnak $\chi_D(G, z)$ az a minimális r, amelyre van a G, z-nek jó r-megkülönböztető színezése.

Gyökeres fa

Definíció

A G gráfban z egy kitüntetett csúcs, a gyökér. G, z egy gyökeres gráf, A G csúcsainak egy címkézését r-megkülönböztetőnek mondjuk, ha nincs olyan automorfizmusa amely a címkéket megőrzi és a gyökeret fixen tartja. A megkülönböztető kromatikus száma a G, z gyökeres gráfnak $\chi_D(G, z)$ az a minimális r, amelyre van a G, z-nek jó r-megkülönböztető színezése.

Definíció

Jelölje egynél nagyobb k-ra $T_{k,h}$ az olyan gyökeres fát, amelyre mindegyik levél éppen h távolságra van a gyökértől és minden nem levél csúcs foka k.

Mike Albertson és Karen Collins tételei, 1999.

Brooks tétele a kromatikus szám és a maximális fok közötti mély kapcsolatról szól.

Mike Albertson és Karen Collins tételei, 1999.

Brooks tétele a kromatikus szám és a maximális fok közötti mély kapcsolatról szól.

A megkülönböztető kromatikus számmal kapcsolatban analóg állítást mondhatunk.

Mike Albertson és Karen Collins tételei, 1999.

Brooks tétele a kromatikus szám és a maximális fok közötti mély kapcsolatról szól.

A megkülönböztető kromatikus számmal kapcsolatban analóg állítást mondhatunk.

Tétel

A T fára $\chi_D(T) \leq \Delta(T) + 1$ *mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $T = T_{\Delta,h}$ *valamely nemnegatív h-ra.*

Mike Albertson és Karen Collins tételei, 1999.

Brooks tétele a kromatikus szám és a maximális fok közötti mély kapcsolatról szól.

A megkülönböztető kromatikus számmal kapcsolatban analóg állítást mondhatunk.

Tétel

A T fára $\chi_D(T) \leq \Delta(T) + 1$ mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $T = T_{\Delta,h}$ valamely nemnegatív h-ra.

Tétel

A T fára $D(T) \leq \Delta(T)$ mindig teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $T = T_{\Delta,h}$ valamely nemnegatív h-ra.

Tétel

A G összszefüggő gráfra $D(G) \leq \Delta(G) + 1$*. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G = K_{\Delta(G)+1}, K_{\Delta(G),\Delta(G)}$ *vagy* C_5*.*

Tétel

A G össszefüggő gráfra $D(G) \leq \Delta(G) + 1$. *Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G = K_{\Delta(G)+1}, K_{\Delta(G),\Delta(G)}$ *vagy* C_5.

Tétel

A G össszefüggő gráfra $\chi_D(G) \leq 2\Delta(G)$. *Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha* $G = K_{\Delta(G),\Delta(G)}$ *vagy* C_6.

Sejtés

Nincs olyan G összefüggő gráf, amelyre $\chi_D(G) = 2\Delta(G) - 1$.

Sejtés

Nincs olyan G összefüggő gráf, amelyre $\chi_D(G) = 2\Delta(G) - 1$.

Sejtés

Legyen G legalább 5 derékbőségű összefüggő gráf. Ekkor $\chi_D(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Tartalomjegyzék:

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.
Jelölje $N = [n] = \{1, \cdots, n\}$ az alaphalmazt.

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.
Jelölje $N = [n] = \{1, \cdots, n\}$ az alaphalmazt.
Jelölje $\binom{[n]}{k}$ az N összes k elemű részhalmazának halmazát.

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.
Jelölje $N = [n] = \{1, \cdots, n\}$ az alaphalmazt.
Jelölje $\binom{[n]}{k}$ az N összes k elemű részhalmazának halmazát.
Definiáljuk a $KG_{n,k}$ gráfot, amelynek a csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két elemet pontosan akkor köt össze egy él, ha diszjunktak.

Kneser gráfok

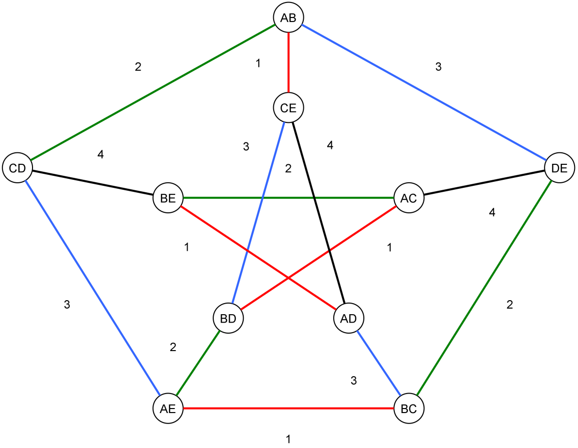
Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.
Jelölje $N = [n] = \{1, \cdots, n\}$ az alaphalmazt.
Jelölje $\binom{[n]}{k}$ az N összes k elemű részhalmazának halmazát.
Definiáljuk a $KG_{n,k}$ gráfot, amelynek a csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két elemet pontosan akkor köt össze egy él, ha diszjunktak.
Vajon mennyi $\chi(KG_{n,k})$?

Kneser gráfok

Martin Kneser 1955-ben definiálta a következő gráfcsaládot.
Legyen $k \leq n$ két természetes szám.
Jelölje $N = [n] = \{1, \cdots, n\}$ az alaphalmazt.
Jelölje $\binom{[n]}{k}$ az N összes k elemű részhalmazának halmazát.
Definiáljuk a $KG_{n,k}$ gráfot, amelynek a csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két elemet pontosan akkor köt össze egy él, ha diszjunktak.
Vajon mennyi $\chi(KG_{n,k})$?

- $KG_{n,1}$ az n csúcsú teljes gráf, $\chi(K_n) = n$.
- Ha $n < 2k$, $\chi(KG_{n,k}) = 1$, hiszen egyetlen éle sincs.
- $\chi(KG_{2k,k}) = 2$, hiszen mindegyik k elemű halmaz csak a komplementerével van összekötve,az élek egy párosítást adnak.

A Petersen gráf egy Kneser gráf



$KG_{5,2}$ az első érdekes gráf, ez éppen a Petersen gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$KG_{5,2}$ az első érdekes gráf, ez éppen a Petersen gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$\chi(KG_{5,2}) = 3$

$KG_{5,2}$ az első érdekes gráf, ez éppen a Petersen gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$\chi(KG_{5,2}) = 3$

- $KG_{n,k}$ csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$.

$KG_{5,2}$ az első érdekes gráf, ez éppen a Petersen gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$\chi(KG_{5,2}) = 3$

- $KG_{n,k}$ csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$.
- $KG_{n,k}$ éleinek száma: $\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.

$KG_{5,2}$ az első érdekes gráf, ez éppen a Petersen gráf, amely számos esetben, mint ellenpélda bukkan fel. Az ábrán látható, hogy a csúcsokat hogyan lehet a kételemű részhalmazokkal megfeleltetni.

$\chi(KG_{5,2}) = 3$

- $KG_{n,k}$ csúcsainak száma: $\binom{n}{k}$.
- $KG_{n,k}$ éleinek száma: $\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.
- A szimmetria -csúcstranzitív, éltranzitív - miatt reguláris, minden pont foka $\binom{n-k}{k}$.

Alapfogalmak.

Definíció

- *A G(V,E) és G'(V',E') gráfok* **izomorfak**, *ha létezik V és V' között egy f éltartó bijekció, melyre* $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.

Alapfogalmak.

Definíció

- *A G(V,E) és G'(V',E') gráfok* **izomorfak**, *ha létezik V és V' között egy f éltartó bijekció, melyre* $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.
- *A G(V,E) gráf* **automorfizmusa** *a csúcsainak egy olyan o permutációja amely éltartó, vagyis* $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{o(u), o(v)\} \in E$. *Tehát egy automorfizmus egy izomorfizmus önmagával.*

Alapfogalmak.

Definíció

- *A G(V,E) és G'(V',E') gráfok* **izomorfak**, *ha létezik V és V' között egy f éltartó bijekció, melyre* $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'$.
- *A G(V,E) gráf* **automorfizmusa** *a csúcsainak egy olyan o permutációja amely éltartó, vagyis* $\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{o(u), o(v)\} \in E$. *Tehát egy automorfizmus egy izomorfizmus önmagával.*

  Mivel az izomorfizmus ekvivalenciareláció, így az egymással izomorf gráfok egy osztályba kerülnek. Az azonos osztályba kerülő gráfokra szoktuk mondani, hogy lényegében nem különböznek, a szerkezetük egyforma, a gráfparamétereik megegyeznek.

Izomorfak?

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.

Izomorfak?

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.
Az az egyszerű (?) döntési probléma, vajon a G és G' gráfok izomorfak-e az NP osztályban van, hiszen gyorsan ellenőrizhető egy hozzárendelésről, hogy éltartó-e.

Izomorfak?

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.
Az az egyszerű (?) döntési probléma, vajon a G és G' gráfok izomorfak-e az NP osztályban van, hiszen gyorsan ellenőrizhető egy hozzárendelésről, hogy éltartó-e.

Azonban nem világos, hogy P-ben van-e!

Izomorfak?

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.
Az az egyszerű (?) döntési probléma, vajon a G és G' gráfok izomorfak-e az NP osztályban van, hiszen gyorsan ellenőrizhető egy hozzárendelésről, hogy éltartó-e.

Azonban nem világos, hogy P-ben van-e!

Az általánosabb **részgráf izomorfizmus** probléma azt kérdezi: Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan részgráfja, amely izomorf H-val?

Izomorfak?

Megszámolni bizonyos tulajdonsággal rendelkező számozott csúcsú gráfokat más feladat, mint megszámolni a lényegében különböző gráfokat, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal.
Az az egyszerű (?) döntési probléma, vajon a G és G' gráfok izomorfak-e az NP osztályban van, hiszen gyorsan ellenőrizhető egy hozzárendelésről, hogy éltartó-e.

Azonban nem világos, hogy P-ben van-e!

Az általánosabb **részgráf izomorfizmus** probléma azt kérdezi: Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan részgráfja, amely izomorf H-val?
Ez a probléma NP-teljes, hiszen ha $H = C_n$ és G n csúcsú, akkor annak eldöntéséről van szó, vajon létezik-e G-ben Hamilton-kör? Ez önmagában NP-teljes probléma.

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan feszített részgráfja, amely izomorf H-val?

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan feszített részgráfja, amely izomorf H-val?
Hasonlóan a részgráf izomorfizmus problémához ez is NP-teljes, hiszen ha H üres gráf, akkor az a kérdés, vajon van-e G-ben adott méretű stabil részgráf? Ennek eldöntése NP-teljes.

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan feszített részgráfja, amely izomorf H-val?
Hasonlóan a részgráf izomorfizmus problémához ez is NP-teljes, hiszen ha H üres gráf, akkor az a kérdés, vajon van-e G-ben adott méretű stabil részgráf? Ennek eldöntése NP-teljes.

Definíció

- *G csúcstranzitív gráf, ha bármely $u, v \in V(G)$ csúcspárra létezik olyan $f : V(G) \to V(G)$ automorfizmus, amelyre $f(u) = v$.*

Ha G és H két gráf, vajon létezik-e G-nek olyan feszített részgráfja, amely izomorf H-val?
Hasonlóan a részgráf izomorfizmus problémához ez is NP-teljes, hiszen ha H üres gráf, akkor az a kérdés, vajon van-e G-ben adott méretű stabil részgráf? Ennek eldöntése NP-teljes.

Definíció

- *G csúcstranzitív gráf, ha bármely $u, v \in V(G)$ csúcspárra létezik olyan $f: V(G) \to V(G)$ automorfizmus, amelyre $f(u) = v$.*
- *G éltranzitív gráf, ha bármely $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in E(G)$ élpárra létezik olyan $f: V(G) \to V(G)$ automorfizmus, amelyre $f(u_1) = u_2$ és $f(v_1) = v_2$, vagy $f(u_1) = v_2$ és $f(v_1) = u_2$. Másképpen, létezik bármely két élre olyan automorfizmus, ami az egyiket a másikba viszi.*

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ ponttranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ ponttranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Mekkora a $KG_{n,k}$ derékbősége?

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ ponttranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Mekkora a $KG_{n,k}$ derékbősége?

Mekkora a leghosszabb kör $KG_{n,k}$-ban?

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ ponttranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Mekkora a $KG_{n,k}$ derékbősége?

Mekkora a leghosszabb kör $KG_{n,k}$-ban?

$\omega(KG_{n,k}) =?$

Definíció

- *Az n csúcsú, reguláris G gráfban minden pont foka k. G* **erősen reguláris**, *ha léteznek p, q egészek, melyekre igaz, hogy G-ben bármely két szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma p, míg két nem szomszédos u, v csúcsra a közös szomszédaik száma q.*

Mit mondhatunk a $KG_{n,k}$ gráfokról?

$KG_{n,k}$ ponttranzitív, éltranzitív, erősen reguláris?

Mekkora a $KG_{n,k}$ derékbősége?

Mekkora a leghosszabb kör $KG_{n,k}$-ban?

$\omega(KG_{n,k}) = ?$
$\alpha(KG_{n,k}) = ?$

A Kneser-sejtés

Sejtés (Martin Kneser, 1955)

$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$

Az állítás elegáns, egy két paraméterrel meghatározott szép, szimmetriákkal rendelkező gráf kromatikus számát állítja, egységesen, kivételek nélkül.

A Kneser-sejtés

Sejtés (Martin Kneser, 1955)

$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$

Az állítás elegáns, egy két paraméterrel meghatározott szép, szimmetriákkal rendelkező gráf kromatikus számát állítja, egységesen, kivételek nélkül.

Az állítás igaz, Lovász László bizonyította be. 1977. március 4-én kapta meg a kéziratot a Journal of Combinatorial Theory, Series A folyóirat szerkesztősége. A cikk a 25. kötetben jelent meg, 1978-ban. Ezekben az években Lovász László Szegeden, a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének Geometria tanszékét vezette. A bizonyítás a topológia bizonyos eszközeit is használta.

A Kneser-sejtés

Sejtés (Martin Kneser, 1955)

$\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$

Az állítás elegáns, egy két paraméterrel meghatározott szép, szimmetriákkal rendelkező gráf kromatikus számát állítja, egységesen, kivételek nélkül.

Az állítás igaz, Lovász László bizonyította be. 1977. március 4-én kapta meg a kéziratot a Journal of Combinatorial Theory, Series A folyóirat szerkesztősége. A cikk a 25. kötetben jelent meg, 1978-ban. Ezekben az években Lovász László Szegeden, a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézetének Geometria tanszékét vezette. A bizonyítás a topológia bizonyos eszközeit is használta.
A kombinatorikus topológia egyik legelső nagy eredménye, a témakör fejlődését megalapozó gondolatokat tartalmaz.

Tétel (Lovász László, 1978)

$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$

Tétel (Lovász László, 1978)

$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$

Természetesen feltehetjük, hogy $r > 2s$. Alkalmazzuk az $r = 2n + k$ és $s = n$ jelölést.
Az átfogalmazott állítással:
$\chi(KG_{2n+k,n}) = k + 2$

Tétel (Lovász László, 1978)

$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$

Természetesen feltehetjük, hogy $r > 2s$. Alkalmazzuk az $r = 2n + k$ és $s = n$ jelölést.
Az átfogalmazott állítással:
$\chi(KG_{2n+k,n}) = k + 2$

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Tétel (Lovász László, 1978)

$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$

Természetesen feltehetjük, hogy $r > 2s$. Alkalmazzuk az $r = 2n + k$ és $s = n$ jelölést.
Az átfogalmazott állítással:
$\chi(KG_{2n+k,n}) = k + 2$

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

(k+2) osztályba könnyű szétosztani őket! Tegyük a K_i osztályba azon n-eseket, amelyeknek a legkisebb eleme i, $i = 1, \cdots, k + 2$. Ekkor a $K_1, \cdots, K_{k+1}$ és a $K_{k+2} \cup \cdots \cup K_{k+n+1}$ az n-esek egy megfelelő partíciója lesz (k+2) osztályba.
Bármely osztályba eső két n-es metsző.

Tétel (Lovász László, 1978)

$\chi(KG_{r,s}) = r - 2s + 2$

Természetesen feltehetjük, hogy $r > 2s$. Alkalmazzuk az $r = 2n + k$ és $s = n$ jelölést.
Az átfogalmazott állítással:
$\chi(KG_{2n+k,n}) = k + 2$

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

(k+2) osztályba könnyű szétosztani őket! Tegyük a K_i osztályba azon n-eseket, amelyeknek a legkisebb eleme i, $i = 1, \cdots, k + 2$. Ekkor a $K_1, \cdots, K_{k+1}$ és a $K_{k+2} \cup \cdots \cup K_{k+n+1}$ az n-esek egy megfelelő partíciója lesz (k+2) osztályba.
Bármely osztályba eső két n-es metsző.
A tétel tehát éppen a Kneser-sejtést állítja.

DeBruijn-Erdős tétele

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k} + 1)$-nél rövidebb páratlan körük.

DeBruijn-Erdős tétele

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k}+1)$-nél rövidebb páratlan körük.
Emiatt a gráfcsalád is példa háromszögmentes, magas kromatikus számú gráfokra.
Erdős Pál és Hajnal András 1966 és 1967-ben vizsgálta a Borsuk-gráfokat.

DeBruijn-Erdős tétele

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k}+1)$-nél rövidebb páratlan körük.
Emiatt a gráfcsalád is példa háromszögmentes, magas kromatikus számú gráfokra.
Erdős Pál és Hajnal András 1966 és 1967-ben vizsgálta a Borsuk-gráfokat.
Vegyük az S^k-t, a k dimenziós egységgömb felületét. Legyen $\epsilon > 0$ egy kis szám.
Legyenek a B_k csúcsai az S^k pontjai.
Legyen két pont (csúcs) éllel összekötve, ha távolságuk legalább $2 - \epsilon$.

DeBruijn-Erdős tétele

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k} + 1)$-nél rövidebb páratlan körük.
Emiatt a gráfcsalád is példa háromszögmentes, magas kromatikus számú gráfokra.
Erdős Pál és Hajnal András 1966 és 1967-ben vizsgálta a Borsuk-gráfokat.
Vegyük az S^k-t, a k dimenziós egységgömb felületét. Legyen $\epsilon > 0$ egy kis szám.
Legyenek a B_k csúcsai az S^k pontjai.
Legyen két pont (csúcs) éllel összekötve, ha távolságuk legalább $2 - \epsilon$.
Ez a gráf, ha pici az ϵ nem tartalmaz rövid páratlan kört! Ebben a tulajdonságban hasonlít a Kneser gráfokra.

DeBruijn-Erdős tétele

A Kneser-gráfok egy tulajdonsága, hogy nincs $(\frac{2n}{k} + 1)$-nél rövidebb páratlan körük.
Emiatt a gráfcsalád is példa háromszögmentes, magas kromatikus számú gráfokra.
Erdős Pál és Hajnal András 1966 és 1967-ben vizsgálta a Borsuk-gráfokat.
Vegyük az S^k-t, a k dimenziós egységgömb felületét. Legyen $\epsilon > 0$ egy kis szám.
Legyenek a B_k csúcsai az S^k pontjai.
Legyen két pont (csúcs) éllel összekötve, ha távolságuk legalább $2 - \epsilon$.
Ez a gráf, ha pici az ϵ nem tartalmaz rövid páratlan kört! Ebben a tulajdonságban hasonlít a Kneser gráfokra.
Jegyezzük itt meg, hogy B_k végtelen gráf! Azonban igaz a következő tétel!

Tétel (DeBruijn-Erdős, 1951)

Ha a G végtelen gráf csúcsai nem színezhetők ki k színnel, akkor létezik olyan véges G' részgráfja G-nek, amely szintén nem színezhető ki k színnel.

Tétel

Borsuk tétele Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$, ahol az $F_1, \cdots, F_{k+1}$ az S^k zárt részhalmazai, akkor valamelyik F_i biztosan tartalmaz két átellenes pontot.

Tétel (DeBruijn-Erdős, 1951)

Ha a G végtelen gráf csúcsai nem színezhetők ki k színnel, akkor létezik olyan véges G' részgráfja G-nek, amely szintén nem színezhető ki k színnel.

Tétel

Borsuk tétele Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$, *ahol az* $F_1, \cdots, F_{k+1}$ *az* S^k *zárt részhalmazai, akkor valamelyik* F_i *biztosan tartalmaz két átellenes pontot.*

Borsuk tétele ekvivalens azzal, hogy a B_k Borsuk gráf kromatikus száma (k+2).

Tétel (DeBruijn-Erdős, 1951)

Ha a G végtelen gráf csúcsai nem színezhetők ki k színnel, akkor létezik olyan véges G' részgráfja G-nek, amely szintén nem színezhető ki k színnel.

Tétel

Borsuk tétele Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$*, ahol az* $F_1, \cdots, F_{k+1}$ *az* S^k *zárt részhalmazai, akkor valamelyik* F_i *biztosan tartalmaz két átellenes pontot.*

Borsuk tétele ekvivalens azzal, hogy a B_k Borsuk gráf kromatikus száma (k+2).
Erdős, Hajnal, Simonovits és Lovász ötletét felhasználva Bárány Imre topológia nélkül igazolta Lovász tételét.

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat.

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat.
A Borsuk tételen kívül szükség volt még egy további erős állításra is.

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat.
A Borsuk tételen kívül szükség volt még egy további erős állításra is.

Tétel

Gale tétele Ha n és k nemnegatív egészek, akkor van egy $V \subset S^k$ *ponthalmaz, amelynek* $(2n + k)$ *eleme van és* $|H(a) \cap V| \geq n$ *teljesül minden* $a \in S^k$*-ra.*

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat.
A Borsuk tételen kívül szükség volt még egy további erős állításra is.

Tétel

Gale tétele Ha n és k nemnegatív egészek, akkor van egy $V \subset S^k$ *ponthalmaz, amelynek* $(2n + k)$ *eleme van és* $|H(a) \cap V| \geq n$ *teljesül minden* $a \in S^k$*-ra.*

Fent Borsuk tétele az eredeti megfogalmazásban szerepel, vagyis minden halmaz zárt. Bárány cikkében a következő változatot használja, amely kijön az eredeti tételből.

Tétel

Ha (2n+k) elem n-eseit (k+1) osztályba partícionáljuk, akkor valamelyik osztályba kerül két diszjunkt n-es.

Legyen $H(a) = \{x \in S^k : \langle a, x \rangle > 0\}$, ahol az a az egységgömb egy tetszőleges pontjába mutat.
A Borsuk tételen kívül szükség volt még egy további erős állításra is.

Tétel

Gale tétele Ha n és k nemnegatív egészek, akkor van egy $V \subset S^k$ *ponthalmaz, amelynek* $(2n + k)$ *eleme van és* $|H(a) \cap V| \geq n$ *teljesül minden* $a \in S^k$*-ra.*

Fent Borsuk tétele az eredeti megfogalmazásban szerepel, vagyis minden halmaz zárt. Bárány cikkében a következő változatot használja, amely kijön az eredeti tételből.
Borsuk tételének változata

Bárány Imre bizonyítása

Tétel

Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$*, ahol az* $F_1, \cdots, F_{k+1}$ *az* S^k *nyitott részhalmazai, akkor valamelyik* F_i *biztosan tartalmaz két átellenes pontot.*

Bizonyítás (Bárány, 1978)

A Gale tételben szereplő V ponthalmazt tekintsük a (2n+k) csúcsnak.

Bárány Imre bizonyítása

Tétel

Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$, ahol az $F_1, \cdots, F_{k+1}$ az S^k nyitott részhalmazai, akkor valamelyik F_i biztosan tartalmaz két átellenes pontot.

Bizonyítás (Bárány, 1978)

A Gale tételben szereplő V ponthalmazt tekintsük a (2n+k) csúcsnak. Tegyük fel, hogy az n-eseit (k+1) részre partícionáltuk, vagyis (k+1) színnel színeztük az n-eseket.

Bárány Imre bizonyítása

Tétel

Ha $S^k = F_1 \cup \cdots \cup F_{k+1}$, ahol az $F_1, \cdots, F_{k+1}$ az S^k nyitott részhalmazai, akkor valamelyik F_i biztosan tartalmaz két átellenes pontot.

Bizonyítás (Bárány, 1978)

A Gale tételben szereplő V ponthalmazt tekintsük a (2n+k) csúcsnak. Tegyük fel, hogy az n-eseit (k+1) részre partícionáltuk, vagyis (k+1) színnel színeztük az n-eseket.
Ez a színezés meghatározza az S^k egy (k+1) színezését a következő módon:Ha $a \in S^k$, akkor az a pont megkapja mindegyik n-es színét, amely benne van a $H(a) \cap V$-ben.

Bizonyítás

(folyt.) Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ *pont kap legalább egy színt.*

Bizonyítás

(folyt.) Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ *pont kap legalább egy színt.*
Megmutatható, hogy az azonos színű pontok az S^k *nyílt részhalmazát határozzák meg.*

Bizonyítás

(folyt.) Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ *pont kap legalább egy színt.*
Megmutatható, hogy az azonos színű pontok az S^k *nyílt részhalmazát határozzák meg.*
Alkalmazva Borsuk tételének nyílt változatát létezik olyan a *pontja a gömbfelületnek, melynek átellenes pontja,* $-a$ *is ugyanolyan színű.*

Bizonyítás

(folyt.) Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ *pont kap legalább egy színt.*
Megmutatható, hogy az azonos színű pontok az S^k *nyílt részhalmazát határozzák meg.*
Alkalmazva Borsuk tételének nyílt változatát létezik olyan a *pontja a gömbfelületnek, melynek átellenes pontja,* $-a$ *is ugyanolyan színű.*
Az a a *színét egy* $H(a) \cap V$*-beli* n*-estől kapta, míg a* $-a$ *pedig a* $H(-a) \cap V$ *egyik* n*-esétől.*

Bizonyítás

(folyt.) Gale tétele szerint minden $a \in S^k$ *pont kap legalább egy színt.*
Megmutatható, hogy az azonos színű pontok az S^k *nyílt részhalmazát határozzák meg.*
Alkalmazva Borsuk tételének nyílt változatát létezik olyan a *pontja a gömbfelületnek, melynek átellenes pontja,* $-a$ *is ugyanolyan színű.*
Az a a *színét egy* $H(a) \cap V$*-beli* n*-estől kapta, míg a* $-a$ *pedig a* $H(-a) \cap V$ *egyik* n*-esétől.*
A halmazok diszjunktak, azonos színt kapott tehát két diszjunkt n*-es.*

Schrijver-gráfok

Definíció

Egy $S \in \binom{[n]}{k}$ részhalmazt stabilnak mondunk, ha nem tartalmaz két szomszédos elemet modulo n, vagyis ha $i \in S$, akkor $(i+1) \notin S$, valamint ha $n \in S$, akkor $1 \notin S$.

Schrijver-gráfok

Definíció

Egy $S \in \binom{[n]}{k}$ *részhalmazt stabilnak mondunk, ha nem tartalmaz két szomszédos elemet modulo n, vagyis ha* $i \in S$, *akkor* $(i+1) \notin S$, *valamint ha* $n \in S$, *akkor* $1 \notin S$.
Jelölje $(\binom{[n]}{k})_{stab}$ *az alaphalmaz k-asai közül a stabilokat.*

Schrijver-gráfok

Definíció

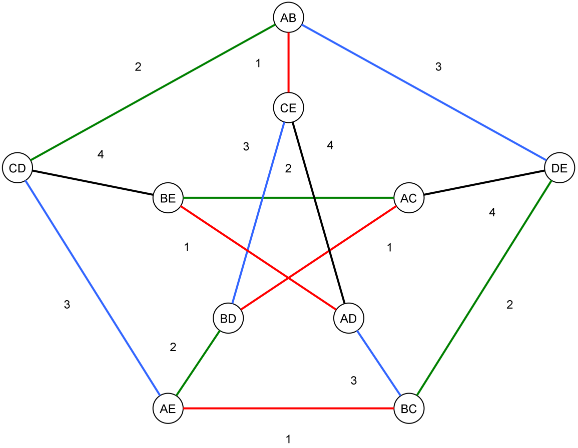
Egy $S \in \binom{[n]}{k}$ *részhalmazt stabilnak mondunk, ha nem tartalmaz két szomszédos elemet modulo n, vagyis ha* $i \in S$, *akkor* $(i+1) \notin S$, *valamint ha* $n \in S$, *akkor* $1 \notin S$.
Jelölje $(\binom{[n]}{k})_{stab}$ *az alaphalmaz k-asai közül a stabilokat.*
A Schrijver gráfok $SG_{n,k} := KG((\binom{[n]}{k})_{stab})$ *a Kneser gráfok bizonyos feszített rászgráfjai.*

Schrijver-gráfok

Definíció

Egy $S \in \binom{[n]}{k}$ részhalmazt stabilnak mondunk, ha nem tartalmaz két szomszédos elemet modulo n, vagyis ha $i \in S$, akkor $(i+1) \notin S$, valamint ha $n \in S$, akkor $1 \notin S$.
Jelölje $(\binom{[n]}{k})_{stab}$ az alaphalmaz k-asai közül a stabilokat.
A Schrijver gráfok $SG_{n,k} := KG((\binom{[n]}{k})_{stab})$ a Kneser gráfok bizonyos feszített rászgráfjai.
Pl. a Petersen gráfból egy ötszög adódik, ha vesszük a Schrijver részgráfját!

A Petersen gráf egy Kneser gráf



Schrijver tétele.

Tétel (Schrijver, 1978)

Ha $n \geq 2k \geq 0$, *akkor*

$$\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Schrijver tétele.

Tétel (Schrijver, 1978)

Ha $n \geq 2k \geq 0$*, akkor*

$$\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Tehát ennek a részgráfnak a kiszínezése még ugyanannyi színt igényel mint a Kneser gráf.

Schrijver tétele.

Tétel (Schrijver, 1978)

Ha $n \geq 2k \geq 0$, akkor

$$\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Tehát ennek a részgráfnak a kiszínezése még ugyanannyi színt igényel mint a Kneser gráf.

Feladat

$SG_{n,k}$ nem mindig reguláris gráf.
Mit mondhatunk egyéb szimmetriáiról?

Schrijver tétele.

Tétel (Schrijver, 1978)

Ha $n \geq 2k \geq 0$, akkor

$$\chi(SG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$$

Tehát ennek a részgráfnak a kiszínezése még ugyanannyi színt igényel mint a Kneser gráf.

Feladat

$SG_{n,k}$ nem mindig reguláris gráf.
Mit mondhatunk egyéb szimmetriáiról?

Feladat

$SG_{n,k}$ kromatikus kritikus gráf, vagyis bármely csúcsát elhagyva csökken a kromatikus száma. (Schrijver eredménye)

Általános Kneser gráfok.

Definíció

Legyen X egy véges alaphalmaz és legyen $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ egy halmazrendszer. Az $\mathcal{F}$ Kneser gráfja, $KG(\mathcal{F})$ csúcshalmaza $\mathcal{F}$, és két $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ szomszédos, ha metszetük az üres halmaz.

Tartalomjegyzék:

Multigráfok.

A 4-szín tétel bizonyításának keresésekor számos szép gondolat született, elsősorban Peter Guthrie Tait, a fia Frederick Tait, Alfred Bray Kempe, Julius Petersen, William Tutte és mások munkássága nyomán.

Multigráfok.

A 4-szín tétel bizonyításának keresésekor számos szép gondolat született, elsősorban Peter Guthrie Tait, a fia Frederick Tait, Alfred Bray Kempe, Julius Petersen, William Tutte és mások munkássága nyomán.

Legyen G egy térkép gráfja, amely összefüggő, nincs hídja, síkba ágyazható multigráf.

Multigráfok.

A 4-szín tétel bizonyításának keresésekor számos szép gondolat született, elsősorban Peter Guthrie Tait, a fia Frederick Tait, Alfred Bray Kempe, Julius Petersen, William Tutte és mások munkássága nyomán.

Legyen G egy térkép gráfja, amely összefüggő, nincs hídja, síkba ágyazható multigráf.

Ha G-ben minden csúcs foka legalább kettő, akkor hozzárendelhető egy G' 3-reguláris,összefüggő, hídmentes síkbeli térkép amely éppen akkor színezhető k színnel, ha G is.

Multigráfok.

A 4-szín tétel bizonyításának keresésekor számos szép gondolat született, elsősorban Peter Guthrie Tait, a fia Frederick Tait, Alfred Bray Kempe, Julius Petersen, William Tutte és mások munkássága nyomán.

Legyen G egy térkép gráfja, amely összefüggő, nincs hídja, síkba ágyazható multigráf.

Ha G-ben minden csúcs foka legalább kettő, akkor hozzárendelhető egy G' 3-reguláris,összefüggő, hídmentes síkbeli térkép amely éppen akkor színezhető k színnel, ha G is.

Az átalakításban minden v, több mint 3 fokú csúcsnál a v szomszédjaihoz futó élre felveszünk egy-egy csúcsot, ezeket a síkbeli elhelyezkedés szerint - egy él kivételével - körbe fűzzük, majd elhagyjuk a v-t és a v-ből az új csúcsokhoz vezető "élt".

Ha egy u kettő fokú, akkor szomszédai legyenek x és y. Az u-t helyettesítsük egy $K_4 \setminus e$ "kis" gráffal úgy, hogy x-et és y-t a kettő fokú csúcsokkal kötjük össze.

Ha egy u kettő fokú, akkor szomszédai legyenek x és y. Az u-t helyettesítsük egy $K_4 \setminus e$ "kis" gráffal úgy, hogy x-et és y-t a kettő fokú csúcsokkal kötjük össze.

A kapott gráf 3-reguláris, összefüggő, híd nélküli síkgráf.

Ha egy u kettő fokú, akkor szomszédai legyenek x és y. Az u-t helyettesítsük egy $K_4 \setminus e$ "kis" gráffal úgy, hogy x-et és y-t a kettő fokú csúcsokkal kötjük össze.

A kapott gráf 3-reguláris, összefüggő, híd nélküli síkgráf.

Állítás

A 4-szín tétel pontosan akkor igaz, ha minden kétszeresen összefüggő 3-reguláris gráfra, síkbeli térképre (3-térképre) igaz.

Tartományok,határok

Tegyük fel, hogy egy 3-térképet kiszíneztünk 4 színnel (A,B,C,D).

Tartományok,határok

Tegyük fel, hogy egy 3-térképet kiszíneztünk 4 színnel (A,B,C,D).

Ennek alapján ki fogjuk színezni a tartományok közös határszakaszait 3 színnel úgy, hogy a gráf éleit jól színezzük.

Tartományok,határok

Tegyük fel, hogy egy 3-térképet kiszíneztünk 4 színnel (A,B,C,D).

Ennek alapján ki fogjuk színezni a tartományok közös határszakaszait 3 színnel úgy, hogy a gráf éleit jól színezzük.

Ha egy él két partján adott a két szín, leírjuk milyen színt kap a határszakasz:

Tartományok,határok

Tegyük fel, hogy egy 3-térképet kiszíneztünk 4 színnel (A,B,C,D).

Ennek alapján ki fogjuk színezni a tartományok közös határszakaszait 3 színnel úgy, hogy a gráf éleit jól színezzük.

Ha egy él két partján adott a két szín, leírjuk milyen színt kap a határszakasz:

A,B $\rightarrow$B
A,C $\rightarrow$C
A,D $\rightarrow$D
B,C $\rightarrow$D
B,D $\rightarrow$C
C,D $\rightarrow$B.

Visszafelé, ha a B,C és D színekkel sikerült a 3-térkép éleit kiszínezni, akkor az egyik tartományt színezzük ki A-val, majd az élszomszédait a fenti formulák alapján színezzük ki megfelelő módon, az új ország színe a már kiszínezett szomszéd színe és a közös határszakasz színéből következik a fenti szabályok alapján. (M. Gardner színezése, 1976)

Visszafelé, ha a B,C és D színekkel sikerült a 3-térkép éleit kiszínezni, akkor az egyik tartományt színezzük ki A-val, majd az élszomszédait a fenti formulák alapján színezzük ki megfelelő módon, az új ország színe a már kiszínezett szomszéd színe és a közös határszakasz színéből következik a fenti szabályok alapján. (M. Gardner színezése, 1976)

Tétel

Tait tétele Az alábbi állítások ekvivalensek:

- *(i) Bármely síkgráf kiszínezhető 4 színnel.*
- *(ii) Bármely 3-térkép gráfjának kromatikus indexe 3.*
- *(iii) Bármely 3-térkép gráfja tartalmaz 1-faktort.*
- *(iv) Bármely 3-térkép gráfja az 1. osztályba tartozik.*

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tétele következne.

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tétele következne.

Azonban nem csak olyan 3-reguláris gráfok léteznek, amelyek térkép gráfjaként előállnak.

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tétele következne.

Azonban nem csak olyan 3-reguláris gráfok léteznek, amelyek térkép gráfjaként előállnak.

Ha létezhet híd, akkor könnyű ellenpélda, ha két K_4 egy-egy élére felvett csúcsokat egy híddal összekötjük.

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tétele következne.

Azonban nem csak olyan 3-reguláris gráfok léteznek, amelyek térkép gráfjaként előállnak.

Ha létezhet híd, akkor könnyű ellenpélda, ha két K_4 egy-egy élére felvett csúcsokat egy híddal összekötjük.

Természetesen olyan 3-reguláris gráfok is vannak, amelyek nem ágyazhatók be a síkba és élei nem 3-színezhetők.

Tait először azt hitte, hogy minden 3-reguláris gráf élei 3-színezhetők.

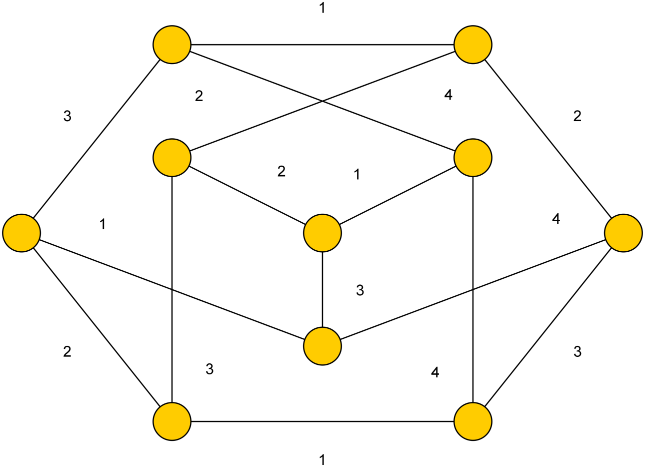
Ha így lenne, akkor az előző tétele szerint a térképek 4-szín tétele következne.

Azonban nem csak olyan 3-reguláris gráfok léteznek, amelyek térkép gráfjaként előállnak.

Ha létezhet híd, akkor könnyű ellenpélda, ha két K_4 egy-egy élére felvett csúcsokat egy híddal összekötjük.

Természetesen olyan 3-reguláris gráfok is vannak, amelyek nem ágyazhatók be a síkba és élei nem 3-színezhetők.

Egy ilyen a Petersen gráf.


1
2
4
3
2
2
1
1
4
3
2
3
4
3
1

Feladat

A Petersen gráfban van teljes párosítás.

Feladat

A Petersen gráfban van teljes párosítás.

Feladat

A Petersen gráfban nincs három diszjunkt 1-faktor, vagyis az élei nem színezhetők 3 színnel.

Feladat

A Petersen gráfban van teljes párosítás.

Feladat

A Petersen gráfban nincs három diszjunkt 1-faktor, vagyis az élei nem színezhetők 3 színnel.

Állítás

Minden híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Teljes párosítás létezése páros gráfokban

Legyen G egy kétrészes gráf, A és B színosztályokkal. König és Hall tétele szerint G-ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha bármely $S \subseteq A$ esetén $|N(S)| \geq |S|$. (N(S) az S szomszédainak halmaza G-ben.)

Teljes párosítás létezése páros gráfokban

Legyen G egy kétrészes gráf, A és B színosztályokkal. König és Hall tétele szerint G-ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha bármely $S \subseteq A$ esetén $|N(S)| \geq |S|$. (N(S) az S szomszédainak halmaza G-ben.)

Általában is sikerült szükséges és elégséges feltételét megadni annak, hogy egy G gráfnak legyen teljes párosítása.
William Tutte 1954-ben bizonyította tételét:

Tétel

Egy nem üres G gráfnak akkor és csak akkor létezik teljes párosítása, ha $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ minden $S \subseteq V(G)$ valódi részhalmazra. ($k_o(H)$ a H gráf páratlan nagyságú komponenseinek számát jelenti, míg a $G \setminus S$ a $V(G) \setminus S$ csúcshalmaz által feszített részgráfját jelenti G-nek.)

Bizonyítás

Szükségesség:
Tegyük fel, hogy létezik a G csúcsainak teljes párosítása.

Bizonyítás

Szükségesség:
Tegyük fel, hogy létezik a G csúcsainak teljes párosítása.

Legyen S egy tetszőleges részhalmaza V(G)-nek. Ha $G \setminus S$ -nek nincs páratlan komponense, akkor teljesül az egyenlőtlenség.

Bizonyítás

Szükségesség:
Tegyük fel, hogy létezik a G csúcsainak teljes párosítása.

Legyen S egy tetszőleges részhalmaza V(G)-nek. Ha $G \setminus S$ -nek nincs páratlan komponense, akkor teljesül az egyenlőtlenség.

Jegyezzük meg, hogy még az $S = \emptyset$ esetén is! Tegyük fel, hogy $k_o(G \setminus S) = k \geq 1$. A komponensek között nincs él, így mindegyik páratlan méretű komponensben van legalább egy olyan csúcs, amely az S egy elemével van párosítva.

Bizonyítás

Szükségesség:
Tegyük fel, hogy létezik a G csúcsainak teljes párosítása.

Legyen S egy tetszőleges részhalmaza V(G)-nek. Ha $G \setminus S$ *-nek nincs páratlan komponense, akkor teljesül az egyenlőtlenség.*

Jegyezzük meg, hogy még az $S = \emptyset$ *esetén is! Tegyük fel, hogy* $k_o(G \setminus S) = k \geq 1$. *A komponensek között nincs él, így mindegyik páratlan méretű komponensben van legalább egy olyan csúcs, amely az S egy elemével van párosítva.*

Emiatt $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ *kell, hogy teljesüljön.*

Bizonyítás

Elegendőség:
Tegyük most fel, hogy minden valódi S részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ teljesül.

Bizonyítás

Elegendőség:
Tegyük most fel, hogy minden valódi S részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ *teljesül.*

Jegyezzük meg, hogy az $S = \emptyset$ *esetre alkalmazva a feltételt azt kapjuk, hogy G-nek nincs páratlan komponense, vagyis minden komponense páros sok csúcsból áll. Ellenkező esetben nyilván nem lehetne párosítani a csúcsokat!*

Bizonyítás

Elegendőség:
Tegyük most fel, hogy minden valódi S részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ *teljesül.*

Jegyezzük meg, hogy az $S = \emptyset$ *esetre alkalmazva a feltételt azt kapjuk, hogy G-nek nincs páratlan komponense, vagyis minden komponense páros sok csúcsból áll. Ellenkező esetben nyilván nem lehetne párosítani a csúcsokat!*

Megmutatjuk, hogy van G-ben teljes párosítás!

Bizonyítás

Elegendőség:
Tegyük most fel, hogy minden valódi S *részhalmazra* $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ *teljesül.*

Jegyezzük meg, hogy az $S = \emptyset$ *esetre alkalmazva a feltételt azt kapjuk, hogy* G*-nek nincs páratlan komponense, vagyis minden komponense páros sok csúcsból áll. Ellenkező esetben nyilván nem lehetne párosítani a csúcsokat!*

Megmutatjuk, hogy van G*-ben teljes párosítás!*

Alkalmazzunk teljes indukciót a páros rendű G *gráfokra. A két csúcsú nemüres gráf éppen egy él.*

Bizonyítás

Elegendőség:
Tegyük most fel, hogy minden valódi S részhalmazra $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ teljesül.

Jegyezzük meg, hogy az $S = \emptyset$ esetre alkalmazva a feltételt azt kapjuk, hogy G-nek nincs páratlan komponense, vagyis minden komponense páros sok csúcsból áll. Ellenkező esetben nyilván nem lehetne párosítani a csúcsokat!

Megmutatjuk, hogy van G-ben teljes párosítás!

Alkalmazzunk teljes indukciót a páros rendű G gráfokra. A két csúcsú nemüres gráf éppen egy él.

Legyen $n = |V(G)| \geq 4$ és tegyük fel, hogy minden kisebb gráfra igaz az állítás vizsgált iránya! Tegyük fel, hogy G-re $k_o(G \setminus S) \leq |S|$ teljesül minden valódi S csúcshalmazra.

Bizonyítás

(folyt.) G-nek minden komponense páros rendű. Ha G-ből elhagyunk egy olyan v csúcsot, amely nem elvágó pont a komponensében (ilyen van, mert egy feszítő fájának egy levele mindig ilyen), akkor $k_o(G \setminus v) = 1$.

Bizonyítás

(folyt.) G-nek minden komponense páros rendű. Ha G-ből elhagyunk egy olyan v csúcsot, amely nem elvágó pont a komponensében (ilyen van, mert egy feszítő fájának egy levele mindig ilyen), akkor $k_o(G \setminus v) = 1$.

Van tehát olyan nemüres S' csúcs részhalmaz, amelyre $k_o(G \setminus S') = |S'| = k' \geq 1$ *és legyen S az ilyenek közül egy maximális elemszámú* ($|S| = k$)*, valamint a* $G \setminus S$ *páratlan komponensei legyenek rendre* $G_1, \cdots, G_k$.

Bizonyítás

(folyt.) G-nek minden komponense páros rendű. Ha G-ből elhagyunk egy olyan v csúcsot, amely nem elvágó pont a komponensében (ilyen van, mert egy feszítő fájának egy levele mindig ilyen), akkor $k_o(G \setminus v) = 1$.

Van tehát olyan nemüres S' csúcs részhalmaz, amelyre $k_o(G \setminus S') = |S'| = k' \geq 1$ *és legyen S az ilyenek közül egy maximális elemszámú* ($|S| = k$)*, valamint a* $G \setminus S$ *páratlan komponensei legyenek rendre* $G_1, \cdots, G_k$.

Belátjuk, hogy a $G \setminus S$ *-nek más komponensei nincsenek (páros méretűek)!*

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy a G_0 *egy páros komponense* $G \setminus S$*-nek és* v_0 *ennek egy nem elvágó pontja!*

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy a G_0 *egy páros komponense* $G \setminus S$*-nek és* v_0 *ennek egy nem elvágó pontja!*

Legyen $S_0 = S \cup \{v_0\}$*. Ekkor az* S_0 *elhagyásával egy újabb páratlan komponens keletkezik így továbbra is fennáll, hogy a páratlan komponensek száma* $|S_0|$*.*

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy a G_0 egy páros komponense $G \setminus S$-nek és v_0 ennek egy nem elvágó pontja!

Legyen $S_0 = S \cup \{v_0\}$. Ekkor az S_0 elhagyásával egy újabb páratlan komponens keletkezik így továbbra is fennáll, hogy a páratlan komponensek száma $|S_0|$.

Ez ellentmond annak, hogy S volt a legnagyobb ilyen. Tehát a komponensek: $G_1, \cdots, G_k$.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy a G_0 *egy páros komponense* $G \setminus S$*-nek és* v_0 *ennek egy nem elvágó pontja!*

Legyen $S_0 = S \cup \{v_0\}$*. Ekkor az* S_0 *elhagyásával egy újabb páratlan komponens keletkezik így továbbra is fennáll, hogy a páratlan komponensek száma* $|S_0|$*.*

Ez ellentmond annak, hogy S *volt a legnagyobb ilyen. Tehát a komponensek:* $G_1, \cdots, G_k$*.*

Legyen $S_i \subseteq S$ *a* G_i *legalább egy csúcsával szomszédos pontok halmaza* $(1 \leq i \leq k)$*.* S_i *nem lehet üres, mert mindegyik komponens páratlan.*

Bizonyítás

(folyt.) Belátjuk, hogy bármely l db. S_i halmaz uniója legalább l elemű. Ha nem így lenne, akkor léteznének $S_{j_1}, \cdots, S_{j_l}$ halmazok, melyekre

$$S' = S_{j_1} \cup \cdots \cup S_{j_l}$$

és $|S'| < j$.

Bizonyítás

(folyt.) Belátjuk, hogy bármely l db. S_i halmaz uniója legalább l elemű. Ha nem így lenne, akkor léteznének $S_{j_1}, \cdots, S_{j_l}$ halmazok, melyekre

$$S' = S_{j_1} \cup \cdots \cup S_{j_l}$$

és $|S'| < j$.

Ekkor $G_{j_1}, \cdots, G_{j_l}$ a $G \setminus S'$ komponensei között vannak, vagyis $k_o(G \setminus S') \geq j > |S'|$, amely ellentmond az alapfeltevésnek.

Bizonyítás

(folyt.) Belátjuk, hogy bármely l db. S_i halmaz uniója legalább l elemű. Ha nem így lenne, akkor léteznének $S_{j_1}, \cdots, S_{j_l}$ halmazok, melyekre

$$S' = S_{j_1} \cup \cdots \cup S_{j_l}$$

és $|S'| < j$.

Ekkor $G_{j_1}, \cdots, G_{j_l}$ a $G \setminus S'$ komponensei között vannak, vagyis $k_o(G \setminus S') \geq j > |S'|$, amely ellentmond az alapfeltevésnek.

Tehát nem lehet az S_i halmazokból olyan módon kiválasztani néhányat, hogy kisebb legyen az uniójuk elemszáma, mint amennyien vannak.

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i-kből, vagyis olyan $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ teljesül.

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i-kből, vagyis olyan $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ teljesül.

Mivel a $G \setminus S$ mindegyik G_i komponensében van olyan u_i pont amely szomszédja v_i-nek, így a $\{u_i, v_i\}$ élek adnak egy párosítást.

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i-kből, vagyis olyan $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ teljesül.

Mivel a $G \setminus S$ mindegyik G_i komponensében van olyan u_i pont amely szomszédja v_i-nek, így a $\{u_i, v_i\}$ élek adnak egy párosítást.

Meg kell még mutatnunk, hogy a $G_i \setminus u_i$ gráfoknak van teljes párosítása.

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i*-kből, vagyis olyan* $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ *csúcsokat, melyekre* $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ *teljesül.*

Mivel a $G \setminus S$ *mindegyik* G_i *komponensében van olyan* u_i *pont amely szomszédja* v_i*-nek, így a* $\{u_i, v_i\}$ *élek adnak egy párosítást.*

Meg kell még mutatnunk, hogy a $G_i \setminus u_i$ *gráfoknak van teljes párosítása.*

Legyen W *a* $V(G_i \setminus u_i)$ *egy valódi részhalmaza.*

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i-kből, vagyis olyan $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ teljesül.

Mivel a $G \setminus S$ mindegyik G_i komponensében van olyan u_i pont amely szomszédja v_i-nek, így a $\{u_i, v_i\}$ élek adnak egy párosítást.

Meg kell még mutatnunk, hogy a $G_i \setminus u_i$ gráfoknak van teljes párosítása.

Legyen W a $V(G_i \setminus u_i)$ egy valódi részhalmaza.

Belátjuk, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \leq |W|$$

teljesül!

Bizonyítás

(folyt.) Ebben az esetben azonban ki lehet választani egy reprezentáns rendszert az S_i-kből, vagyis olyan $\{v_1, \cdots, v_k\} \subseteq S$ csúcsokat, melyekre $v_i \in S_i$ $(1 \leq i \leq k)$ teljesül.

Mivel a $G \setminus S$ mindegyik G_i komponensében van olyan u_i pont amely szomszédja v_i-nek, így a $\{u_i, v_i\}$ élek adnak egy párosítást.

Meg kell még mutatnunk, hogy a $G_i \setminus u_i$ gráfoknak van teljes párosítása.

Legyen W a $V(G_i \setminus u_i)$ egy valódi részhalmaza.

Belátjuk, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \leq |W|$$

teljesül!

Ebből már következik az Elegendőség, hiszen a kisebb komponensekre azt feltettük.

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) > |W|$$

teljesül!

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) > |W|$$

teljesül!

Mivel a G_i *páratlan, így a* $k_o(G_i \setminus u_i \setminus W)$ *és* $|W|$ *azonos paritású.*

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) > |W|$$

teljesül!

Mivel a G_i *páratlan, így a* $k_o(G_i \setminus u_i \setminus W)$ *és* $|W|$ *azonos paritású.*

Tehát

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \geq |W| + 2.$$

Bizonyítás

(folyt.) Tegyük fel indirekt, hogy

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) > |W|$$

teljesül!

Mivel a G_i *páratlan, így a* $k_o(G_i \setminus u_i \setminus W)$ *és* $|W|$ *azonos paritású.*

Tehát

$$k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) \geq |W| + 2.$$

Legyen $X = S \cup W \cup \{u_i\}$.

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor

$$|X| = |S| + |W| + 1 = |S| + (|W| + 2) - 1$$

$$\leq k_o(G \setminus S) + k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) - 1$$

$$= k_o(G \setminus X) \leq |X|$$

Bizonyítás

(folyt.) Ekkor

$$|X| = |S| + |W| + 1 = |S| + (|W| + 2) - 1$$

$$\leq k_o(G \setminus S) + k_o(G_i \setminus u_i \setminus W) - 1$$

$$= k_o(G \setminus X) \leq |X|$$

Ebből $k_o(G \setminus X) = |X|$, *ami ellentmond az S választásának.*

Petersen tétele

Állítás

Minden G híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Petersen tétele

Állítás

Minden G híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Bizonyítás

Legyen G egy elvágó élt nem tartalmazó 3-reguláris gráf.
Alkalmazzuk Tutte tételét!

Petersen tétele

Állítás

Minden G híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Bizonyítás

Legyen G egy elvágó élt nem tartalmazó 3-reguláris gráf. Alkalmazzuk Tutte tételét!

Belátjuk, hogy bármely $S \subseteq V(G)$ *valódi részhalmazra* $k_o(G \setminus S) \leq |S| = k$.

Petersen tétele

Állítás

Minden G híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Bizonyítás

Legyen G egy elvágó élt nem tartalmazó 3-reguláris gráf. Alkalmazzuk Tutte tételét!

Belátjuk, hogy bármely $S \subseteq V(G)$ *valódi részhalmazra* $k_o(G \setminus S) \leq |S| = k$.

Tegyük fel, hogy a $G \setminus S$ *páratlan komponensei* $G_1, \cdots, G_l$.

Petersen tétele

Állítás

Minden G híd nélküli 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Bizonyítás

Legyen G egy elvágó élt nem tartalmazó 3-reguláris gráf. Alkalmazzuk Tutte tételét!

Belátjuk, hogy bármely $S \subseteq V(G)$ *valódi részhalmazra* $k_o(G \setminus S) \leq |S| = k$.

Tegyük fel, hogy a $G \setminus S$ *páratlan komponensei* $G_1, \cdots, G_l$.

Jelölje E_i *az* S *és* G_i *között menő élhalmazt* $(1 \leq i \leq l)$!

Bizonyítás

(folyt.) Mivel minden csúcs foka 3 a G-ben, így bármely páratlan G_i *komponens a belül futó páros sok él mellett az S-hez páratlan számú éllel kapcsolódik, vagyis* $|E_i|$ *páratlan szám.*

Bizonyítás

(folyt.) Mivel minden csúcs foka 3 a G-ben, így bármely páratlan G_i *komponens a belül futó páros sok él mellett az S-hez páratlan számú éllel kapcsolódik, vagyis* $|E_i|$ *páratlan szám.*

Mivel G-ben nincs híd, így $|E_i| \geq 3$*, minden* $(1 \leq i \leq l)$ *esetén.*

Bizonyítás

(folyt.) Mivel minden csúcs foka 3 a G-ben, így bármely páratlan G_i *komponens a belül futó páros sok él mellett az S-hez páratlan számú éllel kapcsolódik, vagyis* $|E_i|$ *páratlan szám.*

Mivel G-ben nincs híd, így $|E_i| \geq 3$*, minden* $(1 \leq i \leq l)$ *esetén.*

Mivel az S-beli pontoknak is 3 a foka, így

$$3k_o(G \setminus S) = 3l \leq 3k = 3|S|$$

tehát $k_o(G \setminus S) \leq |S|$*.*

Megjegyzés

A bizonyítást óvatosan átgondolva kiderül, hogy ha legfeljebb 2 híd van G-ben, akkor létezik teljes párosítása.

A 4-szín tétel következménye

Feladat

Adjunk meg olyan 3-reguláris gráfot, amelyben 3 híd van és nincs is teljes párosítása!

A 4-szín tétel következménye

Feladat

Adjunk meg olyan 3-reguláris gráfot, amelyben 3 híd van és nincs is teljes párosítása!

Következmény

Minden hídmentes 3-reguláris síkgráf az 1. osztályba tartozik (vagyis 3-színezhetők az élei).

A 4-szín tétel következménye

Feladat

Adjunk meg olyan 3-reguláris gráfot, amelyben 3 híd van és nincs is teljes párosítása!

Következmény

Minden hídmentes 3-reguláris síkgráf az 1. osztályba tartozik (vagyis 3-színezhetők az élei).

Feladat

Vannak olyan G síkgráfok, amelyekre $\Delta(G) = k$ *és az élei színezhetők k színnel, valamint olyanok is, amelyek csak (k+1)-élszínezhetőek (*$2 \leq k \leq 5$*) esetén.*

Tétel (Vadim Vizing, 1965)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) \geq 8$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Tétel (Vadim Vizing, 1965)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) \geq 8$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Tétel (Daniel Sanders, Yue Zhao, 2001)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) = 7$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Tétel (Vadim Vizing, 1965)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) \geq 8$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Tétel (Daniel Sanders, Yue Zhao, 2001)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) = 7$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

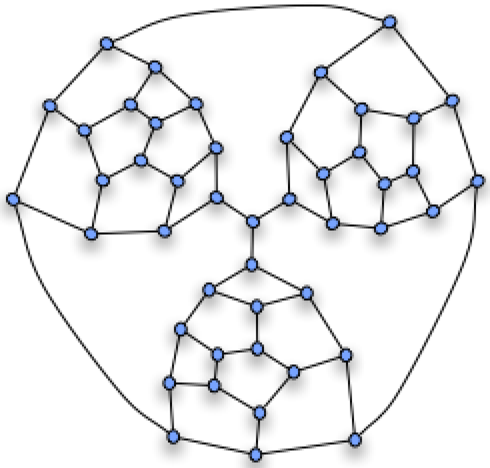
Sejtés (Vizing síkgráf sejtése)

Ha G síkgráf és $\Delta(G) = 6$, akkor G az 1. osztályba tartozik.

Milyenek azok a 3-reguláris, hídmentes gráfok, amelyek a 2. osztályba tartoznak, tehát az élei 4-színezhetők?

Milyenek azok a 3-reguláris, hídmentes gráfok, amelyek a 2. osztályba tartoznak, tehát az élei 4-színezhetők?

- Nem síkgráfok.
- Nem tartalmaznak Hamilton kört.



Snyárk vadászat!

Lewis Carrol: The hunting of the **Snark** (An agony in 8 fits)

nonszensz verse alapján kapta nevét az a gráfcsalád, amelynek jellemzői: összefüggő, hídmentes, 3-reguláris, 4 szín kell az élei kiszínezéséhez. Gyakran felteszik még azt is, hogy a legrövidebb köre legyen legalább 5 hosszú!

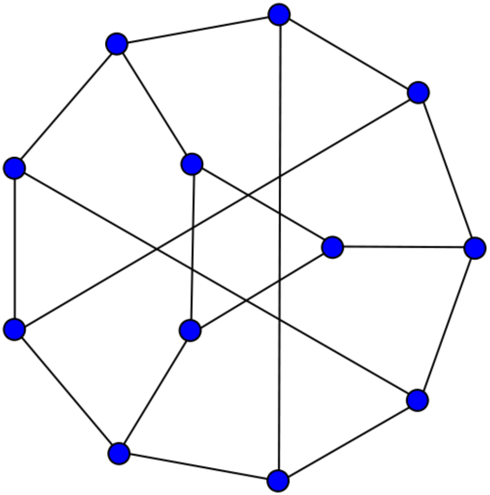
Snyárk vadászat!

Lewis Carrol: The hunting of the **Snark** (An agony in 8 fits)

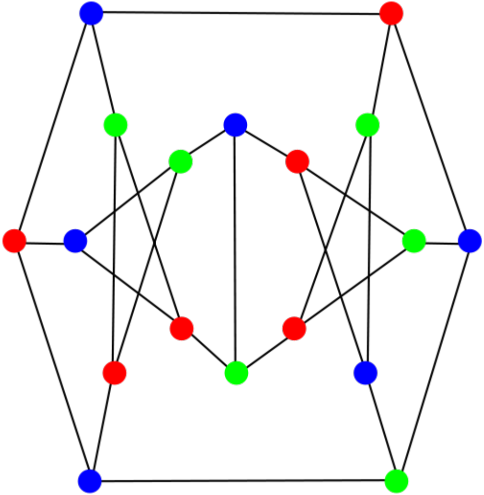
nonszensz verse alapján kapta nevét az a gráfcsalád, amelynek jellemzői: összefüggő, hídmentes, 3-reguláris, 4 szín kell az élei kiszínezéséhez. Gyakran felteszik még azt is, hogy a legrövidebb köre legyen legalább 5 hosszú!

Maga a 4-szín tétel ekvivalens azzal, nincs olyan Snark (magyarítási kísérlet: Snyárk), amely síkba rajzolható? Nem csoda, hogy vadászni kezdtek ezen különleges gráfokra! Néhány ilyet mutatnak az ábrák, közöttük Szekeres Györgyét is! A harmincas évek elején Budapesten olyan matematikus közösség gondolkodott együtt, akik forradalmasították a diszkrét matematikát! Erdős Pál az egész világon, Szekeres György Ausztráliában emelte a matematikát magasabb szintre!

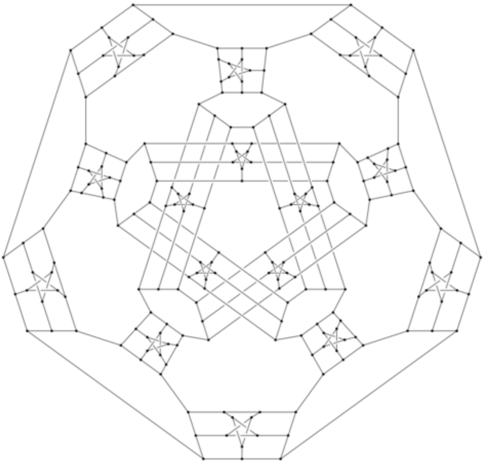
Tietze snark



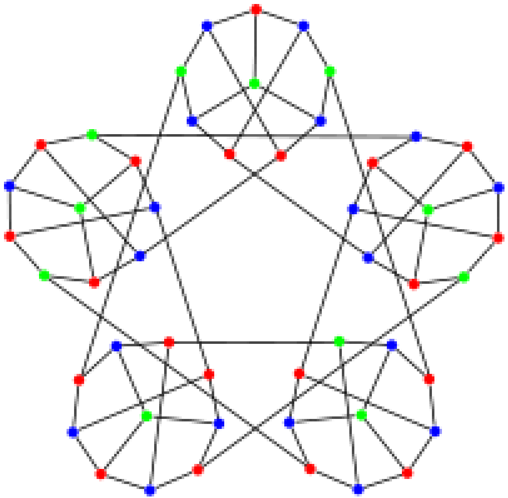
Blanusa snark



Descartes - TUTTE snarkja



Szekeres snark



Tartalomjegyzék:

Motiváció, közlekedési lámpák.

Egy útkereszteződésnél különböző irányból áramlik a forgalom. Mindegyik bejövő úthoz hozzá kell rendelni egy idő intervallumot, amikor az út zöld lámpát kap, az onnan érkezők használhatják az utat.

Motiváció, közlekedési lámpák.

Egy útkereszteződésnél különböző irányból áramlik a forgalom. Mindegyik bejövő úthoz hozzá kell rendelni egy idő intervallumot, amikor az út zöld lámpát kap, az onnan érkezők használhatják az utat.
A teljes lámpa periódust fel kellene osztani a bejövő utak között. Tegyük fel, hogy egységnyi az az idő, ameddig egy-egy útnak egyfolytában zöld a lámpája. Állapítsunk meg egy legrövidebb lámpa periódus hosszat, amely majd ismétlődik.

Motiváció, közlekedési lámpák.

Egy útkereszteződésnél különböző irányból áramlik a forgalom. Mindegyik bejövő úthoz hozzá kell rendelni egy idő intervallumot, amikor az út zöld lámpát kap, az onnan érkezők használhatják az utat.
A teljes lámpa periódust fel kellene osztani a bejövő utak között. Tegyük fel, hogy egységnyi az az idő, ameddig egy-egy útnak egyfolytában zöld a lámpája. Állapítsunk meg egy legrövidebb lámpa periódus hosszat, amely majd ismétlődik.
Rendeljünk minden bejövő úthoz egy gráf csúcsot. Két csúcs szomszédos az épülő gráfban, ha a nekik megfelelő utakon egyszerre nem engedhető el a forgalom.

Motiváció, közlekedési lámpák.

Egy útkereszteződésnél különböző irányból áramlik a forgalom. Mindegyik bejövő úthoz hozzá kell rendelni egy idő intervallumot, amikor az út zöld lámpát kap, az onnan érkezők használhatják az utat.
A teljes lámpa periódust fel kellene osztani a bejövő utak között. Tegyük fel, hogy egységnyi az az idő, ameddig egy-egy útnak egyfolytában zöld a lámpája. Állapítsunk meg egy legrövidebb lámpa periódus hosszat, amely majd ismétlődik.
Rendeljünk minden bejövő úthoz egy gráf csúcsot. Két csúcs szomszédos az épülő gráfban, ha a nekik megfelelő utakon egyszerre nem engedhető el a forgalom.
Az így definiált G gráf kromatikus számának meghatározása a probléma.

Ha minimális számú, független halmazra partícionáljuk a G csúcshalmazát, akkor egy-egy független halmazhoz hozzárendelünk egy-egy egységnyi időintervallumot, amikor éppen azokból az utakból engedhető a forgalom, amelyek a csúcsoknak felelnek meg.

Ha minimális számú, független halmazra partícionáljuk a G csúcshalmazát, akkor egy-egy független halmazhoz hozzárendelünk egy-egy egységnyi időintervallumot, amikor éppen azokból az utakból engedhető a forgalom, amelyek a csúcsoknak felelnek meg.
Az egységnyi időhöz képest megkapjuk a lámpa periódus hosszát, de igazából azt szeretnénk, ha hosszú idő alatt optimális lenne a forgalom.

Ha minimális számú, független halmazra partícionáljuk a G csúcshalmazát, akkor egy-egy független halmazhoz hozzárendelünk egy-egy egységnyi időintervallumot, amikor éppen azokból az utakból engedhető a forgalom, amelyek a csúcsoknak felelnek meg.
Az egységnyi időhöz képest megkapjuk a lámpa periódus hosszát, de igazából azt szeretnénk, ha hosszú idő alatt optimális lenne a forgalom.
Tekinthetünk a forgalomra, mint egy C körre, melynek egy-egy egységnyi intervallumához hozzárendeltük valamelyik bejövő út szabad jelzését.

Ha minimális számú, független halmazra partícionáljuk a G csúcshalmazát, akkor egy-egy független halmazhoz hozzárendelünk egy-egy egységnyi időintervallumot, amikor éppen azokból az utakból engedhető a forgalom, amelyek a csúcsoknak felelnek meg.
Az egységnyi időhöz képest megkapjuk a lámpa periódus hosszát, de igazából azt szeretnénk, ha hosszú idő alatt optimális lenne a forgalom.
Tekinthetünk a forgalomra, mint egy C körre, melynek egy-egy egységnyi intervallumához hozzárendeltük valamelyik bejövő út szabad jelzését.
Szomszédos csúcsok idő intervallumai a körön nem metszhetik egymást..

Definíció

Legyen C egy r sugarú kör. Ekkor egy gráf r-cirkuláris színezése a C kör nyílt egységhosszú íveinek egy c' hozzárendelése a csúcsokhoz oly módon, hogy $c'(v_1) \cap c'(v_2) = \emptyset$, amennyiben v_1 és v_2 között fut él. Ekkor a gráf cirkuláris kromatikus száma:

$$\chi_c(G) = \inf\{r \quad \textit{ahol } G\textit{-nek van } r\textit{-cirkuláris színezése}\}$$

Definíció

Ha k és d pozitív egészek úgy, hogy $k \geq 2d$, akkor a gráf egy (k, d)-színezése a színek egy olyan c hozzárendelése, amire teljesül, hogy $d \leq |c(v_1) - c(v_2)| \leq (k - d)$, ahol a v_1 és v_2 csúcsokat él köti össze. Ekkor a gráf cirkuláris kromatikus száma (vagy eredeti nevén: csillag-kromatikus száma $\chi^*(G)$): $\chi_c(G) = \inf\left\{\frac{k}{d} \quad \text{ahol } G\text{-nek van } (k, d)\text{-színezése}\right\}$ (Így is definiálható, a két definíció ekvivalens)

Definíció

Ha k és d pozitív egészek úgy, hogy $k \geq 2d$, akkor a gráf egy (k, d)-színezése a színek egy olyan c hozzárendelése, amire teljesül, hogy $d \leq |c(v_1) - c(v_2)| \leq (k - d)$, ahol a v_1 és v_2 csúcsokat él köti össze. Ekkor a gráf cirkuláris kromatikus száma (vagy eredeti nevén: csillag-kromatikus száma $\chi^*(G)$): $\chi_c(G) = \inf\left\{\frac{k}{d} \quad ahol\ G\text{-nek van } (k, d)\text{-színezése}\right\}$ (Így is definiálható, a két definíció ekvivalens)

Az nyilvánvaló, hogy egy $(k, 1)$-színezés egy k-színezés is, amiből következik, hogy $\chi_c(G) \leq \chi(G)$.

Állítás

$$\chi_c(G) = \min\left\{\frac{k}{d} \quad \textit{ahol G-nek van } (k,d)\textit{-színezése}\right\}$$

Állítás

$$\chi_c(G) = \min\left\{\frac{k}{d} \quad \textit{ahol } G\textit{-nek van } (k,d)\textit{-színezése}\right\}$$

Állítás

$$\chi(G) - 1 \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Állítás

$$\chi_c(G) = \min\left\{\frac{k}{d} \quad \textit{ahol G-nek van } (k,d)\textit{-színezése}\right\}$$

Állítás

$$\chi(G) - 1 \leq \chi_c(G) \leq \chi(G)$$

Állítás

Ha H részgráfja G-nek ($H \subseteq G$), akkor:

$$\chi_c(H) \leq \chi_c(G)$$

Állítás

Néhány gráfra (pl.: teljes gráfok, páros gráfok, körök és kerekek) a cirkuláris kromatikus szám értéke ismert:

$$\chi_c(K_p) = p \quad ; \quad \chi_c(K_{m,n}) = 2 \quad ;$$

$$\chi_c(C_{2n}) = 2 \quad ; \quad \chi_c(C_{2n+1}) = 2 + \frac{1}{n} \quad ;$$

$$\chi_c(W_{2n}) = 3 \quad ; \quad \chi_c(W_{2n+1}) = 4$$

Mikor teljesül a $\chi_c(G) = \chi(G)$ egyenlőség?

Tétel

Legyen $\chi(G) = n$. Ha létezik $\emptyset \subset A \subset V$ valódi csúcs részhalmaz, amely a G minden c n-színezésére vagy beleesik egy X színosztályba, vagy idegen tőle. Ekkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mikor teljesül a $\chi_c(G) = \chi(G)$ egyenlőség?

Tétel

Legyen $\chi(G) = n$. *Ha létezik* $\emptyset \subset A \subset V$ *valódi csúcs részhalmaz, amely a* G *minden* c n*-színezésére vagy beleesik egy* X *színosztályba, vagy idegen tőle. Ekkor* $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Következmény

Ha G *komplementere nem összefüggő gráf, akkor* $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mikor teljesül a $\chi_c(G) = \chi(G)$ egyenlőség?

Tétel

Legyen $\chi(G) = n$. Ha létezik $\emptyset \subset A \subset V$ valódi csúcs részhalmaz, amely a G minden c n-színezésére vagy beleesik egy X színosztályba, vagy idegen tőle. Ekkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Következmény

Ha G komplementere nem összefüggő gráf, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Következmény

Ha G-nek van olyan csúcsa, amely mindegyik másik csúccsal szomszédos, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Következmény

Ha $\chi(G) = n$ és G egyértelműen n-színezhető, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Következmény

Ha $\chi(G) = n$ *és G egyértelműen n-színezhető, akkor* $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mivel bármely $n \geq 1$-re és $g \geq 3$-ra létezik olyan G gráf, amelynek derékbősége legalább g, és G egyértelműen n-színezhető, így következik az előző állításból egy újabb következmény.

Következmény

Ha $\chi(G) = n$ és G egyértelműen n-színezhető, akkor $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mivel bármely $n \geq 1$-re és $g \geq 3$-ra létezik olyan G gráf, amelynek derékbősége legalább g, és G egyértelműen n-színezhető, így következik az előző állításból egy újabb következmény.

Következmény

Minden $n \geq 1$-re és $g \geq 3$-ra, létezik olyan G gráf, amelynek legalább g a kerülete és $\chi_c(G) = \chi(G)$.

Mikor teljesül majdnem a $\chi_c(G) = \chi(G) - 1$ egyenlőség?

Tétel

Legyenek m és t pozitív egészek. Ha G-nek van olyan x csúcsa, hogy $G \setminus x$ m-színezhető, és G minden x-et tartalmazó köre legalább $m(t-1)+2$ hosszú, akkor $\chi_c(G) \le m + \frac{1}{t}$.

Mikor teljesül majdnem a $\chi_c(G) = \chi(G) - 1$ egyenlőség?

Tétel

Legyenek m és t pozitív egészek. Ha G-nek van olyan x csúcsa, hogy $G \setminus x$ m-színezhető, és G minden x-et tartalmazó köre legalább $m(t-1)+2$ hosszú, akkor $\chi_c(G) \leq m + \frac{1}{t}$.

Következmény

Ha G (n+1)-kritikus és G-nek a derékbősége legalább $n(t-1)+2$, akkor $\chi_c(G) \leq m + \frac{1}{t}$.

Síkgráfok.

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 4$?

Síkgráfok.

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 4$?

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 3$?

Síkgráfok.

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 4$?

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 3$?

A páratlan kerékre $\chi_c(W_{2n+1}) = 4$, hiszen van olyan csúcsa, amely minden más ponttal össze van kötve.

Síkgráfok.

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 4$?

Vannak-e olyan síkgráfok, melyekre $\chi_c(G) = 3$?

A páratlan kerékre $\chi_c(W_{2n+1}) = 4$, hiszen van olyan csúcsa, amely minden más ponttal össze van kötve.

Milyen racionális számok lehetnek egy síkgráf cirkuláris kromatikus számai?

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus száma.

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus száma.

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$
- $\chi_c(KG_{2n+2,n}) = 4 = \chi(KG_{2n+2,n})$

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus száma.

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$
- $\chi_c(KG_{2n+2,n}) = 4 = \chi(KG_{2n+2,n})$
- $\chi_c(KG_{m,2}) = m - 2 = \chi(KG_{m,2})$

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus száma.

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$
- $\chi_c(KG_{2n+2,n}) = 4 = \chi(KG_{2n+2,n})$
- $\chi_c(KG_{m,2}) = m - 2 = \chi(KG_{m,2})$

Sejtés (Johnson sejtése, 1997)

$\chi_c(KG_{m,n}) = m - 2n + 2 = \chi(KG_{m,n}),$

A Kneser-gráf cirkuláris kromatikus száma.

- $\chi_c(KG_{2n+1,n}) = 3 = \chi(KG_{2n+1,n})$
- $\chi_c(KG_{2n+2,n}) = 4 = \chi(KG_{2n+2,n})$
- $\chi_c(KG_{m,2}) = m - 2 = \chi(KG_{m,2})$

Sejtés (Johnson sejtése, 1997)

$\chi_c(KG_{m,n}) = m - 2n + 2 = \chi(KG_{m,n})$,

Vagyis mindig megegyezik a cirkuláris kromatikus szám a kromatikus számmal.

Probléma

Jellemezzük azokat a síkgráfokat, amelyekre $\chi_c(G) = 3$*, pedig* $\chi(G) = 4$*!*

Probléma

Jellemezzük azokat a síkgráfokat, amelyekre $\chi_c(G) = 3$, *pedig* $\chi(G) = 4$!

Probléma

Igazoljuk, hogy síkgráfokra $\chi_c(G) < 5$, *a 4-szín tétel nélkül!*

Probléma

Jellemezzük azokat a síkgráfokat, amelyekre $\chi_c(G) = 3$*, pedig* $\chi(G) = 4$*!*

Probléma

Igazoljuk, hogy síkgráfokra $\chi_c(G) < 5$*, a 4-szín tétel nélkül!*

Probléma

Igaz-e, hogy minden G gráfnak van olyan v csúcsa, hogy $\chi_c(G \setminus v) \geq \chi_c(G) - 1$*?*

Definíció

Poliédernek fogjuk nevezni a háromdimenziós tér olyan háromdimenziós részeit, amelyek véges sok zárt féltér metszeteként előállnak. A poliéder élei és csúcsai pedig épp a szomszédos félterek metszetei illetőleg a szomszédos élek metszetei.

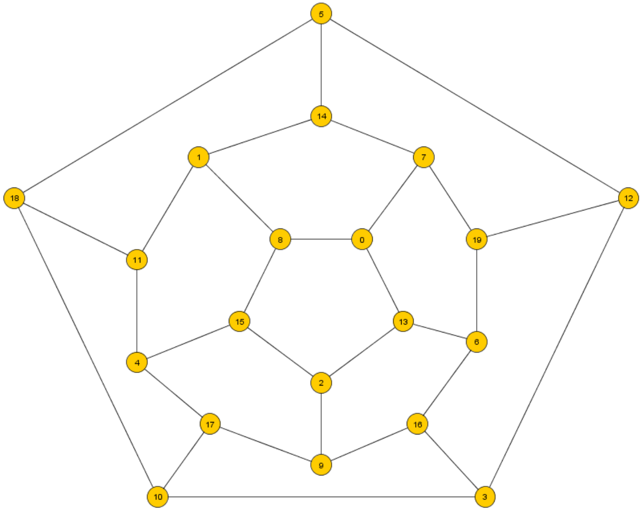
Definíció

Poliédernek fogjuk nevezni a háromdimenziós tér olyan háromdimenziós részeit, amelyek véges sok zárt féltér metszeteként előállnak. A poliéder élei és csúcsai pedig épp a szomszédos félterek metszetei illetőleg a szomszédos élek metszetei.

Tétel

Az öt darab konvex szabályos poliédernek (T a tetraéder; Q a kocka; O az oktaéder; D a dodekaéder; és I az ikozaéder) a cirkuláris kromatikus száma is meghatározható:

$$\chi_c(T) = 4; \quad \chi_c(Q) = 2; \quad \chi_c(O) = 3; \quad \chi_c(D) = \frac{20}{7}; \quad \chi_c(I) = 4$$


5
14
1
7
18
12
8
0
19
11
15
13
6
4
2
17
16
9
10
3

Definíció

Egy poliédert arkhimédészi (vagy féligszabályos) testnek nevezünk, ha a lapjai mind szabályosak, de nem feltétlenül egybevágók és a csúcsalakzatuk (azon szabályos sokszögek, amik a csúcsokban találkoznak) egybevágó.

Definíció

Egy poliédert arkhimédészi (vagy féligszabályos) testnek nevezünk, ha a lapjai mind szabályosak, de nem feltétlenül egybevágók és a csúcsalakzatuk (azon szabályos sokszögek, amik a csúcsokban találkoznak) egybevágó.

A konvex féligszabályos testek tehát az öt szabályos test, 13 arkhimédészi test és 2 végtelen osztály (prizmák és antiprizmák osztálya). A 13 arkhimédészi test listája a csúcsalakzatukkal megadva:

csúcsalakzat	név	jelölés
$(3,6,6)$	csonkított tetraéder	TT
$(3,8,8)$	csonkított kocka	TC
$(4,6,6)$	csonkított oktaéder	TO
$(3,10,10)$	csonkított dodekaéder	TD

csúcsalakzat	név	jelölés
$(5, 6, 6)$	csonkított ikozaéder	TI
$(3, 4, 3, 4)$	kuboktaéder	CO
$(4, 6, 8)$	csonkított kuboktaéder	CT
$(3, 4, 4, 4)$	rombikuboktaéder	CR
$(3, 3, 3, 3, 4)$	pisze kuboktaéder	CS
$(3, 5, 3, 5)$	ikozidodekaéder	ID
$(4, 6, 10)$	csonkított ikozidodekaéder	IT
$(3, 4, 5, 4)$	rombikozidodekaéder	IR
$(3, 3, 3, 3, 5)$	pisze ikozidodekaéder	IS

Tétel

Az Arkhimédészi testek gráfjának cirkuláris kromatikus száma megegyezik a kromatikus számukkal, kivéve a csonkított ikozaédert!

$$\chi_c(TO) = \chi_c(CT) = \chi_c(IT) = 2 \quad ; \quad \chi_c(IS) = 4 \quad ; \quad \chi_c(TI) = \frac{5}{2}$$

$$\chi_c(TT) = \chi_c(TC) = \chi_c(TD) = \chi_c(CO) = \chi_c(CR) =$$
$$= \chi_c(CS) = \chi_c(ID) = \chi_c(IR) = 3$$

Definíció

A szabályos konvex antiprizmák gráfja $AG_n = (V_n, E_n)$*, ahol* $n \geq 3$ *és* $V_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ *és az élek halmaza* E_n *a* $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ *és* $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ *körökből áll, valamint további* $2n$ *darab élből:* $u_i w_i$ *és* $u_{i+1} w_i$*, ahol* $i = 0, \ldots, n-1$ *(és persze* $u_n = u_0$*).*

Definíció

A szabályos konvex antiprizmák gráfja $AG_n = (V_n, E_n)$, ahol $n \geq 3$ és $V_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ és az élek halmaza E_n a $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ és $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ körökből áll, valamint további $2n$ darab élből: $u_i w_i$ és $u_{i+1} w_i$, ahol $i = 0, \ldots, n-1$ (és persze $u_n = u_0$).

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{3m}) = 3$, $\chi_c(AG_{3m+1}) = 3 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{3m+2}) = 3 + \frac{1}{2m+1}$.

Definíció

A szabályos konvex antiprizmák gráfja $AG_n = (V_n, E_n)$, ahol $n \geq 3$ és $V_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ és az élek halmaza E_n a $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ és $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ körökből áll, valamint további $2n$ darab élből: $u_i w_i$ és $u_{i+1} w_i$, ahol $i = 0, \ldots, n-1$ (és persze $u_n = u_0$).

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{3m}) = 3$, $\chi_c(AG_{3m+1}) = 3 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{3m+2}) = 3 + \frac{1}{2m+1}$.

Definíció

A szabályos konvex prizmák gráfja $PG_n = (V_n, E_n)$, ahol $n \geq 3$ és $V_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\} \cup \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$ és az élek halmaza E_n a $(u_0, \ldots, u_{n-1})$ és $(w_0, \ldots, w_{n-1})$ körökből áll, valamint további n darab élből: $u_i w_i$, ahol $i = 0, \ldots, n-1$.

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{2m+1}) = 2 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{2m+2}) = 2$.

Tétel

Pontosan 23 olyan legfeljebb 7 csúcsú összefüggő gráf van, amelynek cirkuláris kromatikus száma kisebb, mint a gráf kromatikus száma.

Belátható, hogy $\chi_c(AG_{2m+1}) = 2 + \frac{1}{m}$ és $\chi_c(AG_{2m+2}) = 2$.

Tétel

Pontosan 23 olyan legfeljebb 7 csúcsú összefüggő gráf van, amelynek cirkuláris kromatikus száma kisebb, mint a gráf kromatikus száma.

Ennek bizonyítása során használjuk a következő általános gráfra is teljesülő összefüggést (ahol $\overline{g}(G)$ a G-beli leghosszabb kör hosszát jelenti):

$$\chi_c(G) \geq \frac{\overline{g}(G)}{\overline{g}(G) - 1} \cdot (\chi(G) - 1)$$

Tartalomjegyzék:

Alapfogalmak

Definíció

Legyen G és H gráfok. Egy $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ *függvényt* ***homomorfizmusnak*** *nevezünk, ha megőrzi az éleket vagyis, ha* $(u, v) \in E(G)$, *akkor* $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$ *teljesül.*
Általában csak így írjuk $\phi : G \longrightarrow H$.

Alapfogalmak

Definíció

Legyen G és H gráfok. Egy $\phi : V(G) \longrightarrow V(H)$ *függvényt* ***homomorfizmusnak*** *nevezünk, ha megőrzi az éleket vagyis, ha* $(u, v) \in E(G)$, *akkor* $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$ *teljesül.*
Általában csak így írjuk $\phi : G \longrightarrow H$.

Vegyük észre, hogy egy G gráf megfelelő k-színezése tulajdonképpen egy $G \longrightarrow K_k$ homomorfizmus, ahol K_k jelöli a k pontú teljes gráfot.

Alapfogalmak

Definíció

*Egy $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmust **hűnek** nevezünk, ha $\phi(G)$ a H egy feszített részgráfja.*

Alapfogalmak

Definíció

*Egy $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmust **hűnek** nevezünk, ha $\phi(G)$ a H egy feszített részgráfja.*

Definíció

*Egy $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmust **szürjektívnek** nevezünk, ha bármely H-beli csúcsnak van őse G-ben.*

Alapfogalmak

Definíció

*Egy $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmust **hűnek** nevezünk, ha $\phi(G)$ a H egy feszített részgráfja.*

Definíció

*Egy $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmust **szürjektívnek** nevezünk, ha bármely H-beli csúcsnak van őse G-ben.*

Definíció

*A hű és szürjektív homomorfizmusokat **teljes homomorfizmusoknak** nevezzük.*

Alapfogalmak

Definíció

*Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re a G gráf **teljes k-színezése** egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus.*

Alapfogalmak

Definíció

*Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re a G gráf **teljes k-színezése** egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus.*

Tehát a G gráf egy megfelelő k-színezése pontosan akkor teljes, ha bármely két különböző színhez (bármely színpárhoz) létezik olyan éle G-nek, amelynek végpontjai pont ilyen színűek.

Alapfogalmak

Definíció

Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re a G gráf ***teljes k-színezése*** *egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus.*

Tehát a G gráf egy megfelelő k-színezése pontosan akkor teljes, ha bármely két különböző színhez (bármely színpárhoz) létezik olyan éle G-nek, amelynek végpontjai pont ilyen színűek.
Vagyis a G gráf egy teljes színezése a csúcsainak egy olyan P partíciója, ahol a halmazok függetlenek és a G/P kvóciensgráf teljes.

Alapfogalmak

Definíció

*Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re a G gráf **teljes k-színezése** egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus.*

Tehát a G gráf egy megfelelő k-színezése pontosan akkor teljes, ha bármely két különböző színhez (bármely színpárhoz) létezik olyan éle G-nek, amelynek végpontjai pont ilyen színűek.
Vagyis a G gráf egy teljes színezése a csúcsainak egy olyan P partíciója, ahol a halmazok függetlenek és a G/P kvóciensgráf teljes.
Ha ez a teljes gráf éppen k csúcsú, akkor beszélünk teljes k-színezésről.

Kromatikus szám

Lemma

Legyenek G és H gráfok és tegyük fel, hogy létezik $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmus.
Ekkor, ha H-nak van megfelelő k-színezése, akkor G-nek is!

Kromatikus szám

Lemma

Legyenek G és H gráfok és tegyük fel, hogy létezik $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmus.
Ekkor, ha H-nak van megfelelő k-színezése, akkor G-nek is!

Bizonyítás

Ha H-nak van megfelelő k-színezése, akkor létezik $\psi : H \longrightarrow K_k$ homomorfizmus is.

Kromatikus szám

Lemma

Legyenek G és H gráfok és tegyük fel, hogy létezik $\phi : G \longrightarrow H$ homomorfizmus.
Ekkor, ha H-nak van megfelelő k-színezése, akkor G-nek is!

Bizonyítás

Ha H-nak van megfelelő k-színezése, akkor létezik $\psi : H \longrightarrow K_k$ homomorfizmus is.

Az viszont definíció szerint triviális, hogy homomorfizmusok kompozíciója is homomorfizmus, tehát a $\psi \circ \phi$ függvény egy homomorfizmus G-ből K_k-ba és így létezik G-nek is megfelelő k-színezése.

Definíció

Tetszőleges G gráf ***kromatikus számának*** *nevezzük és* $\chi(G)$*-vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre létezik* $G \longrightarrow K_n$ *homomorfizmus.*

Definíció

Tetszőleges G gráf ***kromatikus számának*** *nevezzük és $\chi(G)$-vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre létezik $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus.*

Ekkor triviálisan következik, hogy ha $\chi(G) = n$, akkor minden $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus teljes.

Definíció

Tetszőleges G gráf ***kromatikus számának*** *nevezzük és $\chi(G)$-vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre létezik $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus.*

Ekkor triviálisan következik, hogy ha $\chi(G) = n$, akkor minden $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus teljes.

Következmény

Ha létezik $G \longrightarrow H$ homomorfimus, akkor $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Definíció

Tetszőleges G gráf ***kromatikus számának*** *nevezzük és $\chi(G)$-vel jelöljük azt a legkisebb n pozitív egész számot, amelyre létezik $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus.*

Ekkor triviálisan következik, hogy ha $\chi(G) = n$, akkor minden $G \longrightarrow K_n$ homomorfizmus teljes.

Következmény

Ha létezik $G \longrightarrow H$ homomorfimus, akkor $\chi(G) \leq \chi(H)$.

Definíció

Egy $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmust ***eleminek*** *nevezünk, ha létezik egyetlen olyan (u, v) csúcspár, amik nincsenek összekötve és $\phi(u) = \phi(v)$.*
Ekkor a H-t ***elemi kvóciensgráfnak*** *nevezzük.*

Lemma

Ha H elemi kvóciensgráfja G-nek (egy elemi homomorfizmus által), akkor $\chi(G) \leq \chi(H) \leq \chi(G) + 1$.

Bizonyítás

Természetesen elegendő a felső korlátot belátni a fenti következmény miatt.
Legyen az elemi homomorfizmus ϕ *és legyen a kitüntetett csúcspár az* (u, v).

Lemma

Ha H elemi kvóciensgráfja G-nek (egy elemi homomorfizmus által), akkor $\chi(G) \leq \chi(H) \leq \chi(G) + 1$.

Bizonyítás

Természetesen elegendő a felső korlátot belátni a fenti következmény miatt.
Legyen az elemi homomorfizmus ϕ *és legyen a kitüntetett csúcspár az* (u, v).

Legyen $\psi : G \longrightarrow K_n$ *homomorfizmus. Definiálunk egy teljes homomorfimust* $\psi' : H \longrightarrow K_{n+1}$ *úgy, hogy* $\psi'(z) = \psi(\phi^{-1}(z))$ *minden* $z \notin \{u, v\}$. *Ez jóldefiniált, mert* ϕ *elemi volt és* $\psi'(u) = \psi'(v) = n + 1$.

Definíció

*Legyenek G és H gráfok. H-t a G **retraktumának** nevezzük, ha léteznek olyan $\phi : G \longrightarrow H$ és $\psi : H \longrightarrow G$ homomorfimusok, hogy $\phi \circ \psi = id_H$. (itt ϕ-t **retrakciónak** és ψ-t **koretrakciónak** nevezzük)*

Definíció

*Legyenek G és H gráfok. H-t a G **retraktumának** nevezzük, ha léteznek olyan $\phi : G \longrightarrow H$ és $\psi : H \longrightarrow G$ homomorfimusok, hogy $\phi \circ \psi = id_H$. (itt ϕ-t **retrakciónak** és ψ-t **koretrakciónak** nevezzük)*

Definíció

*Egy G gráfot **core**-nak nevezünk, ha nincsen G-nek valódi részgráfjába menő retrakciója.*

Definíció

*Legyenek G és H gráfok. H-t a G **retraktumának** nevezzük, ha léteznek olyan $\phi : G \longrightarrow H$ és $\psi : H \longrightarrow G$ homomorfimusok, hogy $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_H$. (itt ϕ-t **retrakciónak** és ψ-t **koretrakciónak** nevezzük)*

Definíció

*Egy G gráfot **core**-nak nevezünk, ha nincsen G-nek valódi részgráfjába menő retrakciója.*

Következmény

Tetszőleges gráfnak és a core-jának megegyezik a kromatikus száma.

Vannak olyan gráftulajdonságok, amelyek esetében érdemes keresni azt a legkisebb részgráfot, amelynek még megvan az adott tulajdonsága.

Vannak olyan gráftulajdonságok, amelyek esetében érdemes keresni azt a legkisebb részgráfot, amelynek még megvan az adott tulajdonsága.
A G core-ja sokszor éppen ez a minimális részgráf. A következő gráfok core-ok:

Vannak olyan gráftulajdonságok, amelyek esetében érdemes keresni azt a legkisebb részgráfot, amelynek még megvan az adott tulajdonsága.
A G core-ja sokszor éppen ez a minimális részgráf. A következő gráfok core-ok:

- $K_n, n \geq 1$;
- $C_{2k+1}, k \geq 1$;
- $W_{2k+1}, k \geq 1$;
- Petersen-gráf;
- A χ-kritikus gráfok.

Nem core pl. $K_n \setminus e$, C_{2n}, diszjunkt körök uniója.

Nem core pl. $K_n \setminus e$, C_{2n}, diszjunkt körök uniója.

Minden véges gráfnak van core-ja.

Nem core pl. $K_n \setminus e$, C_{2n}, diszjunkt körök uniója.

Minden véges gráfnak van core-ja.

G retraktumai közül egy legkisebb csúcsszámú core is.

Nem core pl. $K_n \setminus e$, C_{2n}, diszjunkt körök uniója.

Minden véges gráfnak van core-ja.

G retraktumai közül egy legkisebb csúcsszámú core is.

Ha G-nek van több core-ja, akkor azok izomorfak.

Nem core pl. $K_n \setminus e$, C_{2n}, diszjunkt körök uniója.

Minden véges gráfnak van core-ja.

G retraktumai közül egy legkisebb csúcsszámú core is.

Ha G-nek van több core-ja, akkor azok izomorfak.

Szokás ezért egy G gráf core-járól úgy beszélni, mintha csak egy ilyen lenne neki, hiszen mindegyik izomorf.

Homomorf ekvivalencia.

Ha létezik homomorfizmus G-ből H-ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H-ba **leképezhető**, $(G \to H)$.

Homomorf ekvivalencia.

Ha létezik homomorfizmus G-ből H-ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H-ba **leképezhető**, $(G \to H)$.

A leképezhető reláció nyilván reflexív, tranzitív de nem feltétlenül szimmetrikus reláció.

Homomorf ekvivalencia.

Ha létezik homomorfizmus G-ből H-ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H-ba **leképezhető**, $(G \rightarrow H)$.

A leképezhető reláció nyilván reflexív, tranzitív de nem feltétlenül szimmetrikus reláció.

Ha G és H kölcsönösen leképezhető a másikba, akkor **homomorf ekvivalensnek** mondjuk őket, $(G \leftrightarrow H)$.

Homomorf ekvivalencia.

Ha létezik homomorfizmus G-ből H-ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H-ba **leképezhető**, ($G \to H$).

A leképezhető reláció nyilván reflexív, tranzitív de nem feltétlenül szimmetrikus reláció.

Ha G és H kölcsönösen leképezhető a másikba, akkor **homomorf ekvivalensnek** mondjuk őket, ($G \leftrightarrow H$).

Ha tehát R a G retraktuma, akkor definíció szerint $G \leftrightarrow R$.

Homomorf ekvivalencia.

Ha létezik homomorfizmus G-ből H-ba, akkor mondjuk röviden azt, hogy G a H-ba **leképezhető**, ($G \to H$).

A leképezhető reláció nyilván reflexív, tranzitív de nem feltétlenül szimmetrikus reláció.

Ha G és H kölcsönösen leképezhető a másikba, akkor **homomorf ekvivalensnek** mondjuk őket, ($G \leftrightarrow H$).

Ha tehát R a G retraktuma, akkor definíció szerint $G \leftrightarrow R$.

Állítás

Ha G és H két gráf és $G \leftrightarrow H$, akkor core-jaik izomorfak.

A homomorf ekvivalencia egy ekvivalencia reláció a gráfokon. A G gráfot tartalmazó ekvivalenciaosztályt jelöljük H(G)-vel.

A homomorf ekvivalencia egy ekvivalencia reláció a gráfokon. A G gráfot tartalmazó ekvivalenciaosztályt jelöljük H(G)-vel.

Definíció

Legyenek G és F gráfok. Ha $G \to F$, akkor vezessük be a $H(G) \leq H(F)$ parciális rendezést az ekvivalenciaosztály között.

A homomorf ekvivalencia egy ekvivalencia reláció a gráfokon. A G gráfot tartalmazó ekvivalenciaosztályt jelöljük H(G)-vel.

Definíció

Legyenek G és F gráfok. Ha $G \to F$, *akkor vezessük be a* $H(G) \leq H(F)$ *parciális rendezést az ekvivalenciaosztály között.*

A bevezett parciálisan rendezett halmaz **háló**.

A homomorf ekvivalencia egy ekvivalencia reláció a gráfokon. A G gráfot tartalmazó ekvivalenciaosztályt jelöljük H(G)-vel.

Definíció

Legyenek G és F gráfok. Ha $G \to F$, akkor vezessük be a $H(G) \leq H(F)$ parciális rendezést az ekvivalenciaosztály között.

A bevezett parciálisan rendezett halmaz **háló**.

Tétel (Welzl tétele)

Legyenek G és F gráfok, melyekre $G \to F$ és $F \nrightarrow G$. Ekkor létezik egy közbülső K gráf, melyre $G \to K \to F$ és $F \nrightarrow K \nrightarrow G$.

Cayley gráfok

Definíció

Legyen Γ egy csoport és S a Γ részhalmaza, amely zárt az inverzképzésre, de nincs benne az egységelem. Egy ilyen S-et **Cayley részhalmaznak** *nevezünk. Képezzünk egy gráfot, amelynek csúcshalmaza Γ, valamint az u és v csúcsokat pontosan akkor tekintjük szomszédosnak, ha $u^{-1}v \in S$. Ezt hívjuk* **Cayley gráfnak** *és $Cay(\Gamma, S)$ a jele.*

Cayley gráfok

Definíció

Legyen Γ egy csoport és S a Γ részhalmaza, amely zárt az inverzképzésre, de nincs benne az egységelem. Egy ilyen S-et **Cayley részhalmaznak** *nevezünk. Képezzünk egy gráfot, amelynek csúcshalmaza Γ, valamint az u és v csúcsokat pontosan akkor tekintjük szomszédosnak, ha $u^{-1}v \in S$. Ezt hívjuk* **Cayley gráfnak** *és $Cay(\Gamma, S)$ a jele.*

Tétel (Sabidussi, 1964)

A Cayley gráfok reprezentálják az összes csúcstranzitív gráfokat. Bármely csúcstranzitív gráf rektraktuma valamely Cayley gráfnak.

Nincs homomorfizmus!

A csúcstranzitív gráfok egy szép tulajdonsága a következő állítás.

Nincs homomorfizmus!

A csúcstranzitív gráfok egy szép tulajdonsága a következő állítás.

Definíció

A G gráf függetlenségi arányának nevezzük az $i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ *számot.*

Nincs homomorfizmus!

A csúcstranzitív gráfok egy szép tulajdonsága a következő állítás.

Definíció

A G gráf függetlenségi arányának nevezzük az $i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$ számot.

Lemma (Nincs-homomorfizmus, Albertson és Collins, 1985)

Legyenek G és H gráfok, H csúcstranzitív és $G \to H$. Ekkor $i(G) \geq i(H)$.

Bizonyítás

Legyen $S(H)$ a H maximális, $\alpha(H)$ méretű stabil részhalmazainak családja. H szimmetriája miatt mindegyik csúcs ugyananyiszor (mondjuk m-szer) fordul elő az $S(H)$ család elemeiben. Az

$$\alpha(H) \times |S(H)| = m \times |H|$$

egyenlőség igaz, mivel kétféleképpen számoltuk meg egy csúcs előfordulásait egy elemében a családnak.

Bizonyítás

Legyen $S(H)$ a H maximális, $\alpha(H)$ méretű stabil részhalmazainak családja. H szimmetriája miatt mindegyik csúcs ugyananyiszor (mondjuk m-szer) fordul elő az $S(H)$ család elemeiben. Az

$$\alpha(H) \times |S(H)| = m \times |H|$$

egyenlőség igaz, mivel kétféleképpen számoltuk meg egy csúcs előfordulásait egy elemében a családnak.

Legyen $\phi : G \to H$ egy homomorfizmus. Ekkor minden $I \in S(H)$ esetén tudjuk, hogy $|\phi^{-1}(I)| \leq \alpha(G)$.

Bizonyítás

Legyen $S(H)$ a H maximális, $\alpha(H)$ méretű stabil részhalmazainak családja. H szimmetriája miatt mindegyik csúcs ugyananyiszor (mondjuk m-szer) fordul elő az $S(H)$ család elemeiben. Az

$$\alpha(H) \times |S(H)| = m \times |H|$$

egyenlőség igaz, mivel kétféleképpen számoltuk meg egy csúcs előfordulásait egy elemében a családnak.

Legyen $\phi : G \to H$ egy homomorfizmus. Ekkor minden $I \in S(H)$ esetén tudjuk, hogy $|\phi^{-1}(I)| \leq \alpha(G)$.

Összegezve az egyenlőtlenségeket az összes $I \in S(H)$-re, kapjuk a következő egyenlőtlenséget

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| \leq \alpha(G) \times |S(H)|.$$

Bizonyítás

(folyt.) Máskülönben meg mindegyik $u \in V(G)$ csúcs m-mel járul hozzá a baloldalhoz, mivel a $\phi(u)$ az $S(H)$ családnak pontosan m tagjához tartozik.

Bizonyítás

(folyt.) Máskülönben meg mindegyik $u \in V(G)$ csúcs m-mel járul hozzá a baloldalhoz, mivel a $\phi(u)$ az $S(H)$ családnak pontosan m tagjához tartozik.

Így tehát

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| = m \times |G|.$$

Bizonyítás

(folyt.) Máskülönben meg mindegyik $u \in V(G)$ csúcs m-mel járul hozzá a baloldalhoz, mivel a $\phi(u)$ az $S(H)$ családnak pontosan m tagjához tartozik.

Így tehát

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| = m \times |G|.$$

A fenti három összefüggésből kijön az állítás!

$$i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \geq \frac{m}{|S(H)|} = \frac{\alpha(H)}{|H|} = i(H).$$

Bizonyítás

(folyt.) Máskülönben meg mindegyik $u \in V(G)$ csúcs m-mel járul hozzá a baloldalhoz, mivel a $\phi(u)$ az $S(H)$ családnak pontosan m tagjához tartozik.

Így tehát

$$\sum_{I \in S(H)} |\phi^{-1}(I)| = m \times |G|.$$

A fenti három összefüggésből kijön az állítás!

$$i(G) = \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \geq \frac{m}{|S(H)|} = \frac{\alpha(H)}{|H|} = i(H).$$

A bebizonyított tételt úgy is fogalmazhatjuk:
Ha H csúcstranzitív és $i(G) < i(H)$, akkor $G \nrightarrow H$.

Definíció

Egy G gráf ***akromatikus számának*** *nevezzük és* $\mathrm{achr}(G)$*-vel jelöljük a legnagyobb olyan s pozitív egészet, amire létezik $G \longrightarrow K_s$ teljes homomorfimus.*

Definíció

*Egy G gráf **akromatikus számának** nevezzük és $\mathrm{achr}(G)$-vel jelöljük a legnagyobb olyan s pozitív egészet, amire létezik $G \longrightarrow K_s$ teljes homomorfimus.*

A fentiekhez hasonlóan kaphatók a következő eredmények:

Lemma

Ha $\phi : G \longrightarrow H$ teljes homomorfizmus, akkor $\mathrm{achr}(G) \geq \mathrm{achr}(H)$.

Állítás

Ha $\phi : G \longrightarrow H$ elemi homomorfizmus, akkor
$\mathrm{achr}(G) - 2 \leq \mathrm{achr}(H) \leq \mathrm{achr}(G)$.

Állítás

Ha $\phi : G \longrightarrow H$ *elemi homomorfizmus, akkor* $\mathrm{achr}(G) - 2 \leq \mathrm{achr}(H) \leq \mathrm{achr}(G)$.

Állítás

Legyen G egy gráf. Minden olyan s-re, amire $\chi(G) \leq s \leq \mathrm{achr}(G)$ *létezik* $G \longrightarrow K_s$ *teljes homomorfizmus.*

Tartalomjegyzék:

Hipergráfok

Definíció

Hipergráfnak *nevezünk egy* $H = (X, E)$ *párt, ahol* X *a csúcsok halmaza, és* E *pedig az élek halmaza, ahol az élek az* X *csúcshalmaz részhalmazaiból kerülnek ki.*

Hipergráfok

Definíció

***Hipergráfnak** nevezünk egy $H = (X, E)$ párt, ahol X a csúcsok halmaza, és E pedig az élek halmaza, ahol az élek az X csúcshalmaz részhalmazaiból kerülnek ki.*

Definíció

*Egy hipergráf **megfelelő színezése** a csúcsainak egy olyan színezése, amelyre teljesül, hogy nincsen olyan él, amelynek minden csúcsa egyszínű. (ez általánosítja a megfelelő színezés gráfokra vonatkozó fogalmát)*

Hipergráfok

Definíció

***Hipergráfnak** nevezünk egy $H = (X, E)$ párt, ahol X a csúcsok halmaza, és E pedig az élek halmaza, ahol az élek az X csúcshalmaz részhalmazaiból kerülnek ki.*

Definíció

*Egy hipergráf **megfelelő színezése** a csúcsainak egy olyan színezése, amelyre teljesül, hogy nincsen olyan él, amelynek minden csúcsa egyszínű. (ez általánosítja a megfelelő színezés gráfokra vonatkozó fogalmát)*

Definíció

*Egy hipergráf **kromatikus száma** az a legkisebb k pozitív egész, amelyre létezik a hipergráfnak k színű megfelelő színezése.*

Különleges színezések.

Sokféle gráfszínezési fogalommal találkoztunk.
A hipergráfok esetében olyan változatok is lehetségesek, amelyek nem túl érdekesek a speciális hipergráfokra: a gráfokra.

Különleges színezések.

Sokféle gráfszínezési fogalommal találkoztunk.
A hipergráfok esetében olyan változatok is lehetségesek, amelyek nem túl érdekesek a speciális hipergráfokra: a gráfokra.

Definíció

H erős k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden élben legfeljebb egy csúcs lehet minden osztályból.*

Különleges színezések.

Sokféle gráfszínezési fogalommal találkoztunk.
A hipergráfok esetében olyan változatok is lehetségesek, amelyek nem túl érdekesek a speciális hipergráfokra: a gráfokra.

Definíció

H erős k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden élben legfeljebb egy csúcs lehet minden osztályból.*
Jelölje $\gamma(H)$ *azt a legkisebb k-t, melyre létezik H-nak egy erős k-színezése.*
$\gamma(H)$ *a H erős kromatikus száma.*

Különleges színezések.

Sokféle gráfszínezési fogalommal találkoztunk.
A hipergráfok esetében olyan változatok is lehetségesek, amelyek nem túl érdekesek a speciális hipergráfokra: a gráfokra.

Definíció

H erős k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden élben legfeljebb egy csúcs lehet minden osztályból. Jelölje* $\gamma(H)$ *azt a legkisebb k-t, melyre létezik H-nak egy erős k-színezése.*
$\gamma(H)$ *a H erős kromatikus száma.*
Nyilván $\chi(H) \leq \gamma(H)$*, hiszen egy erős k-színezés normál k-színezés is. Ha a hipergráf speciálisan egy gráf, akkor a két fogalom egybeesik.*

Definíció

H kiegyensúlyozott k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden* $D_j \in E$ *élnek és* S_i *színosztálynak a metszetére*

$$\lfloor \frac{|D_j|}{k} \rfloor \leq |D_j \cap S_i| \leq \lceil \frac{|D_j|}{k} \rceil$$

teljesül.

Definíció

H kiegyensúlyozott k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élnek és S_i színosztálynak a metszetére*

$$\lfloor \frac{|D_j|}{k} \rfloor \leq |D_j \cap S_i| \leq \lceil \frac{|D_j|}{k} \rceil$$

teljesül.

Definíció

H jó k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élben van $\min\{|D_j|, k\}$ különböző szín.*

Definíció

H kiegyensúlyozott k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden* $D_j \in E$ *élnek és* S_i *színosztálynak a metszetére*

$$\lfloor \frac{|D_j|}{k} \rfloor \leq |D_j \cap S_i| \leq \lceil \frac{|D_j|}{k} \rceil$$

teljesül.

Definíció

H jó k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden* $D_j \in E$ *élben van* $\min\{|D_j|, k\}$ *különböző szín.*
Ha $k \leq \min_{j \in J} |D_j|$*, akkor minden* S_i *a H transzverzálisa. Ha* $k \geq \max_{j \in J} |D_j|$*, akkor egy jó k-színezés egy erős k-színezés. A H kiegyensúlyozott k-színezése egy jó k-színezés is.*

Definíció

A normál, az erős és a kiegyensúlyozott színezések közös általánosítása, ha minden D_j *élhez előre megadunk két nemnegatív számot,* $0 \le a_j \le b_j \le |D_j|$.

Definíció

A normál, az erős és a kiegyensúlyozott színezések közös általánosítása, ha minden D_j élhez előre megadunk két nemnegatív számot, $0 \leq a_j \leq b_j \leq |D_j|$.

H szabályos k-színezése *az X egy partícióját jelenti k stabil részre úgy, hogy minden $D_j \in E$ élre*

$$a_j \leq |D_j \cap S_i| \leq b_j.$$

A gráfok színezésekor bevezetett fogalmak a hipergráfok esetében is fontosak, definíciójuk olyan, hogy a speciális gráf esetben visszakapjuk a már megismert eredeti fogalmat.

A gráfok színezésekor bevezetett fogalmak a hipergráfok esetében is fontosak, definíciójuk olyan, hogy a speciális gráf esetben visszakapjuk a már megismert eredeti fogalmat.

Definíció

A H hipergráf egy x csúcsának **monofoka, m(x,H)** *azon élek maximális száma, amelyek mind tartalmazzák x-et, de páronkénti metszetük csak az x-et tartalmazza. Legyen*

$$M(H) = \max_{Y \subseteq X} \min_{x \in Y} m(x, H/Y).$$

(ahol H/Y az Y által feszített részhipergráfját jelenti H-nak, melynek alaphalmaza Y és H azon élei alkotják az éleit, amelyek részhalmazai Y-nak)
Gráfokra az $M(H) + 1$ volt az Erdős és Hajnal által bevezetett **színezési szám**.

Kevert hipergráfok

Definíció

Kevert hipergráfnak *nevezünk egy* $H = (X, C, D)$ *hármast, ahol* X *a csúcshalmaz, és* C *és* D *is az* X *részhalmazainak családja: a* C*-élek és a* D*-élek.*

Kevert hipergráfok

Definíció

Kevert hipergráfnak *nevezünk egy* $H = (X, C, D)$ *hármast, ahol* X *a csúcshalmaz, és* C *és* D *is az* X *részhalmazainak családja: a* C*-élek és a* D*-élek.*

Definíció

Egy kevert hipergráf ***megfelelő*** k***-színezése*** *egy* $X \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ *függvény, amire minden* C*-élben van két egyforma színű csúcs (nincs teljesen tarka* C*-él) és minden* D*-élben van két különböző szín csúcs (nincs teljesen egyszínű* D*-él).*

Kevert hipergráfok

Definíció

Kevert hipergráfnak *nevezünk egy* $H = (X, C, D)$ *hármast, ahol* X *a csúcshalmaz, és* C *és* D *is az* X *részhalmazainak családja: a* C*-élek és a* D*-élek.*

Definíció

Egy kevert hipergráf ***megfelelő*** k***-színezése*** *egy* $X \mapsto \{1, 2, \ldots, k\}$ *függvény, amire minden* C*-élben van két egyforma színű csúcs (nincs teljesen tarka* C*-él) és minden* D*-élben van két különböző szín csúcs (nincs teljesen egyszínű* D*-él).*

Megjegyzés

Nem minden kevert hipergráfnak van megfelelő színezése! Például a következőnek nincsen: $H = (\{1, 2\}; \{\{1, 2\}\}; \{\{1, 2\}\})$.

Kevert hipergráfok

Definíció

*Egy kevert hipergráf k színnel **színezhető**, ha létezik legfeljebb k színt használó megfelelő színezése.*

Kevert hipergráfok

Definíció

*Egy kevert hipergráf k színnel **színezhető**, ha létezik legfeljebb k színt használó megfelelő színezése.*
***Feszített** k**-színezésnek** nevezünk egy megfelelő k-színezést, ami az összes színt használja (tehát a függvény szürjektív)*

Kevert hipergráfok

Definíció

Egy kevert hipergráf k színnel ***színezhető****, ha létezik legfeljebb k színt használó megfelelő színezése.*
Feszített *k**-színezésnek*** *nevezünk egy megfelelő k-színezést, ami az összes színt használja (tehát a függvény szürjektív)*

Definíció

Egy H kevert hipergráf esetén a feszített színezéseiben használható maximális színszámot ***felső kromatikus számnak*** *nevezzük és $\overline{\chi}(H)$-val jelöljük.*

Kevert hipergráfok

Definíció

*Egy kevert hipergráf k színnel **színezhető**, ha létezik legfeljebb k színt használó megfelelő színezése.*
***Feszített k-színezésnek** nevezünk egy megfelelő k-színezést, ami az összes színt használja (tehát a függvény szürjektív)*

Definíció

*Egy H kevert hipergráf esetén a feszített színezéseiben használható maximális színszámot **felső kromatikus számnak** nevezzük és $\overline{\chi}(H)$-val jelöljük.*
*Hasonlóan a minimális színszámot **alsó kromatikus számnak** nevezzük és $\chi(H)$-val jelöljük.*

A hipergráfok és kevert hipergráfok kapcsolata

Megjegyzés

Jelölje H_D *a* $(X, \emptyset, D)$ *hármast és nevezzük ezt* D*-hipergráfnak.*

A hipergráfok és kevert hipergráfok kapcsolata

Megjegyzés

Jelölje H_D a $(X, \emptyset, D)$ hármast és nevezzük ezt D-hipergráfnak. Vegyük észre, hogy a D-hipergráfok vizsgálata a minimális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.

A hipergráfok és kevert hipergráfok kapcsolata

Megjegyzés

Jelölje H_D a $(X, \emptyset, D)$ hármast és nevezzük ezt D-hipergráfnak. Vegyük észre, hogy a D-hipergráfok vizsgálata a minimális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.
Hasonlóan jelölje H_C a $(X, C, \emptyset)$ hármast és nevezzük ezt C-hipergráfnak.

A hipergráfok és kevert hipergráfok kapcsolata

Megjegyzés

Jelölje H_D a $(X, \emptyset, D)$ hármast és nevezzük ezt D-hipergráfnak.
Vegyük észre, hogy a D-hipergráfok vizsgálata a minimális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.
Hasonlóan jelölje H_C a $(X, C, \emptyset)$ hármast és nevezzük ezt C-hipergráfnak.
Vegyük észre, hogy a C-hipergráfok vizsgálata pedig a maximális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.

A hipergráfok és kevert hipergráfok kapcsolata

Megjegyzés

Jelölje H_D a $(X, \emptyset, D)$ hármast és nevezzük ezt D-hipergráfnak.
Vegyük észre, hogy a D-hipergráfok vizsgálata a minimális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.
Hasonlóan jelölje H_C a $(X, C, \emptyset)$ hármast és nevezzük ezt C-hipergráfnak.
Vegyük észre, hogy a C-hipergráfok vizsgálata pedig a maximális színszám vizsgálatát jelenti a hipergráfok körében.

Ebből látható, hogy az általánosabb kevert hipergráfok vizsgálata során minden olyan probléma felmerül, ami külön-külön a minimális- és maximális színszám vizsgálatánál felmerül.

Definíció

Megengedett halmaznak *nevezzük azon k pozitív egészek halmazát, amelyekre a H hipergráfnak van feszített k-színezése.*

Definíció

Megengedett halmaznak *nevezzük azon k pozitív egészek halmazát, amelyekre a H hipergráfnak van feszített k-színezése.*

Definíció

Minden egyes k-ra legyen r_k az X csúcshalmaz olyan partícióinak száma, amely k nemüres osztályból áll (ezek a színosztályok) és a C-élekre, valamint a D-élekre vonatkozó színezési feltételek is teljesülnek.

Definíció

Megengedett halmaznak *nevezzük azon k pozitív egészek halmazát, amelyekre a H hipergráfnak van feszített k-színezése.*

Definíció

Minden egyes k-ra legyen r_k az X csúcshalmaz olyan partícióinak száma, amely k nemüres osztályból áll (ezek a színosztályok) és a C-élekre, valamint a D-élekre vonatkozó színezési feltételek is teljesülnek.
Ezeket a partíciókat ***megengedett partícióknak*** *nevezzük.*

r_k megegyezik a feszített k-színezések számával (ha a színek permutációjával kapott színezéseket nem tekintjük különbözőknek).

Definíció

Az $R(H) = (r_1, \ldots, r_n)$ *vektort nevezzük a* H *hipergráf* ***kromatikus spektrumának***.

Definíció

Az $R(H) = (r_1, \ldots, r_n)$ vektort nevezzük a H hipergráf ***kromatikus spektrumának****.*

Tekintsünk egy színezhető H kevert hipergráfot.

Definíció

Az $R(H) = (r_1, \ldots, r_n)$ vektort nevezzük a H hipergráf ***kromatikus spektrumának****.*

Tekintsünk egy színezhető H kevert hipergráfot.
Ekkor természetesen adódik a kérdés, hogy az alsó- és felső kromatikus száma közötti tetszőleges k-ra létezik-e feszített k-színezése?

Definíció

Az $R(H) = (r_1, \ldots, r_n)$ vektort nevezzük a H hipergráf ***kromatikus spektrumának****.*

Tekintsünk egy színezhető H kevert hipergráfot.
Ekkor természetesen adódik a kérdés, hogy az alsó- és felső kromatikus száma közötti tetszőleges k-ra létezik-e feszített k-színezése?
A válasz nemleges, vagyis a kromatikus spektrumban lehetnek lyukak.

Definíció

A kromatikus spektrumnak k-ban ***lyuka*** *van, ha a megengedett halmaz tartalmaz k-nál kisebb és nagyobb elemet is, de a k-t nem.*

Megjegyzés

Tetszőleges $2 \leq s \leq t-2$*-re létezik olyan* $H_{s,t}$ *kevert hipergráf, aminek megengedett halmaza* $\{s,t\}$.

Megjegyzés

Tetszőleges $2 \leq s \leq t - 2$-re létezik olyan $H_{s,t}$ kevert hipergráf, aminek megengedett halmaza $\{s, t\}$.

Szintén érdekes kérdés, hogy a pozitív egészeknek melyek azok a részhalmazai, amik kevert hipergráfnak lehetnek megengedett halmazai?

Megjegyzés

Tetszőleges $2 \leq s \leq t-2$-re létezik olyan $H_{s,t}$ kevert hipergráf, aminek megengedett halmaza $\{s, t\}$.

Szintén érdekes kérdés, hogy a pozitív egészeknek melyek azok a részhalmazai, amik kevert hipergráfnak lehetnek megengedett halmazai?

Megjegyzés

Az bizonyított, hogy a pozitív egészeknek egy véges részhalmaza akkor és csak akkor megengedett halmaza valamely kevert hipergráfnak, ha vagy az $\{1, 2, \ldots, t\}$ kezdő-intervallum vagy ha nem tartalmazza az 1 elemet.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.
Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.
Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$.
Legyen W minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$-re az $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ négyelemű halmazból készíthető hármasok (minden négyelemű halmazból 4 ilyen származik) uniója.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.
Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$.
Legyen W minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$-re az $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ négyelemű halmazból készíthető hármasok (minden négyelemű halmazból 4 ilyen származik) uniója.
Ekkor a C-élek legyenek $T \cup W$ és a D-élek legyenek $T \cup U \cup \{x_1 x_2\}$.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.
Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$.
Legyen W minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$-re az $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ négyelemű halmazból készíthető hármasok (minden négyelemű halmazból 4 ilyen származik) uniója.
Ekkor a C-élek legyenek $T \cup W$ és a D-élek legyenek $T \cup U \cup \{x_1 x_2\}$.

Megmutatható, hogy ennek a kevert hipergráfnak a megengedett halmaza $\{2, t\}$.

$H_{2,t}$ konstrukciója

Legyen $X = \{x_1, x_2, a_1, \ldots, a_{t-2}, b_1, \ldots, b_{t-2}\}$.
Jelölje T az $x_r a_i b_i$ szerkezetű hármasok halmazát, ahol $r \in \{1, 2\}$ és $i \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$, valamint jelölje U az $a_i b_i a_j b_j$ alakú négyesek halmazát, ahol $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$.
Legyen W minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, t-2\}$-re az $\{a_i, b_i, a_j, b_j\}$ négyelemű halmazból készíthető hármasok (minden négyelemű halmazból 4 ilyen származik) uniója.
Ekkor a C-élek legyenek $T \cup W$ és a D-élek legyenek $T \cup U \cup \{x_1 x_2\}$.

Megmutatható, hogy ennek a kevert hipergráfnak a megengedett halmaza $\{2, t\}$.
Tehát, ha $t \geq 4$, akkor ez a példa mutatja, hogy a megengedett halmaznak lehet lyuka.

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.
Ennek a **páros gráf reprezentációja** $B(H)$ egy olyan páros gráf, aminek két osztálya X és E és egy X-beli csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze egy E-beli éllel, ha a csúcs eleme ennek az élnek.

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.
Ennek a **páros gráf reprezentációja** $B(H)$ egy olyan páros gráf, aminek két osztálya X és E és egy X-beli csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze egy E-beli éllel, ha a csúcs eleme ennek az élnek.

Definíció

*Egy H hipergráfot **sík-hipergráfnak** nevezünk pontosan akkor, ha $B(H)$ síkgráf.*

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.
Ennek a **páros gráf reprezentációja** $B(H)$ egy olyan páros gráf, aminek két osztálya X és E és egy X-beli csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze egy E-beli éllel, ha a csúcs eleme ennek az élnek.

Definíció

*Egy H hipergráfot **sík-hipergráfnak** nevezünk pontosan akkor, ha $B(H)$ síkgráf.*

Vegyük észre, hogy a sík-hipergráfoknak létezik a síkba olyan beágyazása, hogy a csúcsokhoz a sík egy-egy pontját rendeljük és minden élnek megfelel egy zárt síkrész (ami homeomorf a körlappal) és nem tartalmaz más csúcsokhoz rendelt pontokat, viszont tartalmazza a saját csúcsaihoz tartozó pontokat a határán.

Tekintsünk egy $H = (X, E)$ hipergráfot.
Ennek a **páros gráf reprezentációja** $B(H)$ egy olyan páros gráf, aminek két osztálya X és E és egy X-beli csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze egy E-beli éllel, ha a csúcs eleme ennek az élnek.

Definíció

Egy H hipergráfot ***sík-hipergráfnak*** *nevezünk pontosan akkor, ha* $B(H)$ *síkgráf.*

Vegyük észre, hogy a sík-hipergráfoknak létezik a síkba olyan beágyazása, hogy a csúcsokhoz a sík egy-egy pontját rendeljük és minden élnek megfelel egy zárt síkrész (ami homeomorf a körlappal) és nem tartalmaz más csúcsokhoz rendelt pontokat, viszont tartalmazza a saját csúcsaihoz tartozó pontokat a határán. Továbbá két ilyen síkrész csak az élek közös csúcsainak megfelelő pontokban metszhetik egymást.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.
Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C-él, ami egybeesik egy D-éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E-ben csak egyszer szerepel.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.
Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C-él, ami egybeesik egy D-éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E-ben csak egyszer szerepel.
Nevezzük a $H' = (X, E)$ hipergráfot a H kevert hipergráfhoz rendelt hipergráfnak. (ha a C-élek mind egybeesnek a D-élekkel, akkor **bihipergráfról** beszélhetünk)

Definíció

A $H = (X, C, D)$ kevert hipergráf sík-hipergráf, akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt hipergráf sík-hipergráf.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.
Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C-él, ami egybeesik egy D-éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E-ben csak egyszer szerepel.
Nevezzük a $H' = (X, E)$ hipergráfot a H kevert hipergráfhoz rendelt hipergráfnak. (ha a C-élek mind egybeesnek a D-élekkel, akkor **bihipergráfról** beszélhetünk)

Definíció

A $H = (X, C, D)$ kevert hipergráf sík-hipergráf, akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt hipergráf sík-hipergráf.

Megjegyzés

Az nyilvánvaló, hogy minden D-hipergráf, ami sík-hipergráf is az színezhető megfelelően.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.
Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C-él, ami egybeesik egy D-éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E-ben csak egyszer szerepel.
Nevezzük a $H' = (X, E)$ hipergráfot a H kevert hipergráfhoz rendelt hipergráfnak. (ha a C-élek mind egybeesnek a D-élekkel, akkor **bihipergráfról** beszélhetünk)

Definíció

A $H = (X, C, D)$ kevert hipergráf sík-hipergráf, akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt hipergráf sík-hipergráf.

Megjegyzés

Az nyilvánvaló, hogy minden D-hipergráf, ami sík-hipergráf is az színezhető megfelelően.
Hasonlóan minden C-hipergráf is, ami sík-hipergráf.

Legyen most $H = (X, C, D)$ egy kevert hipergráf.
Jelölje $E = C \cup D$. Ha van olyan C-él, ami egybeesik egy D-éllel (vagyis **bi-él**), akkor az az E-ben csak egyszer szerepel.
Nevezzük a $H' = (X, E)$ hipergráfot a H kevert hipergráfhoz rendelt hipergráfnak. (ha a C-élek mind egybeesnek a D-élekkel, akkor **bihipergráfról** beszélhetünk)

Definíció

A $H = (X, C, D)$ kevert hipergráf sík-hipergráf, akkor és csak akkor, ha a hozzárendelt hipergráf sík-hipergráf.

Megjegyzés

Az nyilvánvaló, hogy minden D-hipergráf, ami sík-hipergráf is az színezhető megfelelően.
Hasonlóan minden C-hipergráf is, ami sík-hipergráf.
Azonban általános kevert sík-hipergráfok esetén már nem feltétlenül létezik megfelelő színezés.

Példa

A legkisebb (nemtriviális) nem színezhető kevert $H = (X, C, D)$ *sík-hipergráf a következő:* $X = \{1, 2, 3\}$, $C = \{(1, 2, 3)\}$ *és* $D = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Példa

A legkisebb (nemtriviális) nem színezhető kevert $H = (X, C, D)$ sík-hipergráf a következő: $X = \{1, 2, 3\}$, $C = \{(1, 2, 3)\}$ és $D = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Megjegyzés

Nem nehéz ebből a példából kiindulva gyártani nem színezhető kevert sík-hipergráfok végtelen családját sem.

Példa

A legkisebb (nemtriviális) nem színezhető kevert $H = (X, C, D)$ sík-hipergráf a következő: $X = \{1, 2, 3\}$, $C = \{(1, 2, 3)\}$ és $D = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

Megjegyzés

Nem nehéz ebből a példából kiindulva gyártani nem színezhető kevert sík-hipergráfok végtelen családját sem.
Viszont a nem színezhető kevert sík-hipergráfok szerkezete még nem ismert.

Definíció

*Egy hipergráfot r**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r.*

Definíció

*Egy hipergráfot r**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r.*
***Teljes** r**-uniformnak** nevezzük azt az r-uniform hipergráfot, amiben az élek éppen az X csúcshalmaz összes r elemű részhalmazai (az összes r elemű részhalmazt jelöljük $\binom{X}{r}$-rel).*

Definíció

*Egy hipergráfot r**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r.*
***Teljes** r**-uniformnak** nevezzük azt az r-uniform hipergráfot, amiben az élek éppen az X csúcshalmaz összes r elemű részhalmazai (az összes r elemű részhalmazt jelöljük $\binom{X}{r}$-rel).*
Ennek jele: K_n^r, ahol $|X| = n$.

Definíció

*Egy hipergráfot r**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r.*
***Teljes** r**-uniformnak** nevezzük azt az r-uniform hipergráfot, amiben az élek éppen az X csúcshalmaz összes r elemű részhalmazai (az összes r elemű részhalmazt jelöljük $\binom{X}{r}$-rel).*
Ennek jele: K_n^r, ahol $|X| = n$.

Ezt a fogalmat általánosíthatjuk kevert hipergráfokra is:

Definíció

*Egy kevert hipergráfot (l, m)**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei, minden C-él mérete l és minden D-él mérete m.*

Definíció

*Egy hipergráfot r**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei és minden élnek a mérete r.*
***Teljes** r**-uniformnak** nevezzük azt az r-uniform hipergráfot, amiben az élek éppen az X csúcshalmaz összes r elemű részhalmazai (az összes r elemű részhalmazt jelöljük $\binom{X}{r}$-rel).*
Ennek jele: K_n^r, ahol $|X| = n$.

Ezt a fogalmat általánosíthatjuk kevert hipergráfokra is:

Definíció

*Egy kevert hipergráfot (l, m)**-uniformnak** nevezünk, ha nincsenek többszörös élei, minden C-él mérete l és minden D-él mérete m.*
***Teljes** (l, m)**-uniformnak** nevezzük azt az (l, m)-uniform kevert hipergráfot, amiben a C-élek az X csúcshalmaz összes l elemű részhalmazai és a D-élek az összes m elemű részhalmazok, vagyis:*
$K(n, l, m) = (X, C, D) = \left(X, \binom{X}{l}, \binom{X}{m}\right)$, ahol $|X| = n$.

Kevert uniform hipergráfok színezhetősége

Tétel

$K(n, l, m)$ akkor és csak akkor nem színezhető megfelelően, ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$.

Kevert uniform hipergráfok színezhetősége

Tétel

$K(n, l, m)$ akkor és csak akkor nem színezhető megfelelően, ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$.

Bizonyítás

Először megmutatjuk, hogy ha $n \leq (l-1)(m-1)$, akkor van megfelelő színezés.

Kevert uniform hipergráfok színezhetősége

Tétel

$K(n, l, m)$ akkor és csak akkor nem színezhető megfelelően, ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$.

Bizonyítás

Először megmutatjuk, hogy ha $n \leq (l-1)(m-1)$, akkor van megfelelő színezés.

Színezzük az első $(m-1)$ csúcsot az első színnel, a következő $(m-1)$-et a másodikkal, stb.

Kevert uniform hipergráfok színezhetősége

Tétel

$K(n, l, m)$ akkor és csak akkor nem színezhető megfelelően, ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$.

Bizonyítás

Először megmutatjuk, hogy ha $n \leq (l-1)(m-1)$, akkor van megfelelő színezés.

Színezzük az első $(m-1)$ csúcsot az első színnel, a következő $(m-1)$-et a másodikkal, stb.

Mivel $n \leq (l-1)(m-1)$, ezért így legfeljebb $(l-1)$ színt használunk fel és az így kapott színezés a $K(n, l, m)$ egy megfelelő színezése.

Bizonyítás

Ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$*, akkor mivel minden* l *méretű részhalmaz egy* C*-él, ezért nem használhatunk csak legfeljebb* $(l-1)$ *színt;*

Bizonyítás

Ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$*, akkor mivel minden* l *méretű részhalmaz egy* C*-él, ezért nem használhatunk csak legfeljebb* $(l-1)$ *színt;*

valamint mivel minden m *méretű részhalmaz egy* D*-él, ezért egy színosztályban legfeljebb* $(m-1)$ *csúcs szerepelhet.*

Bizonyítás

Ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$, *akkor mivel minden* l *méretű részhalmaz egy* C*-él, ezért nem használhatunk csak legfeljebb* $(l-1)$ *színt;*

valamint mivel minden m *méretű részhalmaz egy* D*-él, ezért egy színosztályban legfeljebb* $(m-1)$ *csúcs szerepelhet.*

Ebből triviálisan következik, hogy marad olyan csúcs, amit már nem tudunk megfelelően színezni.

Bizonyítás

Ha $n \geq (l-1)(m-1)+1$, akkor mivel minden l méretű részhalmaz egy C-él, ezért nem használhatunk csak legfeljebb $(l-1)$ színt;

valamint mivel minden m méretű részhalmaz egy D-él, ezért egy színosztályban legfeljebb $(m-1)$ csúcs szerepelhet.

Ebből triviálisan következik, hogy marad olyan csúcs, amit már nem tudunk megfelelően színezni.

Következmény

Egy $H = K(n, l, m)$ kevert hipergráf megfelelően színezhető akkor és csak akkor, ha a kromatikus inverze (amit a C és D-élek felcserélésével kapunk) $\overline{H} = K(n, m, l)$ is színezhető.

Következmények

Következmény

Rögzített (l, m) párra tehát majdnem minden $K(n, l, m)$ nem színezhető megfelelően.

Következmények

Következmény

Rögzített (l, m) *párra tehát majdnem minden* $K(n, l, m)$ *nem színezhető megfelelően.*

A fentiek triviálisan következtek a tételből, és a következő állítást sem túl nehéz belátni.

Következmények

Következmény

Rögzített (l, m) párra tehát majdnem minden $K(n, l, m)$ nem színezhető megfelelően.

A fentiek triviálisan következtek a tételből, és a következő állítást sem túl nehéz belátni.

Következmény

Ha az (l, m) párt nem rögzítjük, akkor viszont majdnem minden $K(n, l, m)$ színezhető.

Tartalomjegyzék:

Vajon kinek jutott eszébe legelőször a kérdés? Talán már másoknak is feltűnt, de nem beszélt róla senkinek. Talán nem ismerte fel, hogy kérdése érdekes!? Azt hihette nagyon egyszerű a válasz.

Kicsit furcsa, hogy az iskolások nem kérdeznek meg ilyeneket a tanáraiktól? Az is lehet, hogy kérdeznek a fiatalok szép dolgokat, de "a tananyaggal haladni kell" és még az is megfeledkezik saját ötletéről aki felvetette.

De Morgan tanítványaként, Francis Guthrie Londonban egyetemen tanult matematikát, majd jogot és botanikát is. Öccsének, Fredericknek említette min töri a fejét, aki akkor már szintén De Morgantól tanult matematikát. Megkérte, kérdezze meg a nagy matematikust a térképek színezésének problémájáról.

1. ábra. Francis Guthrie, 1831-1899

- Francis Guthrie 1852-ben kérdezte meg, vajon ki lehet-e színezni bármely térképet 4 színnel úgy, hogy határszakasszal szomszédos országok a térképen különböző színeket kapjanak?
- Francis Guthrie később Dél-Afrikában lett matematikus és botanikus. A Cape Town egyetemről ment nyugdíjba 1898-ban.
- A South African Philosophical Society tagja volt.

2. ábra. A Jóreménység foka

3. ábra. Frederick Guthrie, 1833-1886

- Frederick Guthrie megkérdezte Augustus De Morgant fivére problémájáról.
- De Morgan nem oldotta meg a feladatot, viszont megírta azt Dublinba Hamiltonnak. Megírta, hogy 4 szín szükséges, de nem talált olyan példa - térképet, amelyet nem tudott volna kiszínezni 4 színnel. A diákja sejtése igaznak tűnik.
- 3 nap múlva megérkezett Hamilton válasza - nem volt gyorsposta, csak gyors volt a posta akkoriban!
  Hamilton nem ígérte meg, hogy gyorsan foglalkozna a 4 szín sejtéssel!

4. ábra. Augustus De Morgan, 1806-1871

- Indiában született, kora gyermekkorától egyik szemére vak volt.
- Egyetemi tanulmányai után kiváló oktatóvá vált, 22 évesen professzor lett. A London Mathematical Society megalakításában is fontos szerepet játszott.
- A logika mellett a trigonometria, az algebra megalapozásában kiemelkedő szerepe volt.
- A Hold egy kráterét róla nevezték el.

5. ábra. Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865

- Ír fizikus, matematikus, csillagász.
- A newtoni mechanikát Hamilton mechanikának is hívják az egzakt matematikai megalapozottsága következtében. Az elektromágnesesség, a kvantummechanika és az optika területén elméleti munkássága nagy jelentőségű.
- A kvaternió fogalmát ő vezette be, általánosítva a komplex számfogalmat.
- Az analízis mellett diszkrét matematikával is foglalkozott, szabályos testek élhálózatát is vizsgálta, a gráfelméletben a Hamilton kör és út viseli a nevét.

- De Morgan tovább népszerűsítette Guthrie problémáját.
- Az amerikai Charles Sanders Peirce is megpróbálta bizonyítani a sejtést 1860-ban, de később is foglalkoztatta a feladat.
- 1878-ban De Morgan a London Mathematical Society tagjainak figyelmébe ajánlotta az érdekes sejtést.
- Egy évvel később Arthur Cayley a Royal Geographical Society részére írt cikket, On the colouring of maps címmel, melyben elmagyarázza miért is nehéz megválaszolni a 4-színezhetőséget.

6. ábra. Charles Sanders Peirce, 1839-1914

7. ábra. Arthur Cayley, 1821-1895

- Bár Cayley Richmondban született, szüleivel együtt az első 7 évét Szentpétervárott töltötte.
- Cayley gyakorló jogász volt Londonban 1849-től 1863-ig. Szabadidejében több mint 300 matematikai cikket publikált.
- 1852-ben a Royal Society tagjává választották, majd 1963-tól matematika professzor lett Cambridge-ben.
- Cayley alapvetően járult hozzá Cambridge hírnevéhez!

- A csoportelmélet, a görbék és felületek algebrai elmélete, a lineáris algebra, mátrixelmélet az elliptikus függvények területén munkássága alapvető.
- A geometria számos területén alkotott: analítikus geometria, projektív geometria, nemeuklideszi geometria.
- A kombinatorika és a gráfelmélet is érdekelte.
- Mechanikáról, csillagászatról is írt, összesen mintegy 1000 cikke jelent meg.

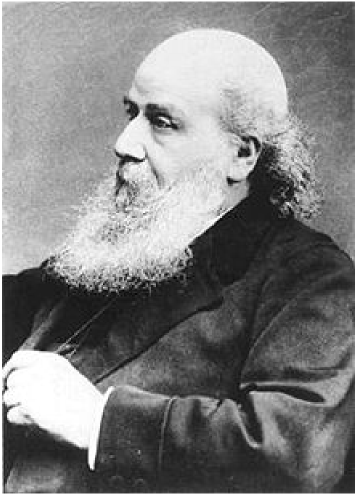
8. ábra. Alfred Bray Kempe, 1849-1922

- Alfred Bray Kempe 1879-ben a Nature-ben kihirdette, hogy megoldotta a négyszínsejtést.
- Cayley tanítványa volt, aki bátorította, hogy közölje tételét az American Journal of Mathematics szaklapban.
- Kempe törvényszéki ügyvéd lett, pedig mind a matematika, mind a zene elvarázsolta. Mégis később a London Mathematical Society elnöke volt az 1872-1874-es időszakban.
- Bár bizonyítása nem volt tökéletes, mégis ideái egy évszázada élnek. Az "elkerülhetetlenség", "redukálhatóság" és a Kempe-lánc megkerülhetetlen fogalmak.

- Tekintsünk egy térképet, amelyben az O ország kivételével a többi jól ki van színezve négy színnel. Ha az O határszakasszal nem szomszédos mind a négy színű országgal, akkor O-t is ki lehet jól színezni.
- Tegyük fel, hogy O szomszédos a P, F, Z, S országokkal (ebben a körüljárási sorrendben), amelyek rendre piros, fehér, zöld és sárga színűek.
- Ha nincs egy alternáló piros-zöld lánc csatlakozó országokból a P-től a Z-ig, akkor minden P-ből induló alternáló piros-zöld láncban cseréljük a piros színt zöldre és a zöldet pirosra. Mivel nem lehet egy ilyen lánccal elérni a Z országot, így elérjük, hogy O-nak nem lesz piros szomszédja, vagyis az O pirossal kiszínezhető.

- Ha létezik alternáló piros-zöld lánc csatlakozó országokból a P-től a Z-ig, akkor nem lehet az F-től az S-ig fehér-sárga alternáló lánc, mivel nem metszhetik egymást a piros-zöld lánccal. De ekkor a fehér-sárga szín betölti a piros-zöld előbbi szerepét.
- Kempe "megoldását" az American Journal of Mathematics szerkesztője, William Edward Story is javította, kiegészítette. A főszerkesztő Sylvester volt ebben az időben.
- Charles Sanders Peirce amerikai logikus, matematikus is közzétette észrevételeit, hogyan lehetne Kempe bizonyítását precízebbé tenni.

9. ábra. Charles Sanders Peirce, 1839-1914

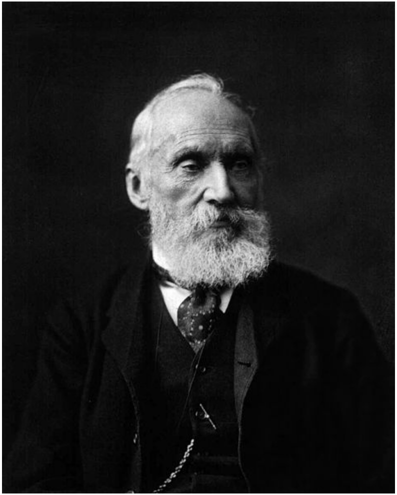


10. ábra. James Joseph Sylvester, 1814 - 1897

- James Joseph Londonban született, ő is De Morgan tanítványa volt.
- A Johns Hopkins University, majd Oxford professzora. Az American Journal of Mathematics megalapítója.
- A Sylvester-Gallai tétel állítja, hogy a síkon N pont vagy egy egyenesre esik, vagy létezik olyan két pont, amelyek egyenesén más megadott pont nincs.
- K egymást követő, K-nál nagyobb egész szorzata osztható egy K-nál nagyobb prímmel - ez a tétel is Sylvester nevéhez fűződik.

11. ábra. Peter Guthrie Tait, 1831 - 1901

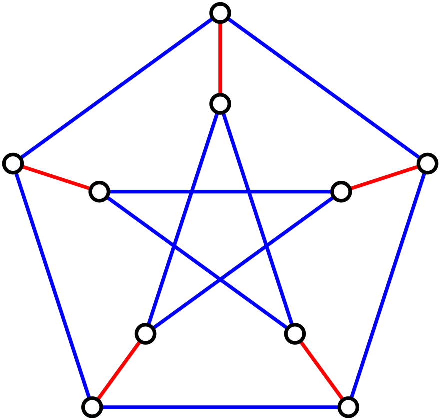
- 1880-ban a skót fizikus P. G. Tait írt két cikket a négyszíntétel bizonyításáról, amelyekben hibákat javított és világosabban érvelt.
- Hamilton tanácsai alapján a kvaterniókkal is foglalkozott, tankönyvet írt az új fogalomról.
- Természetfilozófus, a termodinamika, kinetikus gázelmélet tudósa is.
- Lord Kelvinnel nemcsak fizikai, topológia munkásság is összefűzi. A csomók elméletét ők kezdték el kidolgozni.



12. ábra. William Thompson (Lord Kelvin), 1824 - 1907

- Julius Petersen az 1898-ban megjelent híres dolgozatában bemutatott egy ellenpéldát a Tait által használt állításra, miszerint a 3-reguláris gráfok 1-faktorizálhatók.
- A Petersen gráf a legkisebb 3-reguláris, híd nélküli gráf amely nem 1-faktorizálható.
- Bár mindenki úgy hiszi a gráfot először Petersen mutatta be, Kempe 1886-os munkájában 12 évvel korábban már megjelent.
- Nem síkgráf! Mindkét minimális nem síkgráfot minorként tartalmazza! Nincs Hamilton köre!

13. ábra. Julius Petersen, 1839 - 1910

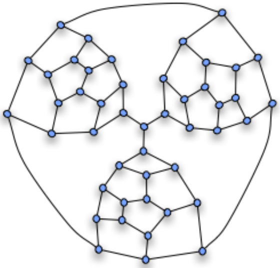


14. ábra. Petersen-gráf nem bontható 3 teljes párosítás diszjunkt uniójára

Sejtés (Tait, 1884)

Minden 3-összefüggő, síkbeli, 3-reguláris gráf tartalmaz Hamilton-kört.

Tutte megcáfolta a sejtést, ellenpéldát mutatott.

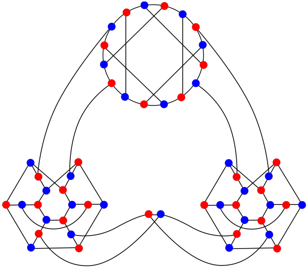


15. ábra. Bill Tutte példája 1946-ból, 46 csúcs, 69 él, 25 ország

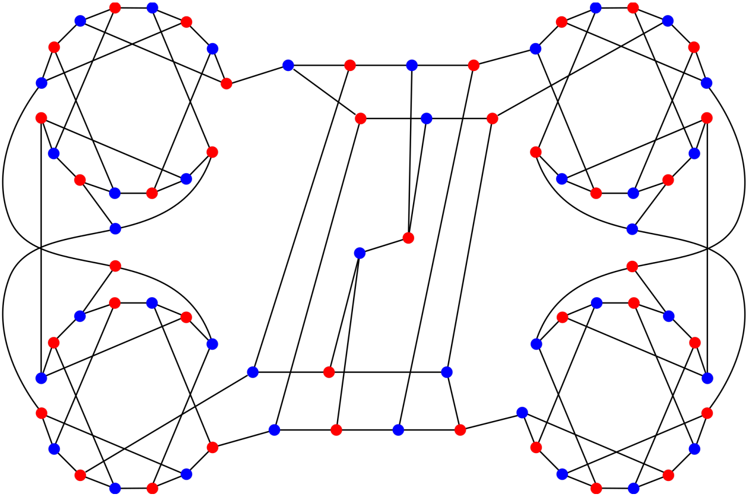
Sejtés

Minden 3-összefüggő, 3-reguláris páros gráf tartalmaz Hamilton-kört.

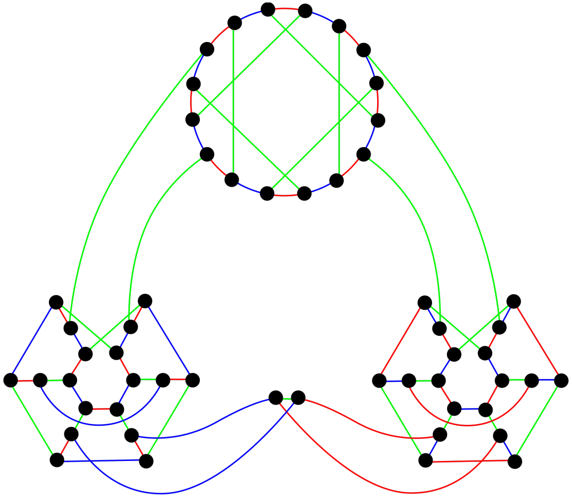
Joseph D. Horton és Mark N. Ellington ellenpéldákkal cáfolta a sejtést.



16. ábra. 54 csúcsú, 2-kromatikus



17. ábra. 78 csúcsú, 2-kromatikus



18. ábra. 54 csúcsú, 3-kromatikus

- Tutte 1935-ben kezdte meg természettudományos, főleg kémiai tanulmányait, a Trinity College, Cambridge egyetemen.
- A matematika miatt csatlakozott a Trinity Mathematical Society -hoz. 1939-ben két tanulmányt is közölt kémiáról, majd inkább a matematika mellett maradt.
- A második világháború alatt titkos rejtjelezések megfejtésében segített. Ebben a fontos és nagy munkában matematikai zsenialitására volt szükség.
- A Whitney által bevezetett **matroid** fogalmat a gráfelméletben számos problémában alkalmazta.

19. ábra. William Thomas Tutte, 1917-2002

- Donald Coxeter meghívta a torontói egyetemre. 1962-ben a University Waterloo tanára lett. Az 5 éves egyetemen kombinatorika és optimalizálás fakultást alapított és vezetett.
- Gráfokról és hipergráfokról írt monográfiája alapmű.
- A gráfok színezésével kapcsolatban a teljes párosítások létezésének karakterizációja szerepel az egyik, míg a kromatikus polinom fogalma egy másikban.
- Tutte egyik híres tétele:
  Minden 4-összefüggő síkgráf tartalmaz Hamilton-kört.

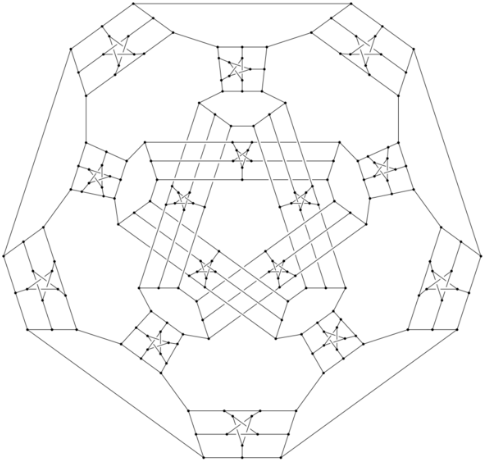
Blanche Descartes, 1935 -

Bill Tutte történetének misztikus fejezete, hogy 1935-ben, amikor társaival a Trinity College hallgatója volt Cambridge-ben, R. Leonard Brooks, Arhur Harold Stone és Cedric Smith társaságában kitalálták a fenti álnevet.

Később mintegy 30 írást publikáltak ezen a néven, matematikai cikkek mellett verseket, humoros írásokat.

Együtt oldották meg a híres rejtvényt: egy négyzetet fel tudtak bontani több kicsi, különböző méretű négyzetre.

Tutte ezen az álnéven írt színezési eredményeiről is, sőt a 210 csúcsú *snark* létezését is így publikálta.



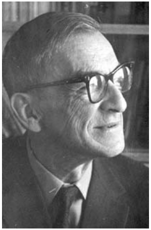
20. ábra. William (Blanche Descartes) Tutte, 1948

Tétel (Grinberg tétele)

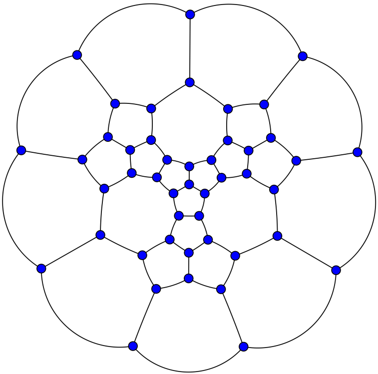
Legyen G egy véges síkgráf, amelyben C egy Hamilton-kör. Ha f_k és g_k jelöli rendre a C-n belüli és kívüli k oldalú országok számát. Ekkor fennáll a

$$\sum_{k\geq 3}(k-2)(f_k-g_k)=0$$

formula.



21. ábra. Emanuel Grinberg, 1911-1982, lett matematikus



22. ábra. Emanuel Grinberg tételével megállapítható, hogy nincs Hamilton-köre

Definíció

Egy gráf ciklikusan k-élösszefüggő, ha legalább k élt kell ahhoz törölni a gráfból, hogy két olyan komponensre essen szét, amelyek mindegyikében van kör.

A fenti fogalmat a Négyszínsejtés hívta elő.

A Tutte-gráf ciklikusan 3-élösszefüggő.

Grinberg a tételét felhasználva talált Hamilton-kört nem tartalmazó 3-reguláris, poliéder élhálózata típusú (3-csúcsösszefüggő, sík) gráfot, amelynek a ciklikus élösszefüggősége 4.

Az előző ábra pedig egy ciklikusan 5-összefüggő gráf. Vegyük észre, hogy minden korlátos országának 5 vagy 8 oldala van, míg a külső, nem korlátos óceánnak 9 él a határa. Ha lenne Hamilton-köre, akkor bármely ország kívül vagy belül 5 vagy 8 oldalú, így a formulában minden tag osztható 3-mal, kivéve a külső országé. Így az egyenlőség nem teljesülhet.

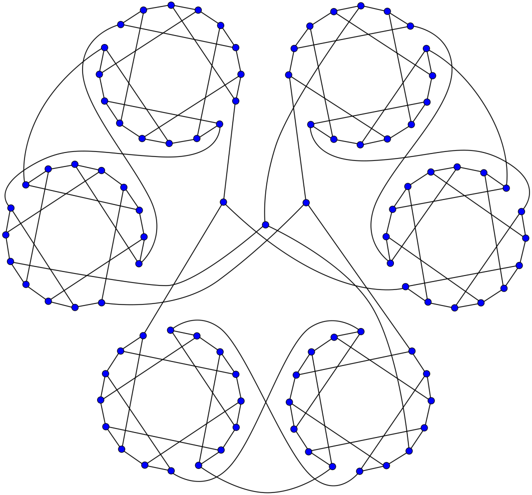
Sejtés (Barnette sejtése)

Minden 3-reguláris, páros poliéder gráf (konvex poliéder élhálózata) tartalmaz Hamilton-kört.

Tétel (Steinitz tétel)

Egy 3 dimenziós konvex poliéder csúcsai és élei által meghatározott gráfok pontosan a 3-csúcsösszefüggő síkgráfok. Tehát minden konvex poliéder csúcs és él gráfja 3-csúcsösszefüggő síkgráf, valamint minden 3-csúcsösszefüggő síkgráf reprezentálható, mint egy konvex poliéder élhálózata.

- Barnette sejtése megoldatlan.
- A sejtés Tait hamis sejtése és Tutte ide vonatkozó hamis sejtésének egy kombinációja.
- Másképp fogalmazva Barnette sejtése azt mondja, ha egy gráf cáfolja Tait sejtését, akkor az nem lehet páros gráf.
- 2000-ben egy kapcsolódó sejtés állítja:
  Minden 3-reguláris, poliéder gráf, amelynek minden országa 6 vagy kevesebb oldalú tartalmaz Hamilton-kört.
- Nincs 178-nál kevesebb csúcsú ellenpélda az előző sejtésre.



23. ábra. Horton legelső cáfolata Tutte sejtésére

Sejtés (Michael Plummer kérdése)

Mi a legnagyobb ciklikus élösszefüggőségi száma egy 5-összefüggő síkgráfnak? (A válasz 10, 11, 12 vagy 13.)

A Heawood-szám

Heawood egész életében - 93 évet élt - a négyszíntétellel foglalkozott. 1890-ben a 11 éve létező Kempe-féle bizonyításról kiderítette, hogy nem lehet helyes.

Heawood a síkon kívül más felületeken is hasonló térképszínezéseket vizsgált. Ha S egy felület, jelölje $e(S)$ az Euler-karakterisztikát. 1890-ben Heawood bebizonyította (a gömbfelület esetét kivéve), hogy

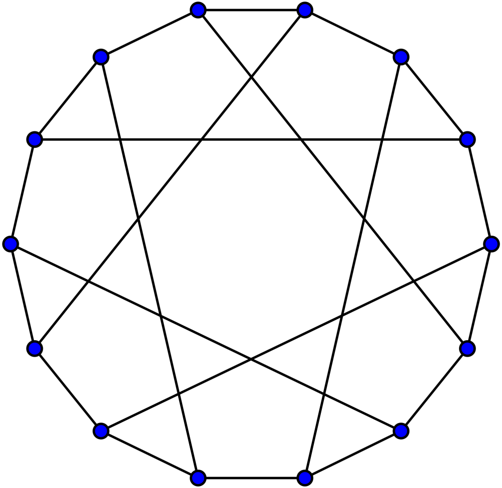
$$H(S) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24e(S)}}{2} \right\rfloor$$

felső korlátja a szükséges színek számának.

H(S) a Heawood-szám, e(S)=2 esetén H(S)=4.

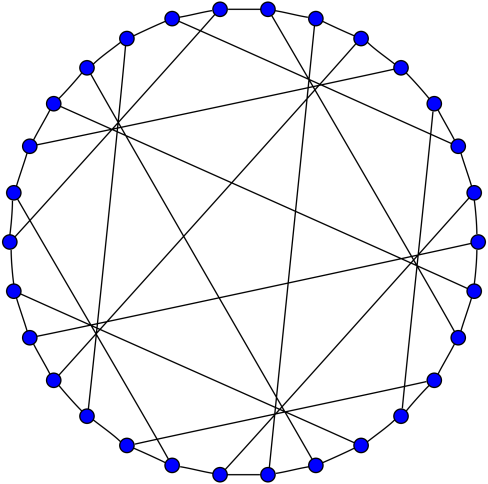
24. ábra. Percy John Heawood, 1861 - 1955

A Heawood-gráf

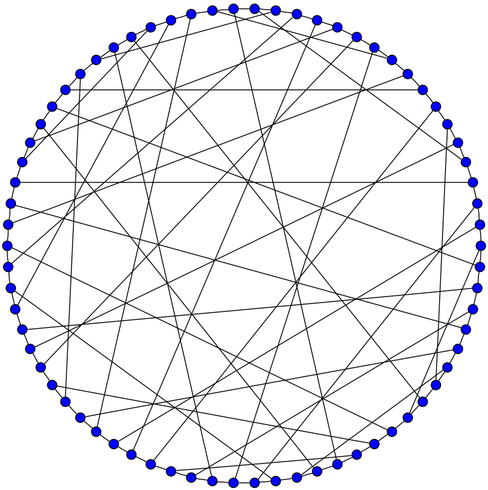


Paraméterek

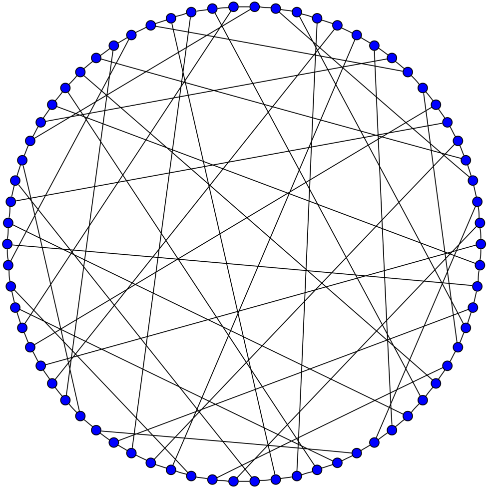
- 3-reguláris
- a legrövidebb kör 6 hosszú
- a legkevesebb csúcsú ilyen: "cage"
- Petersen gráf - (3,5)-cage
- Heawood gráf - (3,6)-cage
- Tutte-Coxeter gráf - (3,8)-cage
- Balaban, Harries, Wong gráfok - (3,10)-cage
- Balaban - (3,11)-cage
- Hoffman - Singleton gráf - (7,5)-cage



26. ábra. Tutte-Coxeter gráf, 30 csúcs, 45 él, derékbőség 8



27. ábra. Balaban gráf, 70 csúcs, 105 él, derékbőség 10



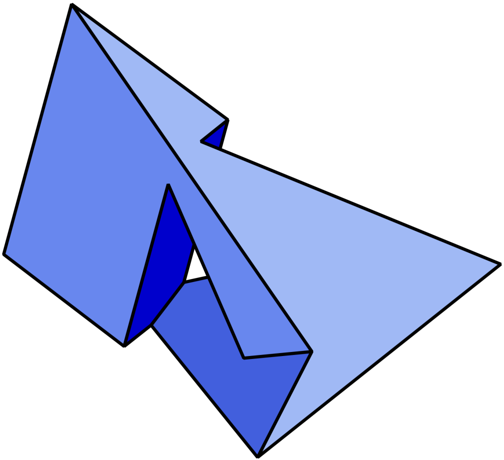
28. ábra. Harries-Wong gráf, 70 csúcs, 105 él, derékbőség 10

Egység távolságú gráf

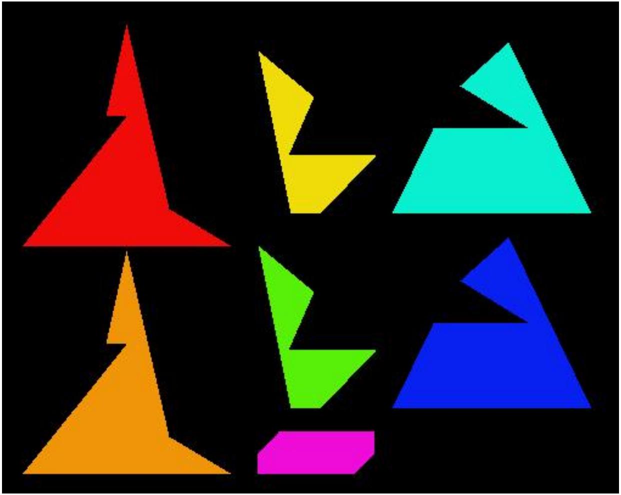
- A Heawood gráfot le lehet rajzolni a síkra úgy, hogy minden él egy egész hosszúságú szakasz legyen.
- A Heawood gráf beágyazható a tórusz felületébe úgy, hogy az élek nem metszik egymást.
- Éppen egy ilyen beágyazást jelenít meg a Szilassi poliéder. Nem konvex, topológiailag tórusz, 7 hatszögű arca van. Mindegyik arc éppen egy oldalával szomszédos a további 6 arccal.
- A tóruszon 1 "lyuk" van. Ha egy h lyukú test felületére a fenti tulajdonságú beágyazás sikerül f arccal, akkor fennáll a

$$h = \frac{(f-4)(f-3)}{12}$$

összefüggés.



29. ábra. Szilassi Lajos poliédere



30. ábra. A Szilassi poliéder színes lapjai

Ha egy poliéder 0 lyukú, vagyis topológiailag a gömbbel ekvivalens, akkor a fenti formulában a h zérus. Tehát $f = 4$, vagyis 4 lapja lehet egy megfelelő testnek. Ez a tetraéder.

A Szilassi poliéder a $h = 1$ esetet mutatja, $f = 7$. A $h = 2$ esetben az f nem egész szám! A következő - elvileg lehetséges - poliéderre $h = 6$, és $f = 12$.

Még nem konstruálták meg.

Az 1949-ben Császár Ákos által felfedezett toroidális poliéder a Szilassi poléder duálisa. Tehát 7 csúcsa van, minden csúcsnak 6 szomszédja van, vagyis a hálója a 7 pontú teljes gráf: K_7. Tehát a K_7 beágyazható a tórusz felületére.

A Császár poliéder élhálózata alkalmas bizonyos Steiner-féle háromszögrendszer megtalálására.

Egy alaphalmaz bizonyos hármasait kell úgy kiválasztani, hogy bármely kettes pontosan egy hármasban forduljon elő. Ez egy Speciális Steiner-rendszer.

Kirkman 1847-ben az iskolás lányok hármas sorokban történő sétáltatásának problémájával foglalkozott bizonyos feltételek mellett.

31. ábra. Jacob Steiner, 1796-1863

Heinrich Heesch német matematikus a világháborús évek alatt otthon dolgozott matematikai kérdéseken. Úttörő szerepe volt abban, hogy a négy színezhetőséget számítógéppel kezdték vizsgálni.

Ő volt aki a redukálhatóság fogalmával szisztematikusan élt. Algoritmust dolgozott ki és önmaga implementálta azt. Ő beszélt először az konfigurációk elkerülhetetlen halmazáról. Karl Dürre középiskolás tanár segítségét is igénybe vette

Akkor, 1964-ben Dürre az Algol 60 nyelven írt óriási terjedelmű programot. A gráfok szomszédsági mátrixát lyukkártyákon vitték be a gépbe.

32. ábra. Heinrich Heesch, 1906-1995

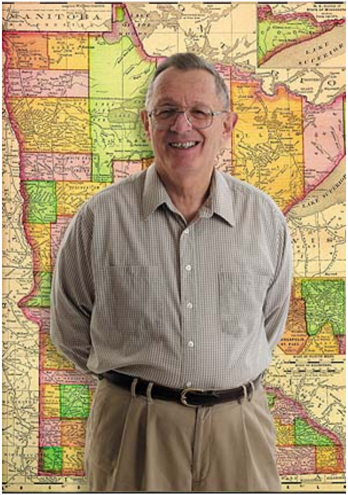
- Dürre programja megmutatta, hogy a Birkhoff diamond valóban redukálható. 1965-ben egy 9 méretű gyűrűről a program mutatta meg, hogy redukálható, korábban ez még nem volt ismert.
- Dürre disszertációjában elemezte a programjának szerepét, lehetőségeit, a kapott eredményeit.
- Mivel az Egyesült Államokban a komputerek egy kicsit fejlettebbek voltak, Heesch - Wolfgang Haken segítségével - eljutott New York-ba, Brookhavenbe. Shimamoto 1967-ben meghívta, őt is érdekelte a híres probléma.
- A CDC 6600 gépen kapott lehetőséget, ezen már a Fortran programozási nyelven írt program futott.

- Heawood,majd Oswald Veblen a térképszínezést matematikai eszközökkel próbálták vizsgálni. Elemi számelmélettel, lineáris egyenletekkel.
- Veblen fiatal kollégája volt George David Birkhoff, aki Kempe nyomán kívánt haladni, szép ideákkal jutni előbbre.
- Birkhoff nagy matematikus volt, számos területen bizonyított híres tételeket. A Poincaré-Birkhoff fixpont tételt, ergodelméleti tételt,

33. ábra. George David Birkhoff, 1884-1944

- Birkhoff munkássága nyomán Franklin 1922-ben belátta, hogy a 4-színtétel igaz, ha a tartományok száma nem több 25-nél.
- Heesch hozzájárulása a végső bizonyításhoz a "reducibility" és a "discharging" fogalmak voltak. Az utóbbi fogalom kellett ahhoz, hogy a bizonyítási kísérletek sikerrel végződjenek.
- Appel és Haken 1976-ban, amikor kihirdették a 4-színtételt megerősítették Heesch érdemeit.
- A komputeres ellenőrzés elkerülhetetlen volt 1976-ban, mivel pl. 1476 gráfot kellett megvizsgálni!

34. ábra. Wolfgang Haken,1928 -



35. ábra. Kenneth Appel, 1932 -

36. ábra. Robin Thomas

Edward R. Swart a programozó

- Appel és Haken mellett dolgozott E. R. Swart. 1957-ben a Pretoriai egyetemen végzett, majd a Ph.D. fokozatot a Witwatersrand egyetemen kapta meg D. S. Henderson irányítása alatt 1977-ben.
- A bizonyítás komoly matematikai, filozófia vitát generált. Vajon mennyire tekinthető egy bizonyítás korrektnek, ha vannak benne olyan részek, amelyeket számítógépek ellenőriztek? Szokásos volt azt gondolni, hogy minden igazi matematikai bizonyításnak szépnek, rövidnek, frappánsnak kell lennie. Azonban ezek a jelzők sem egzakt fogalmak. Több kutató megpróbált "igazi" bizonyítást adni.

37. ábra. Daniel P. Sanders

Egy modern bizonyításról!

- Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour és Robin Thomas az elmúlt években megkísérelte reprodukálni az 1976-os bizonyítást átgondolással. Nem sikerülhetett, így saját bizonyítást terveztek meg, amely a korábbi alapgondolatokat mind felhasználja.
- Minimális ellenpéldát próbáltak keresni már régóta. Megvizsgáltak 633 konfigurációt, amelyekről kiderült, hogy redukálhatók. Ilyenek a minimális ellenpéldában tehát nem lehetnek.
- Egy algoritmust használtak, amely ha egy redukálható konfiguráció egy magas összefüggőségű G síkgráfban megjelenik, akkor könnyen megad egy kisebb G' síkgráfot, melynek bármely 4-színezéséből könnyen kapható a G egy 4-színezése.

38. ábra. Niel G. Robertson

- Birkhoff 1913-ban megmutatta, hogy minden minimális ellenpélda a 4-színezhetőségre egy belülről 6-összefüggő, háromszögezett gráf. (Az "internally 6-connected" jelentése: nincs olyan C köre, amelyben több, mint 5 él megy.)
- Bebizonyították, hogy minden "belülről 6-összefüggő" háromszögezett síkgráfban felbukkan valamelyik konfiguráció a 633-ból.
- Ezt hívják az elkerülhetetlenségi bizonyításnak.

39. ábra. Paul Seymour

- Sikerült a "discharging módszert" ügyesebben alkalmazni, Appel és Haken 487 szabályt alkalmazott, míg a négy kutató 32-re csökkentette ezek számát.
- Míg az eredeti bizonyítás negyedrendű algoritmust alkalmazott, a javított négyzetes. Bár számítógépet ők is használtak, de átlátható lett a bizonyítás szerkezete.
- Formális tételbizonyító programmal később ellenőrizték

Tartalomjegyzék:

Gráf műveletek

Legyenek G és H gráfok.

Definíció

A $G + H$ diszjunkt unió az a gráf, amely a G és a H egy-egy példányának diszjunkt uniója.

Definíció

A G és H egyszerű gráfokra a $G \vee H$ a $G + H$-ból származtatható, ha összekötünk minden $u \in G$ és $v \in H$ csúcsot egyetlen éllel.

Definíció

A $G \boxdot H$ Cartesian szorzat csúcshalmaza $V(G) \times V(H)$ és $u \in V(G)$, $v \in V(H)$ esetén ((u,v),(u',v')) pontosan akkor él, ha vagy $u = u'$ és $(v, v') \in E(H)$; vagy $(u, u') \in E(G)$ és $v = v'$.

Feladatok

Feladat

1. $\chi(G + H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$

Feladat

2. $\chi(G \vee H) = \chi(G) + \chi(H)$

Feladat

3. $\chi(G \times H) = max\{\chi(G), \chi(H)\}$

Feladat

4. Legyen C_n egy n hosszú kör, r egynél nagyobb, s pozitív egész. Mutassuk meg, hogy $\chi(C_{2r+1} \vee K_s) = s + 3$, míg $\omega(C_{2r+1} \vee K_s) = s + 2$!

Feladat

5. Igazoljuk, hogy G pontosan akkor m-színezhető, ha $\alpha(G \times K_m) \geq |V(G)|$!

Feladat

6. Legyen G egy olyan gráf, amelyben bármely két páratlan körnek van közös pontja.
Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$!

Egyenesek a síkon

Feladat

7. Adott n egyenes a síkon. Az általuk meghatározott síkrészeket színezzük ki úgy, hogy bármely szakasz két oldalán eltérő színű (korlátos vagy korlátlan) ország legyen. Vajon legaláb hány szín szükséges egy ilyen kiszínezéshez?

Feladat

8. Az előző feladatban keletkezett ábrán most a (korlátos vagy korlátlan) szakaszokhoz rendeljünk színeket. Egy szakasz alatt két, egyenesen szomszédos metszéspont közötti részt, vagy olyan félegyenest értünk, amely egy metszéspontból indul. Hány szín szükséges a szakaszok kiszínezéséhez, ha egy metszésponthoz illeszkedő szakaszok más-más színt kell, hogy kapjanak?

Feladat

9. Színezzük a metszéspontokat az ábrán, de egy szakasz két végpontja nem lehet egyszínű. Hány színt kell használnunk?

Feladat

10. Legyenek az egyenesek a síkon általános helyzetűek, vagyis bármely kettő metszi egymást és nincs olyan metszéspont, amelyen kettőnél több egyenes menne keresztül. Hány színnel lehet kiszínezni a csúcsokat és az éleket, ha két illeszkedő elem nem lehet azonos színű? (Tehát szomszédos csúcsok, szomszédos élek és egy él és a végpontja nem lehet egyszínű.)

Feladat

11. Mi a válasz, ha a csúcsokat és a tartományokat színezzük, és két szomszédos ország, két szomszédos csúcs és egy ország és a csúcsa nem lehet azonos színű?

Melyik kérdés nehéz?

Feladat

12. Színezzük az országokat és a szakaszokat. Egy szakasz nem lehet azonos színű azon országokkal, amelyekkel nem csak csúcsban érintkezik. Hány szín kell minimum?

Feladat

13. Mi a totális kromatikus száma az utóbbi feladatokban vizsgált gráfoknak?

Feladat

14. A sakktábla mezőit szeretnénk kiszínezni oly módon, hogy az egymástól huszárlépésnyire lévő mezők színe más legyen. Hány színt kell feltétlenül használnunk?
Mi a válasz, ha a ló táltos és menetmódja nem (1,2), hanem (2,3)?

Irányítás és színezés

Feladat

15. Ha a G gráfnak a D egy irányítása, és a leghosszabb irányított út hossza $l(D)$, akkor van G-nek olyan jó színezése, amely $l(D)+1$ színt használ. Létezik olyan D' irányítás, amelyre $l(D')=\chi(G)-1$. A G egy másik y csúcsára legyen g(y) a g(W) maximuma, ahol a maximumot az x–y közötti W sétákra vesszük.

a) Igazoljuk, hogy g(y) véges és jól definiált, valamint a g(y) használható a G egy jó $r(D)+1$ színezésére.
Tehát a G $r(D)+1$ színezhető.

b) Bizonyítsuk be azt is, hogy

$$\chi(G)=\min_D(r(D)+1),$$

ahol a D végigfut az összes irányított körmentes irányításon.

Feladat

16. Legyen G hurokél nélküli összefüggő gráf és legyen D egy körmentes irányítása. Legyen $r(D) = \max_C \lceil \frac{a}{b} \rceil$*, ahol C egy kör G-ben, a a C előremenő, b a C hátramenő éleinek számát jelöli. Vegyünk egy x csúcsot V(G)-ből és legyen W egy x-ből kiinduló séta. Legyen* $g(W) = a - b \times r(D)$*, ahol a jelöli a sétában előremenő élek számát, míg b a hátramenő élek számát (természetesen ez az a és b más, mint a C esetében).*

Feladat

20. A sík pontjait kiszíneztük pirossal vagy kékkel. Legyen d egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy van a kiszínezett síkon két azonos színű pont, amely d távolságra van.

Feladat

21. A sík pontjait kiszíneztük pirossal vagy kékkel. Legyen d egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy legalább az egyik állítás fennáll:
a) A P ponthoz van vele azonos színű pont d távolságra
b) A P pont egy 2d hosszú, egyszínű végpontú szakasz felezőpontja.

Feladat

22. A sík pontjait kiszíneztük pirossal vagy kékkel. Legyen d egy pozitív szám. Igaz-e, hogy legalább az egyik állítás fennáll:
a) A P ponthoz van végtelen sok, vele azonos színű pont d távolságra
b) A P pont végtelen sok 2d hosszú, egyszínű végpontú szakasz felezőpontja.

Feladat

23. Ki tudjuk-e színezni a sík pontjait két színt felhasználva úgy, hogy ne legyen két különböző színű pont 1 távolságra?

Feladat

24. Ki tudjuk-e színezni a sík pontjait három színt felhasználva úgy, hogy ne legyen két különböző színű pont 1 távolságra?

Feladat

25. A sík pontjait kiszíneztük 3 színnel. Legyen d egy pozitív szám. Igazoljuk, hogy van a kiszínezett síkon két azonos színű pont, amely d távolságra van.

Feladat

26. Ki lehet-e színezni a számegyenes pontjait 2 színnel úgy, hogy ne legyen egyszínű végpontú 1-szakasz?

Feladat

27. Ha a számegyenest pirossal és kékkel kiszínezzük, akkor lehet találni olyan három azonos színű pontot, amelyek számtani sorozatot alkotnak! (A középső, a két szélső pont szakaszának felezőpontja.)

Feladat

28.⋆ Ki lehet-e színezni a számegyenes pontjait 3 színnel úgy, hogy ne legyen olyan szakasz, amelynek a végpontjai és a közepe is azonos színű?

Feladat

29. A síkot két színnel színezve mindig létezik egyenlő oldalú háromszög, amelynek három csúcsa egyszínű!

Feladat

30. Egy végtelen szabályos háromszögrács csúcsait 2 színnel kiszínezzük. Van-e biztosan egyszínű csúcsokkal rendelkező egyenlő oldalú háromszög?

Feladat

31. Van-e a síknak olyan 3-színezése, hogy bármely egyenesről hiányzik az egyik szín?

Feladat

32. Létezik-e a végtelen négyzetrács csúcsainak olyan 3-színezése, hogy bármely két rácspontot összekötő egyenes legfeljebb két színű rácspontot tartalmazzon?

Feladat

33. Létezik-e a végtelen szabályos háromszögrács csúcsainak olyan 3-színezése, hogy bármely két rácspontot összekötő egyenes legfeljebb két színű rácspontot tartalmazzon?

Feladat

34. Ki lehet-e színezni a síkot 2 színnel úgy, hogy bármely téglalap négy csúcsa között legyen mindkét színű?

Feladat

35. ⋆ Ki lehet-e színezni a síkot 2 színnel úgy, hogy bármely négyzet négy csúcsa között legyen mindkét színű?

Feladat

36. ⋆ Ki lehet-e színezni egy végtelen négyzetrácsot 2 színnel úgy, hogy bármely négyzet négy csúcsa között legyen mindkét színű?

Feladat

37.⋆ Ki lehet-e színezni egy végtelen négyzetrácsot k színnel úgy, hogy bármely téglalap négy csúcsa között legyen mindkét színű?

Megoldások

Megoldás (Gallai Tibor, 1968, Roy, 1967, Vitaver, 1962)

15. Valóban ha a G gráfot kiszínezzük az $\{1, \ldots, \chi(G)\}$ *színnel, akkor irányíthatjuk úgy, hogy minden él a kisebb sorszámú színű végétől a nagyobb felé legyen irányítva. Ekkor a leghosszabb út hossza legfeljebb* $\chi(G) - 1$*.*

Másrészt tekintsük a maximális, irányított körmentes D' részgráfját a D-nek. Ez a D minden csúcsát tartalmazza, hiszen ha csak egyetlen él köti be a v csúcsot, akkor kört biztosan nem hoz létre. Tehát $V(D') = V(D) = V$ *A D'-ben minden* $v \in V$ *csúcsra nézzük meg milyen hosszú a leghosszabb v-ben végződő út! Rendeljük ezt a hosszat - mint színt - a v csúcshoz! Nem nehéz látni, hogy bármely irányított úton haladva a színek szigorúan nőnek.*

Megoldás

Vegyünk a D-ben egy tetszőleges $(u, v) \in A(D)$ *irányított élt! A D'-ben biztosan megy az u és a v között út, hiszen vagy maga az (u,v) él be van húzva a D'-ben, vagy ha behúznánk, akkor a D'-ben lenne irányított kör.*
De ekkor léteznie kell egy irányított útnak v-ből u-ba! Ezen az úton haladva szigorúan nőnek a színek, vagyis u és v biztosan nem egyszínűek.

Megoldás

20. Vegyünk egy szabályos, d oldalú háromszöget. Valamelyik oldal két végpontja egyszínű.

Megoldás

22. Vegyük a P pont körüli d sugarú kört. Ha a körvonalon van végtelen sok olyan pont, amely a P-vel azonos színű, akkor rendben van, a) teljesül. Ha nem így van, akkor csak véges sok pont azonos színű a P-vel, így létezik végtelen sok átellenes pontpár a körön, amelyek P-vel ellentétes színűek, tehát egymással azonosak.

Megoldás

25. Készítsünk két szabályos, 1 oldalú háromszögből egy rombuszt azzal, hogy a két háromszög egy-egy oldalát egyesítjük. Vegyünk két ilyen rombuszt, ABDC-t és AEGF-et! Egy-egy 60°-os csúcsukat egyesítettük, és még a DG szakasz is 1 hosszú legyen. Ha pl. az A kék, akkor ha el akarjuk kerülni az egyszínű 1 hosszú szakaszt, akkor a B és a C nem kék és más-más színű. De ekkor a D csak kék lehet, mert összesen 3 szín van. De ugyanígy következik, hogy a G is kék. De így mégis lett egy azonos végpontú 1-szakasz! Az elkészített ábra megtalálható az egyik dián, bizonyítva, hogy sík kromatikus száma nagyobb, mint 3.

Vajon létezik-e hasonló konstrukció, amely kikényszeríti 5 szín használatát, ha az 1-távolságú pontok nem lehetnek azonos színűek?

Megoldás

27. Próbáljunk többet igazolni! Bizonyítsuk be, hogy a számegyenesen az 1,2,3,4,5,6,7,8,9 pontokat sem lehet két színnel úgy megszínezni, hogy ne legyen 3 tagú számtani sorozatot alkotó egyszínű hármas!

Megoldás

34. Tekintsük a négyzetrácsnak egy 3, egymást követő vízszintes és 9 egymás melletti függőleges rácsegyenesét. Már ebből a keletkezett 27 rácspontból is biztosan találunk 4 egyszínűt, amelyek téglalapot határoznak meg! Van ugyanis két olyan függőleges hármas amely egyforma mintát mutat a vízszintesekkel vett metszetében. Így ezen a két egyenesen a három pontból kiválasztjuk a két-két egyforma színűt, amelyek éppen egy téglalap csúcsai.

Megoldás

37. Nem. Mindig találunk egyszínű téglalapot! Tekintsünk egy $N \times N$ *méretű részrácsot.*

Tartalomjegyzék:

Monoton részsorozat

Tétel

Legyen az a_i $(n^2 + 1)$ *tagú, különböző pozitív egészekből álló sorozat.*
Létezik az a_i*-nak* $(n + 1)$ *hosszú monoton részsorozata.*
Erdős Pál, Szekeres György

Bizonyítás

Jelöljük l_i-vel az a_i-vel kezdődő leghosszabb növekvő részsorozat hosszát. Ha $l_i \geq n+1$ valamely i-re, készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy $l_i \leq n$ minden egyes $1 \leq i \leq n^2+1$ esetén. Mivel mindegyik l_i hosszúság 1 és n között van, így a skatulya elv szerint van olyan $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ melyhez van $n+1$ olyan i érték amelyre l_i éppen j-vel egyenlő. Jelölje ezeket $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_{n+1}}$, ahol $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$. Szemeljük ki az $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n+1}}$ részsorozatot!. Állítjuk, hogy ez egy csökkenő részsorozat. Valóban, hiszen ha $a_{i_k} < a_{i_{k+1}}$ lenne valamely k-ra, akkor létezne egy a_{i_k}-val induló növekvő részsorozat, amely hosszabb j-nél, hiszen van $a_{i_{k+1}}$-val kezdődő j hosszú részsorozat.

Egy síkbeli példa

Színezzük ki a koordinátasík rácspontjait pirossal és kékkel. Mutassuk meg, hogy mindig található olyan téglalap, melynek minden csúcsa azonos színű rácspont.

Ötlet:
Elegendő, ha csak kilenc vízszintes és három függőleges rácsegyenes 27 metszéspontjára koncentrálunk.

van der Waerden tétele

Tétel

Minden pozitív k és r egészekhez létezik olyan legkisebb $w(k, r)$ pozitív egész, melyre igaz, hogy akárhogyan színezzük is ki r színnel az $[1, w(k, r)]$ intervallum egészeit, találunk azonos színű, k hosszú számtani sorozatot.
van der Waerden, 1927

van der Waerden tétele

$w(2, r) = r + 1$
$w(3, 2) = 9$; $w(3, 3) = 27$; $w(3, 4) = 76$
$w(4, 2) = 35$
$w(5, 2) = 178$

Miért nem ismert a többi érték?
$w(3, 5) =?$ $w(3, 5) \leq 100?$
Ha számítógéppel ellenőrizni akarjuk vajon az $[1, 100]$ számok mindegyik 5-színezése tartalmaz-e egyszínű 3 tagú számtani sorozatot, akkor $5^{100} \approx 8 \times 10^{69}$ színezést kell megvizsgálnunk.

Esetleg egy jó elképzelés segíthet!

Általánosított van der Waerden számok:
$w(k_1, k_2, \ldots, k_r; r)$ hasonlóan definiálhatók.

Általánosított van der Waerden számok

r	k_1	k_2	k_3	k_4	w
3	3	3	3	-	27
3	4	3	2	-	21
3	4	3	3	-	51
3	4	4	2	-	40
3	4	4	3	-	84
3	5	3	2	-	32
3	5	3	3	-	77
3	5	4	2	-	71
3	6	3	2	-	40
4	3	3	2	2	17
4	3	3	3	2	40
4	3	3	3	3	76
4	4	3	2	2	25
4	4	3	3	2	60
4	4	4	2	2	53
4	5	3	2	2	43

Schur tétele

Bármely $r \geq 1$-re létezik olyan $s = s(r)$ legkisebb pozitív egész, melyre az $[1, s]$ tetszőleges r-színezése esetén létezik egyszínű megoldása, az $x + y = z$ egyenletnek.
Issai Schur, 1916

$s(1) = 2$; $s(2) = 5$; $s(3) = 14$; $s(4) = 45$; $s(5) = ?$

Általánosítások

”Rengeteg megoldatlan probléma van és további érdekes, új kérdéseket sokkal könnyebb felvetni, mint a meglévőket megoldani.”
F. Harary

Richard Rado

Definíció

Az $r \geq 1$ egészre egy ϵ lineáris egyenletet r-regulárisnak nevezünk, ha létezik $n = n(\epsilon; r)$, melyre az $[1, n]$ minden r-színezése esetén létezik ϵ-nak monokromatikus megoldása. Regulárisnak, ha minden $r \geq 1$ esetén r-reguláris.

Schur tétele: Az $x + y = z$ egyenlet reguláris.

Tétel

(Rado egy egyenletre vonatkozó tétele.) Legyen az ϵ lineáris egyenlet alakja $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, ahol $c_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén. Ekkor ϵ pontosan akkor reguláris, ha a c_i együtthatók valamely nemüres részhalmazában az elemek összege 0.

$$w(3, r) \leq \left(\frac{r}{4}\right)^{3^r}$$

$$s(r) \leq R_r(3) - 1$$

un-Schur probléma

Tétel

Ha az $[1, 3n]$ *számokat úgy színezzük ki három színnel, hogy mindegyik színosztály ugyanakkora, akkor az* $x + y = z$ *egyenletnek létezik olyan megoldása, hogy az* x, y *és* z *páronként eltérő színű.*
Alekseev, Savchev, 1987

Az ilyen megoldást hívják szivárvány megoldásnak.
Erdős és Szekeres kérdezte, vajon mennyire gyengíthető a színosztályok méretére vonatkozó feltétel.

un-Shur és un-van der Waerden eredmények

Tétel

Az $[1, n]$ *bármely 3-színezésére, ha mindegyik színosztály nagyobb mint* $\frac{n}{4}$*, akkor az* $x + y = z$ *egyenlet rendelkezik szivárvány megoldással.*
Az $\frac{n}{4}$ *érték nem javítható.*
Schönheim, 1990

Sejtés

Az $[1, 3n]$ *számok minden egyenletes 3-színezésére létezik szivárvány* $AP(3)$*, vagyis az* $x + y = 2z$ *egyenletnek olyan megoldása, amelyben az* x*,* y *és* z *különböző színű. Radoičić*

Sejtés

Minden $n \geq 3$ egészre az $[1, n]$ minden 3-színezése esetén, ha mindegyik színosztály nagyobb mint $r(n)$, ahol

$$r(n) := \begin{cases} \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor & \mathit{if}\ n \not\equiv 2 \pmod 6 \\ \frac{n+4}{6} & \mathit{if}\ n \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}$$

található szivárvány $AP(3)$ részsorozat.
Jungić, Licht, Mahdian, Nešetřil, Radoičić, 2003

Tétel

Az $\mathbb{N}$ természetes számok bármely 3-színezésére, ha a színosztályok felső sűrűsége nagyobb, mint $\frac{1}{6}$ található tarka $AP(3)$.

Tétel

Van az $\mathbb{N}$ halmaznak olyan szivárvány $AP(3)$-mentes 3-színezése, hogy minden n-ig a legkisebb színosztály mérete $\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor$.

Bizonyítás

Tekintsük az $\mathbb{N}$ következő színezését:

$$c(i) := \begin{cases} \textbf{piros} & \textit{if } i \equiv 1 \pmod 6 \\ \textbf{fehér} & \textit{if } i \equiv 4 \pmod 6 \\ \textbf{zöld} & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

A fehér színosztály $\left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor$ *elemű.*

PZZFZZPZZFZZPZZFZZ...

A színezés módszere nem függ a vizsgált prefix hosszától.

Periódikus színezés.

A sejtés nem javítható!

Tétel

Minden $n \geq 3$-ra létezik szivárvány-mentes 3-színezése $[1, n]$-nek, amelyben a legkisebb színosztály elemszáma éppen $r(n)$.

$$c(i) := \begin{cases} \textbf{piros} & \text{if } i \equiv 1 \pmod 6 \\ \textbf{fehér} & \text{if } i \equiv 4 \pmod 6 \\ \textbf{zöld} & \text{egyébként.} \end{cases}$$

PZZFZZ|PZZFZZ|PZZFZZ

A színezés periódikus.

Bizonyítás

Ha $n \not\equiv 2 \pmod 6$, akkor az előző általános színezés jó. Az $n = 6k + 2$ esetben legyen c a következő:

$$c(i) := \begin{cases} \textbf{piros} & \text{ha } i \leq 2k+1 \text{ és } i \text{ páratlan}, \\ \textbf{fehér} & \text{ha } i \geq 4k+2 \text{ és } i \text{ páros}, \\ \textbf{zöld} & \text{egyébként}. \end{cases}$$

A legkisebb színosztály mérete $k + 1 = \left\lfloor \frac{n+4}{6} \right\rfloor$.

PZPZPZZZZFZFZF

PZPZPZPZZZZZZFZFZFZF

A P és az F egy tarka $AP(3)$-ban csak a két szélen lehetne a hosszú középső Z blokk miatt.

Másrészt bármely P és F páratlan távolságra van, tehát nincs közöttük félúton egy Z!

Több színnel elkerülhető a szivárvány!

Mit mondhatunk akkor, ha az $[1, n]$ számokat $k \geq 5$ színnel, szivárvány $AP(k)$ nélkül szeretnénk kiszínezni?

Az $n = 2mk$ alakú hosszakra létezik egyenlő méretű színosztályokkal is szivárvány $AP(k)$ nélküli színezés. Jelölje $S_1, \ldots, S_k$ az n felosztását k egymást követő, egyenlő hosszú részre. Legyen $t = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

$$c(i) := \begin{cases} \text{j} & \text{ha } i \in S_j \text{ és } j \neq t,\ j \neq t+2 \\ \text{t} & \text{ha } i \in S_t \cup S_{t+2} \text{ és } i \text{ páros,} \\ \text{t+2} & \text{ha } i \in S_t \cup S_{t+2} \text{ és } i \text{ páratlan.} \end{cases}$$

11|42|33|42|55
$k = 5, m = 1$

11111111|42424242|33333333|42424242|55555555
$k = 5, m = 4$

11111111|22222222|53535353|44444444|53535353|66666666
$k = 6, m = 4$
A t és $t + 2$ színű elemek páronként páratlan távolságra vannak, emiatt közöttük nem lehet páratlan sok szám a számtani sorozatban. Így t és $t + 2$ nem lehet másik blokkban. Ha egy blokkban vannak, akkor a legtávolabbi szín nem érhető el.

Egy szivárvány $AP(4)$ nélküli színezés.

$n = 10m + 1$,
három színből 2m-et használunk, egyikből (4m+1)-et.

AB|AC|CCC|DC|DB

ABAB|ACAC|CCCCC|DCDC|DBDB

ABABAB|ACACAC|CCCCCCC|DCDCDC|DBDBDB

Szivárvány négy szín sejtés?

Elkerülhető-e a szivárvány $AP(4)$, ha az $[1, 4n]$-et 4 színnel, mindegyikből n-et felhasználva színezzük ki?
Axenovich, Fon-Der-Flaass (2003)

Tétel

Minden pozitív $n = 8m$ alakú hosszra létezik szivárvány $AP(4)$ nélküli színezés egyenlő színosztályokkal.

ABCCDDAB

Ebben nincs tarka $AP(4)$.
És ha többszörözzük?

ABCcDDaB|AbCCdDAB
Már van. A második felében cseréljük ki a C-t a D-vel!
ABCCDDAB|ABDDCCAB

Ez jó. És ha többszörözzük?

ABCCDDAB|ABDDCCAb|ABcCDdAB|aBDDCCAB

Külön probléma a ciklikus eset! Ugyanazokra a kérdésekre mi a válasz, ha egy körre írjuk a számokat?

Definíció

Legyen $W = (ABCC)^m(DDAB)^m$ *!*

A W egy $8m$ hosszú, szivárvány $AP(4)$ nélküli színezés.

Mit ad tükrözés módszere?

1. Egyéb hosszakra van-e $U^m V^m$ alakú $2pm$ hosszú jó szó, melyben az U egy p hosszú szó, míg a V-t úgy kapjuk az U-ból, hogy megfordítjuk majd az A-t a B-vel, a C-t a D-vel kicseréljük?

2. Az U és V tetszőleges, de mindegyikből hiányzik legalább egy szín. Ebben az esetben egy konstrukció ellenőrzésekor elég olyan $AP(4)$-eket megnézni, amelyeknek egyaránt van eleme egy U-ban is és egy V-ben is.

3. Az U és a V tetszőleges, csak a W egyenletesen legyen kiszínezve négy színnel.

Hivatkozások:

- Gráfok színezése
- Síkgráfok
- Duális gráf
- A négyszíntétel
- Az ötszíntétel
- Formális bizonyítás
- Mohó színezés

- Martin Gardner és a Snark
- Snark tétel
- Szekeres György
- A Happy Ending Problem
- Bizonyítás számítógéppel
- A négyszínsejtés tényleg igaz
- Elképzelés és megoldás

- Erdős Pál és Dirac Gábor
- Kromatikus kritikus gráfok
- Független csúcshalmazok kritikus gráfokban
- Sajátértékek és a kromatikus szám
- A kromatikus polinom
- A Tutte-polinom
- Egy diplomamunka a polinomokról

- Bennet Manvel, Extremely Greedy Coloring Algorithms in Graphs and Applications (Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory, 1982), Frank Harary and John S. Maybee (Eds.) 257-270, 1985.
- Bollobas, B., Uniquely colorable graphs, J. Combin. Theory Ser. B 24 (1978).
- Bondy, J. A., Bounds on the chromatic number of a graph, J. Combin. Theory 7 (1969) 96-98.

- Brooks, R. L., On coloring the nodes of a network, Proc. Cambridge Phil. Soc. 37 (1941) 194-197.
- G. Campers and O. Henkes and J. P. Leclerq Graph Coloring Heuristics: A Survey, Some New Propositions and Computational Experiences on Random and Leighton's Graphs in Operational Research '87 (Buenos Aires, 1987) 917-932, 1988.
- Chartrand, G. and Geller, D., Uniquely colorable graphs, J. Combin. Theory 6 (1969) 271-278.

- Dharwadkar, A., A new proof of the four color theorem, http://www.geocities.com/ (2002).
- Dirac, G. A., A property of 4-chromatic graphs with some remarks on critical graphs, J. London Math. Soc 27 (1952) 85-92.
- Erdos, P. and Fajtlowicz, S., On the conjecture of Hajos, Combinatorica 1 (1981) 141-143.

- Fary, I., On straight line representation of planar graphs, Acta Sci. Math. 11 (1948) 229-233.
- Grunbaum, B., Grotzschs Theorem on 3-colorings, Michigan Math. J. 10 (1963) 303-310.
- Gupta, R. P., Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs, in W. T. Tutte (ed.), Recent Progress in Combinatorics, Acad. Press, New York 1969 (229-235).

- Harary, F. and Hedetniemi, S., The achromatic number of a graph, J. Combin. Theory B (1970) 154-161.
- Heawood, P. J., Map color theorem, Qurat. J. Pure Appl. Math. 24 (1890) 332-338.
- Kempe, A. B., On the geographical problem of the four colors, Amer. J. Math. 2 (1879) 193-200.
- Korman, The Graph-Colouring Problem in Combinatorial Optimization, Christofides, Mingozzi, Toth and Sandi Editors, 211-235, 1979.

- S. K. Miner, S. Elmohammed, and H. W. Yau, Optimizing timetabling solutions using graph coloring, 1995 NPAC REU Program, NPAC, Syracuse University, 1995.
- Ore, O., The Four Color Problem, Acad. Press, New York (1967).
- T. A. Redl, A Study of University Timetabling that Blends Graph Coloring with the Satisfaction of Various Essential and Preferential Conditions, Ph.D. Thesis, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University, May 2004, 159 pages.

- Ringel, G. and Youngs, J. W. T., Solution of the Heawood map coloring problem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 60 (1968) 438-445.
- Robertson, N., Sanders, D. P., Seymour, P. D. and Thomas, R., The four color theorem, J. Combin. Theory Ser. B. 70 (1997) 2-44.
- Saaty, T. L., Thirteen colorful variations on Guthrie's four color conjecture, Amer. Math. Monthly 79 (1972) 2-43.
- Saaty, T. L. and Kainen, P. C., The Four Color Problem, McGraw Hill, New York (1977).
- Szekeres, G. and Wilf, H. S., An inequality for the chromatic number of a graph, J. Combin. Theory 4 (1968) 1-3.

- Tait, P. G., Remarks on the coloring of maps, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 10 (1880) 501-503, 729.
- Vizing, V. G., The chromatic class of a multigraph, Cybernetics 3 (1965) 32-41.
- Welsh, D. J. A. and Powell, M. B., An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to time-tabling problems, Comput. J. 10 (1967) 85-86.
- Whitney, H., Planar graphs, Fund. Math. 21 (1933) 73-84.