Írta:
GERZSON MIKLÓS

MÉRÉSELMÉLET

Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2011

LEKTORÁLTA: Jancskárné Dr. Anweiler Ildikó, PTE Pollack Mihály Műszaki és Informatikai Kar Műszaki Informatika Tanszék

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.

ISBN 978 963 279 502 7

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Gerner József

KULCSSZAVAK:

mérés és modellezés, a mérés fogalmának általánosítása, rendszer- és jelelmélet alapjai, mérő rendszerek struktúrája, a mérési hibák fogalma, típusai, a mérési hibák terjedése, a mérési adatok elsődleges feldolgozása.

ÖSSZEFOGLALÁS:

A Méréselmélet tárgy a mérnöki informatikus és a villamosmérnök alapszakos hallgatóknak egyaránt kötelező szakmai alapozó tárgyként szerepel a tantervben. E jegyzet célja elsősorban a tantervben előírt teljes anyag áttekintése, segítve ezzel a hallgatóknak az elméleti alapok elsajátítását. A Méréselmélet jegyzet, követve a hasonló megnevezésű tárgy tematikáját részletesen tárgyalja a mérés és modellezés kapcsolatát, a mérés fogalmának általánosítását, a rendszer- és jelelmélet alapjait, a mérő rendszerek struktúráját, a mérési hibák fogalmát, a mérési hibák terjedését a számítások során, illetve a mérési adatok elsődleges feldolgozásának menetét.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A Méréselmélet tárgy a mérnök informatikus és a villamosmérnök alapszakos hallgatóknak egyaránt kötelező szakmai alapozó tárgyként szerepel a tantervben. E jegyzet célja elsősorban a tematikában megadott témakörök áttekintése, segítve ezzel a hallgatóknak az elméleti alapok elsajátítását.

A Méréselmélet jegyzet, követve a tárgy tematikáját részletesen tárgyalja a mérés és modellezés kapcsolatát, a mérés fogalmának általánosítását, rendszer- és jelelmélet alapjait, a mérőrendszerek struktúráját, a mérési hibák fogalmát, a mérési hibák terjedését számítások során, illetve a mérési adatok elsődleges feldolgozásának menetét.

A jegyzet a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A program keretében készült, a szerző köszöni a jegyzet elkészítéséhez nyújtott támogatást. Bár a kézirat leadásakor a jegyzetírás folyamatának egy lépése lezárul, de a szerző előre is köszöni a jegyzet használóinak, oktató kollégáknak és hallgatóknak egyaránt a visszajelzést, hogy egy újabb kiadásban a bevezetőben megfogalmazott cél, tehát a méréselmélet alapjainak készség szintű elsajátítása még inkább megvalósulhasson.

Veszprém, 2011. március 31.

Gerzson Miklós
Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar

1. fejezet

Mérés és modellezés

A mérnöki tevékenység egyik alapeleme a mérés. A mérés alapvető célja tárgyak, jelenségek, lejátszódó folyamatok megismerése. Ebben az értelemben a mérés természetesen kötődik a mindennapos emberi tevékenységhez, de műszaki értelemben mégis több annál, hiszen a mérnök a megismert folyamat számszerű nagyságát, mennyiségét vagy mértékét pontosan akarja meghatározni. Ha ebből a szempontból vizsgáljuk a mérést, akkor azt tervszerűen végzett tevékenységnek kell tekinteni, melynek előkészítése, tervezése során rögzíteni kell a vizsgálat szempontjából lényeges körülményeket, jellemzőket. Ezeknek a jellemzőknek a kiválasztásában, tehát a mérési folyamat tervezésében kap szerepet a modellezés.

Ebben a fejezetben a modellezéshez, a modelleknek a mérés folyamatában betöltött szerepéhez kapcsolódó fogalmakat tekintjük át röviden. Kitérünk arra is, hogy hogyan lehet a modellezés segítségével a mérést általánosítani annak érdekében, hogy közvetlenül nem számszerűsíthető mennyiségeket is meg tudjunk határozni.

1.1. A modell fogalma

Modelleket széles körben alkalmazunk az emberi tevékenység, gondolkodás során. Segítségükkel tudjuk a valóság egy részét kiemelni, a lejátszódó jelenségeket leegyszerűsíteni, illetve a megszerzett ismereteket rögzíteni, átadni. Nyilvánvaló, hogy egy jelenségnek számos modellje lehetséges, a modellezés céljától, a rendelkezésre álló ismeretektől, eszközöktől, illetve a modellt készítő személyétől függően. A műszaki, tudományos munka során létrehozott modellek esetében a szubjektív jelleg korlátozott, hiszen ezek a modellek általánosan elfogadott fizikai, kémiai és gazdasági törvényeken alapulnak, valamint a matematikát alkalmazzuk leíró eszközként. A műszaki gyakorlatban a modellek többek közt a mérési folyamat tervezésében és kivitelezésében is fontos szerepet játszanak. Modellek segítségével:

- rögzítjük a megfigyelés szempontjából lényeges jellemzőket,
- határozzuk meg a megfigyelés körülményeit,
- végezzük el magát a megfigyelést,
- és értékeljük ki a kapott eredményeket.

A modellek egy lehetséges, a megjelenési formájuk szerinti csoportosítása a következő:

Funkcionális modellek A modellek e csoportjában a leírt rendszer objektumai idealizált funkciójuk alapján jelennek meg. Ilyen modellek például az áramköri rajzok, ahol az elektronikai elemek szimbólumait használjuk, vagy programok blokkvázlatai, vagy maguk a leírt programok, melyek az elvégzendő utasítások szimbólumait tartalmazzák. Mérési feladatok során a funkcionális modellek elsősorban a tervezési fázisban kapnak szerepet. Segítségükkel rögzítjük a kialakítandó mérőkör felépítését, a műszerezés elrendezését.

Fizikai modellek A fizikai modellek közé tartoznak a valós rendszerek, tárgyak kicsinyített, nagyított vagy akár ugyanolyan méretű, de egyszerűsített másai. Alkalmazásuk célja egyaránt lehet előzetes információk szerzése a vizsgált rendszerről, vagy akár a mérés elvégzése. A fizikai modellek egy speciális csoportját alkotják az analóg modellek, melyeknél a vizsgált rendszer fizikai törvényszerűségeit modellezzük egy jellegében más, de viselkedésében hasonló fizikai elemeket tartalmazó modell segítségével. Ilyenre lehet példa hidraulikus rendszerek áramköri modellje.

Matematikai modellek A matematikai modellek alkotják a tudományos, műszaki tevékenység során alkalmazott modellek legszélesebb csoportját. Bár a matematikai modellek elsősorban az ismeret rögzítésében, átadásában, az a kapott adatok értelmezésében, az eredmények kiértékelésében kapnak szerepet, de van arra is példa, amikor a vizsgált rendszer matematikai modellje közvetlenül jelen van a mérési folyamatban. A matematikai modellek sokrétű ismeretanyagot képesek rögzíteni. Az egyenletek típusát a leírt rendszerben érvényes törvények, törvényszerűségek határozzák meg. Az egyenletek száma, valamint a bennük szereplő tagok száma a vizsgált rendszer objektumaitól, illetve a figyelembe vett kapcsolatoktól függ. A vizsgálat célkitűzéseinek megfelelően eldöntjük, hogy a rendszer jellemzői közül a megfigyelés során melyeket tekintjük változónak, illetve konstansnak. A változók tovább csoportosíthatók függő és független változókra, vagyis meghatározhatjuk, hogy adott körülmények között melyek lesznek a bemenő és kimenő jellemzők. Ezek az információk általában egy adott időpontra vonatkozó statikus ismeretet rögzítenek a vizsgált rendszerre vonatkozóan, de természetesen szükség van a működés időbeli lefolyásának ismeretére is. Ezt a tudást az állapot bevezetésével adhatjuk hozzá a modellhez. Az állapot a rendszerben fellépő kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó viszonyait megadó információk összessége. Megadásához ismerni kell a rendszer belső szerkezetét, az elemek közötti kapcsolatokat, tehát a rendszer struktúráját, másrészt az összefüggések mennyiségi viszonyait leíró paramétereket.

A felsorolt modelltípusok közül annak megfelelően választunk, hogy melyek a megismerési folyamat célját tekintve lényeges vonások, mekkora a rendelkezésre álló ismeretanyag, és melyek az alkalmazható modellezési eljárások.

Bármelyik típusú modellt is választjuk, a modell elkészítésének első lépése a vizsgált rendszer *határainak megállapítása*. A rendszer határainak meghatározásához egyrészt el kell tudnunk dönteni, hogy hol van a választóvonal a rendszer és a környezete között, másrészt, amennyiben szükséges és lehetséges, akkor a vizsgált rendszert fel kell bontani alrendszerek és elemek halmazára, vagyis meg kell határozni a rendszer elemei közötti belső határokat. Ennek a dekomponálási folyamatnak a mélységét a modellezés célja és a rendelkezésre álló ismeretanyag határozza meg.

A körülhatárolás után meg kell vizsgálnunk, hogy a rendszer és a környezete, valamint a rendszerben meghatározott elemek között milyen kapcsolatok léteznek, és ezeknek a vizsgálat szempontjából mi a szerepük. Ezt a műveletet a kapcsolatok közötti *szelekció*nak vagy válogatásnak nevezzük. A modell egyik funkciójának megfelelően, a megfigyelés szempontjából lényegtelen kapcsolatok elhagyásával egyszerűsítjük a rendszer leírását, de ugyancsak figyelmen kívül kell hagynunk vagy csak részben tudjuk figyelembe venni azokat a kapcsolatokat, melyeknek létét ismerjük, de a pontos leírását nem tudjuk vagy nem akarjuk elvégezni. Ez utóbbi elhanyagolások okozzák a modell úgynevezett *egyszerűsítési hibá*ját, melyet a mérés körülményeinek meghatározásánál is figyelembe kell venni.

A megfigyelés céljának és a rendelkezésre álló ismereteknek függvényében különféle modelleket alkalmazhatunk. Fontos választási szempont a lehetséges modellek között, hogy melyik az, ami a célnak megfelel, és a lehető legegyszerűbb módon készíthető el. A modellezésnek tehát *gazdaságos*nak is kell lennie, hiszen ez a mérnöki tevékenység része, így elkészítése energia- és időigényes folyamat.

A modellalkotáshoz információra van szükség, ami vonatkozhat például a matematikai modell esetében a rendszer működését leíró törvényekre, szerkezetre és a paraméterek értékére. Ezek az adatok származhatnak egyrészt a szakirodalomból, vagy saját korábbi, ezen a területen végzett kutatásainkból, melyeket így *a priori*nak, azaz eleve rendelkezésre állónak tekinthetünk. Másrészt, miután a modellalkotás maga is iteratív folyamat, ezért az egyes ciklusok során szerzett tapasztalatainkat, eredményeinket visszacsatolhatjuk egy következő lépés induló adataihoz. Ezeket az információkat *a posteriori*nak, tehát a modellezési lépések során szerzettnek nevezzük.

A modellalkotás során az első feladat az a priori információk összegyűjtése. Ezek az információk egyrészt a szakirodalomból származnak, de idetartoznak a rendszer előzetes elemzése, kapcsolatainak feltárása során szerzett tapasztalatok is. Nyilvánvaló, hogy bár ezek az a priori információk nagyon fontosak a jó modell elkészítéséhez, és így minél alaposabban el kell végezni az összegyűjtésüket, de általában a mennyiségük korlátozott.

A modellezés célja és a rendelkezésre álló a priori információk alapján dönthetjük el, hogy milyen típusú, pontosságú modellt választunk, mi lesz a modellezési eljárás típusa és mi lesz a megvalósítás módja, és mekkorák lesznek a költségei.

Ha a rendelkezésre nem álló, tehát a hiányzó információk alapján osztályozzuk a modellezési folyamatot, akkor két nagyobb csoportra oszthatjuk a modellezést. Tételezzük fel, hogy nem alapkutatás jellegű a vizsgálandó problémánk, így a leíráshoz szükséges törvények rendelkezésre állnak, viszont a szerkezetre és a paraméterekre vonatkozó adatok részben vagy teljesen hiányoznak. Ha a szerkezet részben vagy egészen ismeretlen, akkor ún. *struktúra-identifikáció*t, vagyis szerkezet- meghatározást kell végezni. Ehhez nagy segítséget jelent a tapasztalat és a mérnöki intuíció. Ha a vizsgálandó rendszer szerkezete adott, és csak a paraméterek hiányoznak, akkor *paraméter-identifikáció*t végzünk, vagyis a modellek paramétereinek, konstans vagy konstansnak tekinthető tagjainak meghatározása a feladat.

A rendelkezésre álló információ mennyisége és pontossága alapján a modellezés módszereit két fő csoportba sorolhatjuk.

A *deduktív modellezés* esetében konkrét, jól ismert rendszer vagy jelenség leírása a cél. A megfelelő információk birtokában elvégezhető az elméleti analízis, felbontás a megfelelő mélységig. Meghatározhatóak a rendszert és a környezetet, illetve rendszer belső egységeit összekötő kapcsolatok, és egyértelműen eldönthető, hogy melyeket szükséges, melyeket pedig nem kell figyelembe venni. Ennek megfelelően a rendszer belső szerkezete és a kapcsolatokat jellemző paraméterek adottak. Így egy egyértelmű, pontos, és a fizikai paraméterek által meghatározott, viszonylag széles tartományban alkalmazható modellt kapunk, melyre a szakirodalomban általában, mint *fehér-doboz* modellre szokás hivatkozni. Fontos kiemelni, hogy ezek a fehér doboz modellek nem feltétlenül tökéletes modelljei a vizsgált rendszernek, hanem azok tökéletesen ismert modelljei. A modellezés során ebben az esetben is végezhetünk egyszerűsítést, így lehet eltérés a vizsgált rendszer és a modell kimeneti értékei között, de pontosan ismerjük ennek okát és mértékét.

Az *induktív modellezés*i folyamatban egy kevéssé ismert jelenséget kell leírni. Ebben az esetben a vizsgált rendszer belső szerkezete ismeretlen, így a megismeréshez jelentős kísérleti munka, vagyis a bemenetek és kimenetek közötti kapcsolatok feltárása szükséges. Az induktív modellezés eredményeként kapott *fekete-doboz* modell általában leíró jellegű, azaz csak „utánozza” a rendszer viselkedését, így a vizsgálati munkapontokban és azok szűk környezetében alkalmazható. A modell szerkezete függ a modellezést végző személy tapasztalatától, a vizsgálat kivitelezésétől és más tényezőktől, azaz nem olyan mértékben egyértelmű, mint a deduktív modell szerkezete.

A modellalkotás e két változata szélsőségesnek tekinthető abból a szempontból, hogy a valóságos fizikai rendszerek esetében nagyon ritka, hogy a modellezendő rendszert tökéletesen ismerjük, és az is, hogy csak nagyon minimális információnk van róla. Általában korábbi vizsgálatok, vagy szakirodalomból szerzett adatok alapján rendelkezésre áll bizonyos mennyiségű a priori információ egy kiindulási modell felírásához, és ezt további mérések és vizsgálatok segítségével pontosítjuk. Az ilyen típusú eljárást *szürke-doboz modellezés*nek hívjuk.

1.2. Mérés és modellezés

A mérés és modellezés kapcsolatát a következőkben foglalhatjuk össze:

Modellezés A modellezés kiindulási feladata a mérési eljárás megtervezése. Ehhez e következő lépések szükségesek:

- A megismerési feladat megfogalmazása, céljának kitűzése.
- A rendelkezésre álló a priori információk összegyűjtése. Meg kell határozni a vizsgált rendszer határait, milyen részegységekből épül fel, milyen kapcsolatok vannak a rendszer és a környezete között, illetve a rendszer elemei között, melyek ezek közül a fontosak, és melyek elhanyagolhatók.
- A célkitűzés és az a priori információk mennyisége alapján ki kell választani a modell típusát, a modellezési eljárás típusát, a megvalósítás módját és erőforrás igényét.
- A választott modelltípusnak megfelelő előzetes modell elkészítése.

Mérés A mérés feladata lesz a konkrét megfigyelés megtervezése és elvégzése. Ennek lépései a következők:

- Megfigyelés tervezése során először el kell döntenünk, hogy mely változók értékét határozzuk meg méréssel, a megfigyelés mikor kezdődik és mennyi ideig tart. A megfigyelendő változókat elsősorban a célkitűzésben megadott feladat határozza meg, de ugyancsak befolyásolja a választott modellezési módszer is. Fizikai modellek esetében sokszor előfordul, hogy a keresett változó nem vagy csak nehezen mérhető meg, így más változó mérése alapján határozzuk meg az értékét. Ilyenkor természetesen figyelembe kell venni, hogy a számolás útján történő meghatározás során az elemi mérések hibái hogyan összegződnek a számolt változóban. A hibaterjedés vizsgálatával a 5. fejezetben foglalkozunk. A megfigyelés kezdő időpontjának kiválasztása különösen akkor lényeges, ha lehet olyan külső változó, ami befolyásolhatja a vizsgált változó értékét, de nem vettük figyelembe. A megfigyelés időbeliségének fontos adata az is, hogy mekkora a mintavételezési ciklusidő, ha a megfigyelt változók értékeit nem folyamatosan rögzítjük. Ugyancsak tervezési szempont, hogy lehet-e a bemenetek értékét változtatni, alkalmazhatunk-e különböző tesztjeleket. Irányítástechnikai fogalmakat felhasználva, vizsgálhatjuk-e a rendszer átmeneti függvényét (egységugrásra adott válaszát), súlyfüggvényét (egységimpulzusra adott válaszát), vagy további más bemenetre adott válaszfüggvényét. Ha ilyen tesztjelek alkalmazhatók, akkor meg kell határoznunk azok jellemző paraméterének értékét (pl. az ugrásfüggvény amplitúdóját) is.

  Abban az esetben, ha a megfigyelendő jellemző(k) kiválasztása, a megfigyelés kezdete és időtartama meghatározása mellett a bemenet(ek)en végrehajtandó változtatásokról is dönthetünk, akkor *aktív megfigyelés-tervezés*nek hívjuk ezt a folyamatot. Ha csak a megfigyelendő jellemzőket és a megfigyelés időbeli lefolyását határozhatjuk meg, akkor *passzív megfigyelés-tervezés*ről beszélünk. Passzív megfigyelés esetén a zajokra, zavarásokra adott válaszokból következtetünk a vizsgált rendszer tulajdonságaira, így ebben az esetben azokat is meg kell határozni, illetve mérni.

- A mérés következő lépése a megfigyelés elvégzése, melyhez az előző előkészítő lépésnek megfelelően rögzíteni kell a szabad jellemzőket, azaz a független változókat, aktív megfigyelés esetén végre kell hajtani a bemeneteken a szükséges változtatásokat és az előírt időtartamig rögzíteni kell a megfigyelendő értékeket.

- A választott mérési struktúrának megfelelően a kapott adatokat vagy a megfigyelés befejeződése után, vagy folyamatosan kiértékeljük. (A mérési struktúrákkal részletesen a 3. fejezetben foglalkozunk.) Az ellenőrzés eredményeként megállapíthatjuk, hogy a kapott adatok mennyire felelnek meg az előzetes megfontolások alapján várt értékeknek.

- Eltérés esetén meg kell keresni ennek okát.
  - Ha például különböző típusú mérési hibák (lásd 5. fejezet) okozták az eltérést, akkor megismételjük a megfigyelést, ügyelve, hogy az eltéréseket okozó hatásokat csökkentsük vagy kiküszöböljük.
  - Ha például túl rövid volt a megfigyelés időtartama, vagy túl nagy volt a mintavételezési idő, vagy a bemenet változtatásának rosszak voltak a paraméterei,

akkor a megfigyelés tervezéséhez térünk vissza, majd a pontosított paraméterekkel megismételjük a folyamatot.

  – Amennyiben az előzetesen feltételezett modellszerkezettel volt gond, akkor vissza kell térni a modellezés kiindulási szakaszához, és az előzetes modellt kell újragondolni, illetve módosítani.

- Amennyiben a kapott adatok megfelelőek, akkor visszatérhetünk a modellezési részhez, és meghatározhatjuk a vizsgált rendszer végleges modelljét.

A fenti leírás alapján a mérés és a modellezés kapcsolatáról a következőket állapíthatjuk meg:

- A modellezés mindig tartalmaz mérést, kivéve a tisztán deduktív modellalkotás esetét, mivel ott minden szükséges adat a priori információként adott.

- A mérést a modellezési folyamat körül veszi, abba van beleágyazva, hiszen a mérés bemenete a célkitűzés és az a priori információk alapján meghatározott előzetes modell, a kimenete pedig vagy a visszatérés ehhez az előzetes modellhez, vagy az adott megfigyelési folyamat szempontjából véglegesnek tekinthető modell megadása.

- A modellezés erősen kötődik a vizsgált rendszerhez, mert bár vannak formalizálható modellezési eszközök, de ezeket az adott rendszernek megfelelően kell alkalmazni.

- A mérés ugyanakkor autonóm, saját belső törvényszerűségekkel rendelkező folyamat. Ezt az autonóm jelleget például a mérőműszereknek a vizsgált rendszertől független mérési elve, vagy a mintavételezés törvényei jelentik.

- A modellezési folyamat iteratív jellege a megfigyelés kiértékelésének megfelelően alakul ki.

- A mérési folyamat önmagában is iteratív: eltérés, vagyis nem megfelelő adatok esetén, a kiértékelésnek megfelelően vissza kell térni az újra elvégzendő korábbi lépéshez.

- A modell jósága függ mind a modellezés, mind a megfigyelés során elkövetett hibáktól. Modellezési hibát például a rendszer és a környezet, illetve a rendszer elemei között meglévő kapcsolatok szelekciójánál követhetünk el. Ezt a hibát neveztük egyszerűsítési hibának a modellalkotás elveinek felsorolásánál. A megfigyelés hibáját a mérés során elkövetett hibák jelentik, melyek származhatnak a környezetnek a megfigyelésre gyakorolt hatásából, a mérőeszköztől, vagy a mérést végző személytől. Általában a mérési hibák jobban ellenőrizhetők, mind a modellezési hibák, így ha lehetőségünk van a mérőműszer pontosság alapján történő kiválasztására, akkor célszerű olyant választani, ami nem rontja tovább a modellezés miatti pontatlanságot, viszont nem szolgáltat feleslegesen pontos eredményt.

1.3. A mérés általánosítása

A mérés, a hagyományosnak tekinthető definíció szerint, valamely fizikai, kémiai vagy gazdasági mennyiség nagyságának jellemzése a választott mértékegységben kifejezett számértékével. A mérési eredmény tehát egy szám és egy mértékegység együttese. A mérési hiba pedig a tényleges (valódi) érték és a mérés alapján kapott érték közötti különbség.

A mérésnek ez a definíciója jól illeszkedik a mérnöki gyakorlat nagyon sok megismerési feladatához, azonban számos esetben nem, vagy csak nehezen alkalmazható. Ilyen feladatok például a minőségellenőrzési eljárások, amikor egy terméket vagy folyamatot több szempont alapján kell egy adott kategóriának megfeleltetni (osztályba sorolási problémák), vagy ugyancsak több szempont alapján sorba rendezni (rendezési feladatok). Bizonyos esetekben az is célszerű lehet, ha nem számokat alkalmazunk a mennyiségek nagyságának jellemzésére. Az ilyen összetett mérési problémák megoldásához szükség van a mérés fogalmának általánosítására, melyet a modellezési folyamatban betöltött szerepe alapján végezhetünk el.

A modellezés célja, hogy a vizsgált jelenség tulajdonságait a modell típusa által meghatározott formában fejezze ki. A célkitűzés és az a priori információk alapján felállítható az előzetes modell, mely alapja lesz a mérési eljárás tervezésének. A mérés feladata tehát, hogy az adott modelltípus lehetséges változatai közül a keresett tulajdonságot legjobban kifejezőt kiválassza. Ehhez az kell, hogy a modell jellemzőinek lehetséges kimenetelei között különbség legyen, és ezt a különbséget méréssel ki lehessen fejezni, meg tudjuk jeleníteni.

A mérés általánosított definíciója szerint a mérés a mért jellemzők közötti viszony kifejezése szimbólumok közötti viszonnyal. A mérési eredmény tehát egy szimbólum és egy skálainformáció együttese lesz. A szimbólumok tetszőlegesek lehetnek, skálainformáció pedig az adott méréshez kapcsolódó megállapodásokat jelenti. A mérési hiba az értékeléshez használt szimbólumhalmazon értelmezett távolság a valódi és a mérés alapján meghatározott érték között.

A mérés így megfogalmazott művelete már alkalmas az osztályba sorolás, a sorba rendezés elvégzésére és a tetszőleges szimbólumok használatára.

A skálainformáció megalkotásához a következőket kell elvégezni:

- Meg kell állapítani a mért jellemzők lehetséges értékeit, kimeneteleit és a köztük lévő viszonyt.
- Meg kell határozni az alkalmazott szimbólumokat, illetve ezek halmazát és a köztük lévő viszonyt.
- Meg kell határozni a mért jellemzők és a szimbólumok közötti leképezés módját úgy, hogy a szimbólumok halmazán értelmezett viszony megfeleljen a mért jellemzők halmazán értelmezett viszonynak.

A mérés ennek alapján két feladatból áll: a mérendő jellemző és a szimbólum halmaz közötti leképezés megvalósítása és a skálainformáció megalkotása. A leképezés jellemzőit tárgyalja a mérés jel- és rendszerelméleti szempontú vizsgálata, míg a skálához kapcsolódó kérdéseket a metrológia. A hagyományos fizikai, kémiai méréseknél a leképezést általában a mérőműszer valósítja meg, a skálainformációt pedig a választott mértékegységrendszerhez kötődő megállapodások jelentik. Általánosított mérés esetén sokszor a modellezést, megfigyelést tervezőnek kell a leképezés módját megoldani és a mérési eredmény kiértékeléshez szükséges skálát megalkotni.

2. fejezet

Jel és rendszerelmélet

2.1. Jelek

2.1.1. A jel fogalma és csoportosítása

A rendszerek vizsgálata, működtetése és leírása a róluk szerzett információ segítségével történhet. Technológiai rendszerek esetében ezt az információt jelnek nevezzük. A jelek jelhordozók útján határozhatók meg. *Jelhordozó* lehet bármilyen mérhető, vagy meghatározható fizikai, kémiai állapothatározó (mennyiség). A jelhordozók száma tetszőlegesen nagy, így az adott technológiai rendszer állapotát megadó, vagy azt befolyásoló jelhordozókat *jellemző*knek nevezzük. A *jel* tehát ezeknek a jellemzőknek, azaz a rendszer működése szempontjából lényeges mennyiségeknek minden olyan értéke, vagy értékének a megváltozása, mely egyértelműen alkalmas információ szerzésére, továbbítására vagy rögzítésére.

A jelek csoportosítása többféle szempont szerint történhet. Következőkben bemutatunk néhány csoportosítási lehetőséget.

Értékkészlet szerint:

- *Folytonos* jelek esetében az értékkészlet összefüggő tartomány.
- *Diszkrét* vagy szakaszos jelek csak kitüntetett értékeket vehetnek fel, értékkészletük ezeknek az értékeknek a halmaza.

A legtöbb fizikai, kémiai állapothatározó értéke folytonos jellel jellemezhető. Diszkrét jele van például egy kapcsolónak vagy egy folytonos jelnek A/D konverzió után, vagyis amikor a mérőműszer által küldött jelet a folyamatirányító számára digitális jellé alakítjuk.

Időbeli lefolyás szerint:

- *Folyamatos* jelek esetében az értékük egy adott időtartomány (vizsgálati időintervallum) bármely pontjában meghatározható, azaz a jelre vonatkozó információáramunk folyamatos.
- *Diszkrét* vagy szaggatott jelek esetében nincs folyamatos információáramunk a jelről, csak kitüntetett időpontokban (mintavételezéskor) ismert az értékük.

Technológia rendszerek esetében általában a mérőműszerek folyamatosan mérik a vizsgált mennyiség értékét, de az irányító rendszer csak meghatározott időközönként kérdezi le azokat.

Meghatározottság szerint:

- A *determinisztikus* jelek egyértelműen meghatározott időfüggvénnyel megadhatók.
- A *sztochasztikus* jelek esetében ez nem teljesül. Általában a rendszerben fellépő zajok, zavarások okozta véletlenszerű hatások miatt a jel ebben az esetben csak valószínűségszámítási módszerekkel írható le.

Bonyolult determinisztikus összefüggések esetén is lehet a modellezés kezdeti szakaszában sztochasztikus leírási módszereket alkalmazni, és zajos rendszereket is lehet egyszerűsítésként determinisztikus modellel leírni.

Megjelenési forma szerint:

- Egy műszer kimenetén megjelenő jel *analóg*, ha az az értékével arányos módon, például a mutató arányos kitéréseként olvasható le.
- *Digitális* megjelenés esetében az eredmény közvetlenül számjegyekkel megadva jelenik meg.

A klasszikus mutatós / kitéréses vagy folyadékszintes kijelzőjű mérő műszerek, illetve a modern, például a vizsgált jellel arányos feszültség vagy áramerősség kimenettel rendelkező műszerek analóg jelet szolgáltatnak. A *változás észlelése* szempontjából sokkal feltűnőbb az analóg kijelzés, ezért sokszor alkalmaznak folyamatok monitoron, grafikus képernyőn történő megjelenítésénél is analóg kijelzést. Ugyanakkor digitális kijelzésű eszközök esetében az ember számára sokkal egyszerűbb a műszer kiemenetén megjelenő *konkrét érték rögzítése*, kisebb valószínűséggel történik az eredmény meghatározásánál *leolvasási hiba*.

Térbeli leírás szerint:

- Ha a vizsgált térrészben a jel értéke mindenhol egyforma, vagy közelítőleg azonosnak tekinthető, akkor a modellt koncentrált paraméterűnek nevezzük.
- Ha ez az elhanyagolás nem tehető meg, azaz figyelembe kell venni a jel értékének a helytől való függését, akkor elosztott paraméterű modellt kapunk.

A koncentrált paraméterű modellekben a jelek változását közönséges differenciálegyenletekkel írhatjuk le, elosztott paraméterű modellekben parciális differenciálegyenletek is szerepelnek.

2.1.2. A jelek leírása

Az állapothatározók értékeit, vagyis a vizsgált rendszer jeleit többféle modell segítségével írhatjuk le. Ezek részben már az előző csoportosításban is szerepeltek, így vannak folyamatos és diszkrét idejű, determinisztikus és sztochasztikus, illetve térben koncentrált és elosztott jelmodellek.

A determinisztikus, folytonos idejű jelek esetében további csoportosításra ad lehetőséget a jel periodikus jellege.

*Periodikus jelek*hez hozzárendelhető egy időtartomány, melynek elteltével ismétlődik a jel értékének alakulása. A periodikus jeleken belül kiemelt szerepük van a szinuszos jellegű jeleknek. Egy *szinuszos jel* három paraméterrel: az amplitúdójával, a frekvenciájával és fázisával leírható. Az *általános periodikus jelek* leírására a Fourier-sorba fejtés ad lehetőséget:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n2\pi f_0 t) + B_n \sin(n2\pi f_0 t)) \,, \tag{2.1}$$

ahol $-\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n \in \mathbb{R}$. Mint a kifejezésből látható, a pontos leíráshoz elvileg végtelen számú Fourier-együttható kell. A gyakorlatban természetesen csak véges számút alkalmazunk, és ezért általában a zajokat leíró magasabb frekvenciatartományban torzul a jel.

A *nemperiodikus jelek* csoportján belül szokás megkülönböztetni kváziperiodikus és általános tranziens jeleket. A *kváziperiodikus jelek* lehetnek például azok a jelek, melyek állandó frekvenciával, de csökkenő amplitúdóval rendelkeznek. Ilyen jeleket kapunk alulcsillapított magasabb rendű rendszerek átmeneti függvényeinek vizsgálatánál. Ezek esetében is lehetőség van a Fourier-sorba fejtésre, de ebben az esetben az egyes tagok frekvenciája is változik:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n2\pi f_n t) + B_n \sin(2\pi f_n t)) \,, \tag{2.2}$$

ahol $-\infty < t < \infty, A_0, A_n, B_n, f_n \in \mathbb{R}$. Speciális esetet jelent, ha az egyes tagok frekvenciája egy alapfrekvencia többszöröse: $f_n = n f_0$.

Az *általános tranziens jelek* leírása általános esetben nehéz. Jellemzésükre gyakran leíró paramétereket: különböző időállandókat, erősítést, túllendülést, stb. alkalmazunk. Megkönnyítheti a leírásukat, ha időtartomány helyett operátortartományban, folytonos idejű rendszereknél Laplace-transzformációt, diszkrét idejű rendszereknél z-transzformációt alkalmazva, kezeljük őket.

A *sztochasztikus jelek*et általában sztochasztikus folyamatok segítségével írjuk le. A sztochasztikus folyamat olyan változó, melynek értéke az időtől és egy valószínűségi változó által meghatározott eloszlástól függ: $x(t,\xi), t \in T, \xi \in \Theta$, ahol T az időhalmaz és Θ eseménytér. Jellemzésükre használhatunk együttes eloszlás függvényeket, illetve azok momentumait.

2.2. A rendszerekhez kapcsolódó fogalmak

Az 1. fejezetben a mérés és a modellezés kapcsolatának elemzése során megvizsgáltuk a szeparáció és a szelekció szerepét a modell létrehozásában. Általánosságban a rendszert úgy definiálhatjuk, mint a kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza. Ennek megfelelően a szeparációt, vagyis a vizsgált rendszer körülhatárolását a figyelembe vett kölcsönhatások alapján végezzük el. Ezek a kölcsönhatások anyag-, energia- és információ-átadással járó folyamatok, melyek egyrészt a rendszer és környezete, másrészt a rendszer elemei között játszódnak le. Végbemenetelüket objektív, de nem minden esetben pontosan ismert törvényszerűségek határozzák meg, és jellemzésük állapot-leírással lehetséges. Az állapot tehát, a rendszerben fellépő kölcsönhatások adott időpontra vonatkozó értékeinek összessége. Megadásukhoz egyrészt szükséges a rendszer belső szerkezetének, vagyis az elemek közötti kapcsolatoknak az ismerete, ami a modell szerkezetét (struktúráját) fogja megadni, másrészt kellenek az összefüggések mennyiségi viszonyait megadó paraméterek is.

A rendszerelméletben használatos rendszerfogalmaknak vannak általános jellemzői, melyekből kiindulva különböző rendszerdefiníciókat lehet megalkotni. Ezek a jellemzők a következők.

A rendszer tagolt egész. A rendszer alrendszerekből, elemekből áll, ezekre szétbontható, ezekből összeépíthető. Felbontás után a rendszer elemei külön-külön vizsgálhatók, tulajdonságaik meghatározhatók. Az elemek tulajdonságai a rendszerben is megjelennek, de a rendszernek, mint egésznek van(nak) olyan további tulajdonsága(i), ami(k) csak a teljes rendszerre jellemző(k).

A rendszer kölcsönhatásban álló elemek összessége. A rendszer elemei között kapcsolatok, relációk vannak. A rendszer nem bontható két részre úgy, hogy legalább egy értelmezett kapcsolat ne legyen a két rész között. Ez vezet el a *relációs rendszerek* definiálásához.

A rendszer egy célorientált egység. Létezik egy rendszeralkotó tényező, melynek megvalósulása érdekében működik a rendszer. A rendszer egyrészt autonóm, mert vannak saját belső törvényei, másrészt heteronóm, mert működését befolyásolja a környezet, és működésével a rendszer is befolyásolja a környezetét. A *teleologikus rendszerek* definíciója foglalkozik azzal, hogy a rendszer működése minél optimálisabban valósítsa meg a cél elérését.

A rendszer hierarchikus jellegű. A rendszer maga is hierarchikus szerkezetű és ugyanakkor egy hierarchikus rendszer része. A rendszer a belső összefüggései alapján felbontható különböző mélységig alrendszerekre és elemekre, melyek hierarchikusan elrendezhetőek. A heteronomitása miatt a rendszer beilleszthető elemként (alrendszerként) egy nála magasabb szinten lévő rendszerbe. Az ún. hierarchiaparadoxon szerint egy rendszer akkor írható le, ha leírhatjuk egy magasabb szinten álló rendszer elemeként, viszont ehhez az kell, hogy le tudjuk írni önmagában, mint rendszert, azaz alacsonyabb hierarchia szinten álló elemek egészeként. A szakirodalomban különböző típusú hierarchikus rendszerdefiníciók ismertek, melyek a különböző felbontási elvek szerint határozzák meg a hierarchikus rendszer felépítését.

2.3. Kalman-féle rendszermodell

Ebben a fejezetben áttekintjük a rendszer- és irányítástechnikában széles körben alkalmazott, ún. Kalman-féle rendszermodellt. A Kalman-féle rendszermodell az ún. állapottér-modellek csoportjába tartozik, azaz a bemenetek és a kimenetek mellett a rendszer belső működését jellemző állapotváltozókat is figyelembe vesszük a vizsgált objektum leírásánál. Ennek megfelelően a modellek e csoportja a fehér doboz modellek közé tartozik, hiszen a rendszer belső állapotában és a kimeneten történő változásokat a rendszer belső összefüggései és bemenetei alapján határozzuk meg.

A modell az elnevezését egyik megalkotójáról, a magyar származású Kálmán Rudolfról kapta. Kálmán Rudolf Budapesten született, de egyetemi oklevelét már a Massachusetts Institute of Technology-n szerezte, és a további tudományos karrierje is az Egyesült Államokhoz kapcsolódik. Számos jelentős kitüntetés és díszdoktori cím, valamint akadémiai tagság birtokosa. A kidolgozott rendszermodellt P. L. Farb-bal és M. A. Arbib-bal közösen publikálták az 1969-ben megjelent könyvükben. A modell kidolgozásának fő célja az idővel jellemezhető működésű rendszerek és irányításuk leírása és vizsgálata volt.

2.3.1. A Kalman-féle rendszermodell elemei

Időhalmaz jele: T

A Kalman-féle rendszermodell csak időben változó rendszerek leírásával foglalkozik, így az időhalmaz lényeges eleme a definíciónak. Az időhalmazt a leírt rendszernek megfelelően megadhatjuk folytonos halmazként vagy diszkrét - a mintavételezési időpontokat - tartalmazó halmazként. Ugyancsak a vizsgálat céljának megfelelően definiálhatjuk akár egyik, akár másik irányban véges vagy végtelen halmazként.

Lehetséges belső állapot értékek halmaza jele: X

A belső állapotváltozók a rendszer belső fizikai - kémiai tulajdonságait jellemző, a rendszerben bekövetkező változásokat magyarázó mennyiség. Az állapotváltozóknak nem kell közvetlenül mérhetőnek lenniük, az is elég, ha a bemenetekből és az állapotváltozók egymás közti kölcsönhatásából meghatározható az értékük. Általában több állapotváltozó segítségével tudjuk jellemezni a rendszereinket, így a halmaz elemei vektorok lesznek.

Lehetséges bemeneti értékek halmaza jele: U

A vizsgált rendszer működését a környezete egy vagy több bemeneten keresztül befolyásolja. A lehetséges bemeneti értékek halmaza tartalmazza az egyes bemenetek által felvehető értékeket vagy értéktartományokat.

Lehetséges kimeneti értékek halmaza jele: Y

A rendszer a környezetét a kimenetein keresztül befolyásolja. Az ezeket a hatásokat leíró fizikai mennyiségek lesznek a kimeneti változók. Kimeneti változóként célszerűen olyan mennyiséget adunk meg, amely közvetlenül meghatározható, mérhető.

Lehetséges bemenet-idő függvények halmaza jele: Ω

Az Ω halmaz tartalmazza a rendszer működése során értelmezhető bemenet-idő függvényeket:

$$\Omega = \{\omega | \omega : T \rightarrow U\} . \tag{2.3}$$

A műszaki gyakorlatban az ω helyett általában $u(t)$ jelöléssel hivatkozunk a bemenetekre. A bemenetek közé egyaránt tartozhatnak különböző típusú tesztjelek vagy zavaró jelek. A bemenetekkel szembeni követelmény, hogy jellegüknek megfelelően valamilyen formában megadhatók legyenek, így a tesztjeleket és a más, a modellező által alkalmazni kíván jeleket determinisztikus függvényként, a zajokat pedig valamilyen sztochasztikus folyamat felhasználásával írjuk le.

Lehetséges kimenet-idő függvények halmaza jele: Γ

A Γ halmaz elemei a rendszer működése során lehetséges kimenet-idő függvények:

$$\Gamma = \{\gamma | \gamma : T \to Y\} . \tag{2.4}$$

A műszaki gyakorlatban az γ helyett általában $y(t)$ jelölést használjuk.

Állapotátmeneti függvény jele: φ

Az állapotátmeneti függvény írja le a rendszer működését, tehát azt, hogy hogyan kerül át a rendszer az egyik állapotából egy másik állapotába. Megadásához vezessük be a bemenetszegmensek és azok szétvághatóságának fogalmát.

Bemenetszegmens Legyen adott egy $(t_1, t_2] \subset T$ intervallum. A bemenetszegmens az $u(t)$ függvény leszűkítése erre az intervallumra: $u(t) \mid t \in (t_1, t_2]$ vagy $u(t)_{(t_1,t_2]}$.

Szétvághatóság Legyen adott $(t_1, t_2] \subset T$ intervallum és az erre leszűkített $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetszegmens. Vegyünk fel egy t' időpontot a $(t_1, t_2]$ intervallum belsejében: $t_1 < t' < t_2$. Ekkor az $u(t)$ bemenetszegmens a t' időpont alapján két részre bontható:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u(t) \mid t \in (t_1, t'] \\ u_2(t) &= u(t) \mid t \in (t', t_2] . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Az időintervallum alulról nyílt, felülről zárt módon való megadásával a bemenetszegmens szétvágásakor egyértelműen eldönthető, hogy melyik végpont melyik új szegmens része lesz.

Az állapotátmeneti függvényt a következő módon definiáljuk:

$$\varphi : T \times T \times X \times \Omega \to X \tag{2.6}$$

$$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}) . \tag{2.7}$$

A definíciónak megfelelően az állapotátmeneti függvény megadja, hogy egy $x(t_1)$ állapotban $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetszegmenst alkalmazva, a t_1 kezdőidőpont és a t_2 végidőpont figyelembe vételével milyen $x(t_2)$ állapotba kerül át a rendszer.

Az állapotátmeneti függvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. *Okozatiság* Az állapotátmeneti függvény által az $x(t_1)$ és $x(t_2)$ állapotok között megadott kapcsolat csak $t_2 \geq t_1$ időpontokra igaz, azaz fizikai rendszer a múltját nem módosíthatja.
2. *Konzisztencia* Ha $t_2 = t_1$, azaz az időpontok megegyeznek, akkor a hozzájuk tartozó állapotoknak is meg kell egyezniük: $x(t_2) = x(t_1)$.

3. *Szakaszolhatóság* Ha t' az időintervallum egy köztes pontja, $t_1 < t' < t_2$, akkor a bemenetszegmens szétbontásával a t' pontból is ugyanazt a végállapotot érjük el: $x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}) = \varphi(t_2, t', x(t'), u(t)_{(t',t_2]})$.
4. *Egyértelműség* Jelölje egy rendszer két lehetséges működését 1 és 2 index. Tételezzük fel, hogy egy adott t_1 időpontra igaz, hogy a két működéshez tartozó állapotok megegyeznek: $x_2(t_1) = x_1(t_1)$, és a t_1 és t_2 időpontok között a működések bemenetei is megegyeznek: $u_2(t)_{(t_1,t_2]} = u_2(t)_{(t_1,t_2]}$. Ekkor a végállapotoknak meg kell egyezniük: $x_2(t_2) = x_1(t_2)$.

Kiolvasó (kimeneti) függvény jele: η

Létezik kiolvasó vagy más néven kimeneti függvény, mely a kimeneti változók értékeit határozza meg a pillanatnyi belső állapotok, bemenetek értékei és az időpont alapján a 2.8 képletnek megfelelően.

$$\eta : T \times X \times U \to Y \tag{2.8}$$
$$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1)) \ . \tag{2.9}$$

2.3.2. A Kalman-féle rendszermodell definíciója

Az állapottérmodellek Kalman szerinti definíciója a következő:

$$\Sigma = (T, X, U, Y, \Omega, \Gamma, \varphi, \eta) \ , \tag{2.10}$$

ahol

T - az időhalmaz,

X - a lehetséges belső állapotok halmaza,

U - a lehetséges bemeneti értékek halmaza,

Y - a lehetséges kimeneti értékek halmaza,

Ω - a lehetséges bemenet-idő függvények halmaza,

Γ - a lehetséges kimenet-idő függvények halmaza,

φ - az állapotátmeneti függvény,

η - a kiolvasó függvény.

A definícióban felsorolt elemek a 2.3.1 részben leírt tulajdonságokkal jellemezhetők. A definícióhoz kapcsolódó néhány elnevezés:

- A (t, x_t) párost eseménynek nevezzük.
- A $T \times X$ eseménytér vagy fázistér.

- A φ állapotátviteli függvény az alkalmazási területnek megfelelően lehet trajektória, pálya, folyam, megoldás, megoldási görbe.

- Az $\omega/u(t)$ bemenet vagy beavatkozás a rendszert az $x(t_1)$ állapotából átviszi, vagy áttranszformálja a $\varphi(t_2, t_1, x(t_1), u(t)_{(t_1,t_2]}$ által meghatározott $x(t_2)$ állapotba, azaz a rendszer működik, időben változtatja az állapotát.

- Ha az Ω halmaznak egy eleme van, akkor a Σ rendszert szabadnak nevezzük. Szabad rendszer a világmindenség, mivel ismereteink szerint a gravitáció tartja össze.

- Ha a φ függvény nemcsak $t_2 \geq t_1$ esetén értelmezhető, hanem tetszőleges t_2 és t_1 értékekre, akkor a rendszer reverzibilis. Természetesen a fizikai rendszerek nem reverzibilis módon működnek.

2.3.3. A rendszerek osztályozása

A vizsgált rendszereket, a 2.10 definícióban felsorolt halmazoknak az adott rendszer esetében meghatározott tulajdonságaik alapján, különböző osztályokba sorolhatjuk.

Folytonos idejű - diszkrét idejű rendszerek A T időhalmazt a rendszer vizsgálata során tekinthetjük folytonos intervallumnak vagy diszkrét időpontokat tartalmazó halmaznak. A fizikai rendszerek folytonos idejűek, tehát a jellemző értékeik a vizsgálat időtartományának tetszőleges pontjában meghatározhatóak. A mintavételezéses irányítási rendszerek esetében ez az információáram szaggatott, emiatt diszkrét idejűnek tekinthetjük az ilyen rendszereket.

Számszerű - nem számszerű rendszerek Fizikai rendszerek változói között lehetnek olyanok, melyekhez nem tudunk, vagy nem akarunk számszerű értéket rendelni, nagyságukat csak nyelvi változóval jellemezzük. Az ilyen rendszereket nevezzük nemszámszerű rendszereknek. A fuzzy szabályozási rendszerekben találkozhatunk ilyen nyelvi kifejezésekkel jellemzett változókkal. A definícióban szereplő X, U és Y halmazok elemei egyaránt tartalmazhatnak nem számszerű értékeket.

Véges állapotú - végtelen állapotú rendszerek Ha a vizsgált rendszernek csak véges sok különböző állapota lehet, akkor véges állapotúnak, ha nincs korlát az állapotok számára, akkor végtelen állapotúnak nevezzük. Véges állapotú rendszerek esetében az X halmaznak véges sok különböző eleme lehet, tehát véges halmaz, míg végtelen állapotú rendszereknél az X halmaz végtelen halmaz.

Lineáris - nemlineáris rendszerek Ha az X, U, Y, Ω és Γ halmazok lineáris terek, akkor lineáris rendszerről beszélünk. Legyen egy '1' jelű működés kezdőállapota $x_1(t_1)$, a bemenete $u_1(t)_{(t_1,t_2]}$, és a működés eredményeként jöjjön létre az $x_1(t_2)$ állapot és az $y_1(t_1)$ kimenet. Legyenek egy másik, '2' jelű működés esetében ezek az változók rendre $x_2(t_1)$, $u_2(t)_{(t_1,t_2]}$, $x_2(t_2)$ és $y_2(t_1)$. Lineáris rendszer esetében a két működéshez tartozó kezdőállapotok és a beavatkozások lineáris kombinációjával előállított $x(t_1)$ kezdőállapot és $u(t)_{(t_1,t_2]}$ bemenetre kapott $x(t_2)$ végállapot és $y(t_1)$ kimenet megegyezik a két működés

esetében kapott végállapotok és kimenetek lineáris kombinációjával:
$x(t_1) = \lambda_1 \cdot x_1(t_1) + \lambda_2 \cdot x_2(t_1)$
$u(t)_{(t_1,t_2]} = \lambda_1 \cdot u_1(t)_{(t_1,t_2]} + \lambda_2 \cdot u_2(t)_{(t_1,t_2]}$
$x(t_2) = \varphi(t_2, t_1, x(t_1) u(t)_{(t_1,t_2]}) = \lambda_1 \cdot x_1(t_2) + \lambda_2 \cdot x_2(t_2)$
$y(t_1) = \eta(t_1, x(t_1), u(t_1)) = \lambda_1 \cdot y_1(t_1) + \lambda_2 \cdot y_2(t_1)$
ahol λ_1 és λ_2 valós számok. A valós fizikai rendszerek általában csak egy szűk intervallumban tekinthetők lineárisnak.

Idővariáns és időinvariáns rendszerek Mind az idővariáns, mind az időinvariáns rendszerek esetében a belső állapotváltozók, a bemeneti és a kimeneti változók az idő függvényei. Az idővariancia a csillagászati időtől való függésre vagy annak látszatára utal. Az idővariáns rendszer esetében a végállapot és a kimenet nemcsak a kezdőállapottól és a bemeneti szegmenstől függ hanem a kísérlet időpontjától is. Az idővariancia általában a modellezés során elkövetett egyszerűsítési hiba következménye, vagyis amiatt lép fel, mert egy a rendszer működését befolyásoló hatást nem vettünk figyelembe. Például a számítástudományban alkalmazott automaták véges állapotú, diszkrét idejű, időinvariáns rendszerek.

Determinisztikus és sztochasztikus rendszerek Ha a változásokat létrehozó kölcsönhatások determinisztikus függvényekkel jellemezhetők, akkor determinisztikus rendszerről beszélünk. Valós rendszerek esetében a zajok, zavarások hatását általában csak valószínűségi változó segítségével tudjuk leírni, így ezeknek a rendszereknek a viselkedése véletlenszerűnek, azaz sztochasztikusnak tekinthető.

Véges és végtelen dimenziós rendszerek Bizonyos fizikai rendszerek esetében egyszerűsítésként feltételezhetjük, hogy egy fizikai jellemző értéke a vizsgálati tér minden pontjában azonos, így elegendő egy jól megválasztott pontban meghatározni az értékét. Az ilyen modellek csak közönséges differenciálegyenleteket tartalmaznak, és koncentrált paraméterűnek nevezzük. Ha ez a feltételezés nem teljesül, akkor meg kell vizsgálni, hogy a jellemző változását a tér hány koordinátája szerint kell figyelembe venni. Ilyenkor elosztott paraméterű rendszerekről beszélünk és parciális differenciálegyenletekkel tudjuk leírni őket.

2.3.4. Az állapottér modell jellemző alakjai

A következőkben megadjuk a 2.10 definícióban szereplő állapotátmeneti függvény és kiolvasó függvény konkrét alakját néhány, előzőekben bemutatott modellosztály esetére.

A 2.6 és 2.8 egyenletek megadják az állapotátmeneti és a kiolvasó függvények általános definícióját. A nemlineáris, folytonos idejű, idővariáns rendszer modellje a következő alakú:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(t, x(t), u(t)) \,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A nemlineáris, folytonos idejű, időinvariáns rendszer modellje:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

A lineáris, folytonos idejű, idővariáns rendszer modellje:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t)+B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)+D(t)u(t)\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Idővariáns rendszerek esetében az A,B,C,D együttható mátrixok elemei között van legalább egy időtől függő.

A lineáris, folytonos idejű, időinvariáns rendszer modellje:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)+Du(t)\ . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Az együttható mátrixok szokásos elnevezései:
A - állapotátviteli mátrix;
B - bemeneti mátrix;
C - kimeneti mátrix;
D - segédmátrix.

A lineáris, diszkrét idejű, időinvariáns rendszer állapottér modelljének az általános alakja:

$$\begin{aligned} x((k+1)T_0) &= \Phi x(kT_0)+\Gamma u(kT_0) \\ y(kT_0) &= Cx(kT_0)\ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

ahol
Φ - a diszkrét állapotátviteli mátrix; $\Phi = e^{AT_0}$
Γ - a diszkrét bemeneti mátrix; $\Gamma = A^{-1}(e^{AT_0}-I)B$
C - a kimeneti mátrix; T_0 - a mintavételezési periódusidő; k - a mintavételezés sorszáma.

2.4. A bemenet-kimenet modell

A Kalman-féle rendszermodell 2.10 általános alakjából kiindulva levezethetjük az ún. bemenet-kimenet modellt. Ezt a modellt, a fejezetben leírtaknak megfelelően akkor alkalmazzuk, ha a vizsgált rendszer belső viszonyait nem tudjuk vagy nem akarjuk matematikai összefüggésekkel jellemezni.

Hagyjuk el az eredeti definícióból a belső állapotokra vonatkozó elemeket, így a lehetséges belső állapot értékeket tartalmazó X halmazt, a $\varphi(t)$ állapotátviteli függvényt, és az $\eta(t)$ kiolvasó függvényt . Vezessük be az A indexhalmazt és az F függvénycsaládot a következő módon:

$$F = \{f_\alpha \mid f_\alpha : T \times \Omega \to Y, \alpha \in A\}. \tag{2.16}$$

Az F függvénycsalád tagjai:
$y(t) = f_\alpha(t,u(t))$
azok az f_α bemenet-kimenet függvények, amelyek megadják a t időpillanatban az $u(t)$ bemenet alapján kapott $y(t)$ kimenetet az α kísérlet esetében. A bemenet-kimenet függvények a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

- *Az idő iránya* Létezik az $\iota : A \to T$ leképezés úgy, hogy az $f_\alpha(t,u(t))$ függvény definiált $\forall t \geq \iota(\alpha)$-ra.
- *Okozatiság* Legyen $\tau, t \in T$ és $\tau < t$. Ha $u(t), u'(t) \in \Omega$ és
  $u(t)_{(\tau,t]} = u'(t)_{(\tau,t]}$
  akkor
  $f_\alpha(t,u(t)) = f_\alpha(t,u'(t))$
  $\forall\alpha$-ra úgy, hogy $\tau = \iota(\alpha)$.

A bemenet-kimenet modell definíciója:

$$\Sigma_{I/O} = (T, U, Y, \Omega, \Gamma, F) \; , \tag{2.17}$$

ahol a szimbólumok megfelelnek egyrészt a Kalman-féle rendszermodell (2.10), másrészt az 2.16 egyenletben megadottaknak.

A bemenet-kimenet modell tehát a kísérletek során alkalmazott bemenetek és az azokra kapott válaszok összefoglalása. Az α paraméterrel megcímkézett kísérletek az ω vagy $u(t)$ bemenetből és az $y(t)$ megfigyelt kimenetből állnak.

Dinamikus rendszerek esetében az alábbi általános, differenciálegyenlet típusú modellt kapjuk:

$$f(y(t), y^1(t), \ldots, y^n(t), u(t), u^1(t), \ldots, u^m(t), t) = 0 \; . \tag{2.18}$$

A lineáris, idővariáns, folytonos idejű bemenet-kimenet modell alakja:

$$\begin{aligned} a(t)_n y^n(t) + a(t)_{n-1} y^{n-1}(t) + \ldots + a_1(t) y^1(t) + a_0(t) y(t) = \\ = b_m(t) u^m(t) + \ldots + b_0(t) u(t) \; . \end{aligned} \tag{2.19}$$

A lineáris, időinvariáns, folytonos idejű bemenet-kimenet modell általános alakja az alábbi n-ed rendű differenciálegyenlet:

$$a_n y^n(t) + a_{n-1} y^{n-1}(t) + \ldots + a_1 y^1(t) + a_0 y(t) = b_m u^m(t) + \ldots + b_0 u(t) \; , \tag{2.20}$$

ahol
$u(t)$ - a bemenő jel,
$y(t)$ - a kimenő jel,
$a_n, \ldots, a_0, b_m, \ldots, b_0$ - paraméterek.

Diszkrét időtartományban kétféle modellt szokás alkalmazni: az előrefelé vett differenciákon és a visszafelé vett differenciákon alapuló modelleket. Az előrefelé differenciaegyenlet alakja:

$$\begin{aligned} a_n y((k+n)T_0) + a_{n-1} y((k+n-1)T_0) + \ldots + a_1 y((k+1)T_0) + a_0 y(kT_0) = \\ = b_m u((k+m)T_0) + \ldots + b_0 u(kT_0) \; , \end{aligned} \tag{2.21}$$

a visszafelé vett differenciaegyenlet alapú modell alakja:

$$\begin{aligned} a_0 y(kT_0) + a_1 y((k-1)T_0) + \ldots + a_{n-1} y((k-n+1)T_0) + a_n y((k-n)T_0) = \\ = b_0 u((k-d)T_0) + \ldots + b_m u((k-d-m)T_0) \; , \end{aligned} \tag{2.22}$$

ahol mindkét esetben az $y(kT_0)$ jelenti a meghatározandó, vagyis a jelenhez tartozó kimeneti értéket, és $d = n - m$.

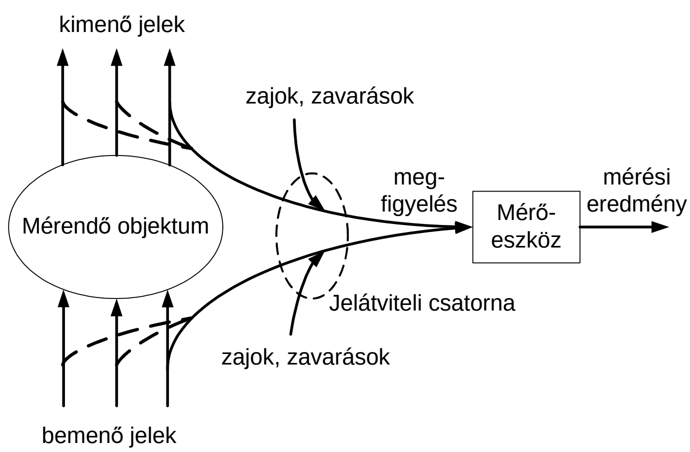
3. fejezet

Mérési struktúrák

Az általánosított mérés fogalmának bevezetésével a mérés műveletét két fő, egymástól elkülönülő részre osztottuk: mérendő jellemző és a szimbólumhalmaz közötti leképezés megvalósítására, ami a szűkebben vett mérésnek felel meg, és a skálainformáció megalkotására. A leképezés megvalósítását tárgyalja a mérés jel- és rendszerelméleti szempontú vizsgálata. A különböző jel- és rendszerelméleti modelleket a 2 fejezetben áttekintettük, a következőkben a mérési folyamattal, mint a leképezést megvalósító rendszerrel foglalkozunk.

3.1. A mérés jel- és rendszerelméleti modellje

Legyen adott a 3.1 ábrán látható, egy mérendő objektumból és mérőeszközből álló rendszer. A megfigyelési folyamat célja a mérendő objektum tulajdonságainak megismerése, így a modellezési folyamat során először meghatározzuk az objektumnak a előzetes modelljét, majd ennek alapján tervezzük meg a mérési folyamatot. A megfigyelendő objektum és a környezete között anyag-, energia- és információ áramok találhatók, melyeket - a vizsgálat szempontjából lényeges állapotváltozókat meghatározva, - be- és kimenő jelekként értelmezhetünk.



3.1. ábra. A mérés jel- és rendszerelméleti modellje

A mérési folyamat másik fontos eleme a mérőeszköz. A mérőeszköz feladata a jelnek, mint információnak a megfelelő formátumban történő megjelenítése a megismerési folyamatban. A mérőeszközök a megfigyelést szelektív módon valósítják meg, azaz a rendszer és a környezete közötti jelekből egy műszer csak a konstrukciójának megfelelőeket képes meghatározni. A mérési folyamat során a műszer általában több jelátalakítást is elvégez. A műszerek többsége a megfigyelt jellemző valamilyen fizikai hatását méri, például egy ellenálláshőmérőben a hőmérséklet függvényében változik a mérővezeték ellenállása, nyomásmérésnél változik a Bourdon-cső alakja vagy áramlásmérésnél a térfogatáram függvényében változik a nyomáskülönbség. A műszernek tehát fizikailag vagy koncepcionálisan tartalmaznia kell a megfigyelendő jellemző modelljét az érzékelés elvégzéséhez. Ha a mérőműszer alkalmazásának célja a mérési eredmény közvetlen megjelenítése, akkor további jelátalakítással meg kell oldani a kimenő jel leolvashatóságát. Ha a műszer egy szabályozási kör része, akkor a jelet a szabályozó bemenete által meghatározott formára kell hozni, azaz általában villamos jellé, vagy ritkábban pneumatikus jellé kell átalakítani, illetve digitális eszköz használata esetén az analóg áramjelet konvertálni kell.

A mérőműszer általában nem közvetlenül csatlakozik a mérendő objektumhoz. Az információ átvitele a megfigyelt jellemzőtől a műszer érzékelőjéig különböző közegeken keresztül történik, melyek többé-kevésbé módosíthatják a jelet. Az információ átvitelében szerepet játszó közeget általánosítva *jelátviteli csatornának* nevezzük. Jelátviteli csatorna lehet egy feszültségmérő műszer áramkörbe való bekötéséhez használt vezeték, higanyos hőmérő esetén az üvegtok, vagy egy nyomásmérő esetén a csatlakozó csővezeték. Nem kontakt jellegű érzékelőknél, pl. infravörös hőmérsékletmérőnél a megfigyelt tárgy és a műszer közötti légréteg lesz a jelátviteli csatorna. A jelátviteli csatorna ismerete lényeges a mérés tervezése szempontjából, mert általában ebben lépnek fel a mérést befolyásoló zajok, zavarások.

A mérőműszer bemenetére érkező jelre a jelátviteli csatornában tehát zajok szuperponálódnak, ez lesz a zajjal terhelt megfigyelés. A műszer kimenetén a keresett információt tartalmazó, minél tisztább, zajmenetesebb állapotú mérési eredményt kell megkapnunk, így a mérőeszköznek az elsődleges jelfeldolgozás során a zavarások egy részének a szűrését is el kell végeznie.

3.2. Mérési eljárások

3.2.1. Optimális mérési eljárás

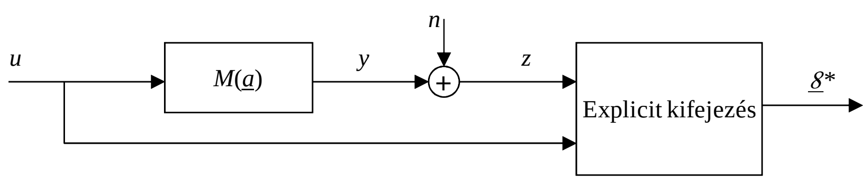
A megfigyelendő jellemzőt az előzetes modell alapján határozhatjuk meg, a mérési eljárásnak tehát „ismernie” kell a modellt, vagyis a megfigyelendő jellemzőt, a mérőműszernek pedig fizikailag vagy koncepcionálisan tartalmaznia kell ezt a modellt.

Jelölje $M(\underline{\alpha})$ a mérési folyamat bemenetét jelentő előzetes modellt, $\underline{\alpha}$ a megfigyelendő jellemzők vektorát, $\mathfrak{M}_\alpha$ a vizsgált rendszer valamennyi lehetséges modelljét tartalmazó modellosztályt, és $M(\underline{a})$ az optimális értékeket tartalmazó modellt. A *mérés célja* annak az $M(\underline{\alpha}^*) \in \mathfrak{M}_\alpha$ megtalálása, amelyik leginkább hasonló az $M(\underline{a})$ optimális modellhez. A mérési folyamat által meghatározott $\underline{\alpha}^*$ értékek és az optimális $\underline{a}$ értékek között mindig lesz elvi és gyakorlati okok miatt különbség. Egyrészt a tökéletesen pontos eredmény elvileg sem ismerhető meg, de gyakorlatilag sincs arra szükség, hogy egy paraméter értékét végtelen hosszúságú tizedes törttel megadjuk, másrészt a jelátviteli csatornában fellépő zajok, zavarások torzítják a mérés során kapott értéket. A megfelelő modell megtalálása a mérési folyamatban lévő fizikai vagy koncepcionális modell változtatását, módosítását jelenti. Ezt a változtatást a leginkább hasonló paraméterek meghatározásáig kell végezni, ami egy C hasonlósági kritérium segítségével ellenőrízhető.

Összefoglalva: *optimális mérési eljárás*nak nevezzük azt a mérési folyamatot, amelynek segítségével meghatározhatjuk az $\mathfrak{M}_\alpha$ modellosztálynak, a C hasonlósági kritérium minimumát biztosító $M(\underline{\alpha}^*)$ elemét a mérendő objektum megfigyelése útján. Az $\underline{\alpha}^*$ paraméterek az $\underline{a}$ paraméterek optimális becslései lesznek.

3.2.2. Explicit mérési eljárások

Vizsgáljuk meg a 3.2 ábrán látható mérési struktúrát.



3.2. ábra. Az explicit mérési struktúra

Az ábrának megfelelően legyen adott az $M(\underline{a})$ optimális modell, ami általában maga a megfigyelendő fizikai rendszer. Gerjesszük ezt a modellt egy u bemenettel, ami aktív kísérlettervezés esetén egy meghatározott vizsgáló jel, passzív kísérlet esetében a rendszer működését befolyásoló ismert zavarás. Az optimális modell kimenetén az „elméleti”, zajmenetes y kimenet jelenik meg, de a korábban tárgyaltaknak megfelelően erre a jelátviteli csatornában egy n zajkomponens szuperponálódik, így csak a z zajjal terhelt megfigyelést tudjuk meghatározni. A mérési eredményeket egy explicit kifejezés segítségével értékeljük ki a bemenet értékeinek figyelembe vételével. A kiértékeléshez a C hasonlósági kritériumot a z zajos megfigyelések, u bemenetek és az α meghatározandó paraméterek függvényében írjuk fel.

Egy explicit mérési eljárás menete a következő. Első lépésként elvégezzük a mérés tervezése során meghatározott számú megfigyelést, majd ezeket egy lépésben kiértékelve megkapjuk a keresett mérési eredményt. A minimális hiba elérésének szükséges feltétele, hogy a

$$\frac{\partial C(z,u,\alpha)}{\partial \alpha_j} = 0, \; j = 1...m \tag{3.1}$$

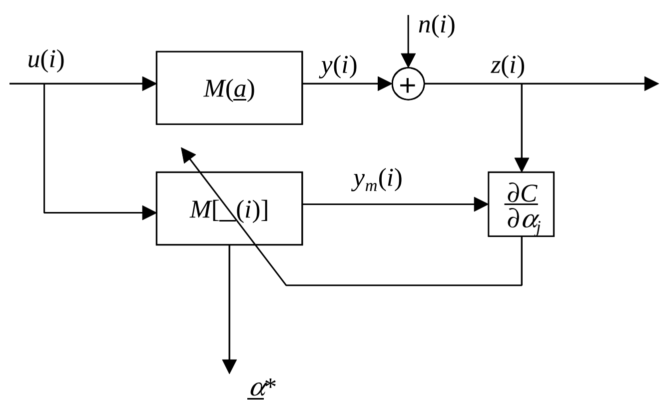
teljesüljön a modell minden α_j paraméterére. Ha ez megadható, akkor a mérési eredményt egy explicit mérési formula adja meg.

Informatikai szempontból elemezve az explicit eljárást a következőket állapíthatjuk meg. Miután a mérés befejezése után kell az összegyűjtött mérési adatokat egy lépésben kiértékelni, ezért az adatfeldolgozás során esetenként akár igen nagy mennyiségű adatot kell kezelni, viszont a kiértékelés során az idő nem jelent közvetlen megszorítást.

Az explicit mérési eljárásra a legegyszerűbb példa egy olyan mérés, ahol a mérés során fellépő hibák miatt több párhuzamos mérést kell elvégezni a mérőrendszer ugyanolyan beállításánál. Ekkor elvégezzük a párhuzamos méréseket, majd átlagolás segítségével meghatározzuk a keresett paraméter becsült értékét. Megjegyezzük, hogy ez a módszer csak bizonyos típusú mérési hibák esetén jelent megoldást, ezzel a 5. fejezetben foglalkozunk részletesen.

3.2.3. Implicit mérési eljárás

Az implicit vagy más néven rekurzív, iteratív mérési eljárás felépítése a 3.3 ábrán látható. Az explicit struktúrához hasonlóan adott az $M(\underline{a})$ optimális modell, ami itt is általában a fizikai rendszer. Ennek természetesen csak a $z = y + n$ zajjal terhelt kimeneteit tudjuk megfigyelni (y a zajmenetes kimenet, n a szuperponálódó zajkomponens). Az optimális modellel párhuzamosan beépítjük a mérési struktúrába az $M(\underline{\alpha})$ modellt, melynek az y_m kimenetét hasonlítjuk össze a z kimenettel. Az implicit mérőrendszerben tehát a tényleges kimenet (z) és a modell alapján becsült kimenet (y_m) értékét minden egyes ciklusban összehasonlítjuk, és az eltérésnek megfelelően módosítjuk az $M(\underline{\alpha})$ modell paramétereit. A módszer iteratív jellegére, vagyis a mérési ciklusokra utal az i indexváltozó.



3.3. ábra. Az implicit mérési struktúra

Fontos megjegyezni, hogy miután általában nem ismerjük pontosan az n zajt, ezért az y_m modellkimenet az y zajmentes kimenet és az n zaj összegeként előálló z zajjal terhelt kimenet alakulását követi, így az $M(\underline{\alpha})$ modell is a fizikai rendszer és a rárakódó zaj együttes modellje lesz.

A hasonlósági kritérium ebben az esetben is a zajos megfigyelést, a bemenetet és a becsült paramétereket tartalmazza. A minimális hiba szükséges feltétele, hogy a kritérium minden α_j becsült állapotvektor komponensre nézve konvergáljon nullához:

$$\frac{\partial C(z,u,\alpha)}{\partial \alpha_j} \to 0, \; i = 1 \ldots m. \tag{3.2}$$

Ennek során minden új megfigyeléshez származtatunk egy új mérési eredményt úgy, hogy a korábbi eredményt az új megfigyelés valamilyen függvényével korrigáljuk.

A mérés menete: a fizikai rendszert és az összehasonlításra alkalmazott modellt ugyanazzal a bemenettel gerjesztjük, majd a kapott kimeneteket összehasonlítjuk. Ha az eltérés egy meghatározott korlátnál nagyobb, akkor a modell paramétereit módosítjuk, ha kisebb, akkor a modell alapján meghatározzuk a keresett $\underline{a}$ paramétervektor $\underline{\alpha}^*$ optimális becslését.

Informatikai szempontból elemezve a folyamatot megállapíthatjuk, hogy az implicit mérési struktúra esetében általában nagy műveleti sebességre van szükségünk ahhoz, hogy a folyamatosan érkező eredményeket feldolgozzuk, majd a modell paramétereit módosítsuk. A számításokat azonban viszonylag kevés adaton kell elvégezni, hiszen csak az eggyel korábbi eltéréshez képesti változást és ennek alapján a modellparaméterek szükséges módosítását kell meghatározni.

A legegyszerűbb példa az implicit eljárásnak a bemutatására a kétkarú mérleggel történő tömegmérés. Az $M(a)$ a mérendő tárgy, az a meghatározandó paraméter ennek az ismeretlen tömege. Az n mérési zaj származhat a mérleg mechanikájából, de érzékeny mérleg esetében lehet ez légáram vagy rezgés is. Az $M(\underline{\alpha})$ modell a méréshez használt súlyok. Az iterációt itt a súlyok felrakása vagy levétele jelenti. Amíg a két oldalt megfelelő mértékben egyensúlyba nem hoztuk, addig végezzük a súlyok felrakását/levételét.

3.2.4. Mérési eljárások csoportosítása az etalon jelenléte alapján

A mérési eljárásokat összehasonlíthatjuk annak alapján is, hogy a művelet elvégzése során szerepel-e közvetlenül az etalon. Az *etalon* olyan hitelesített, azaz szabvány szerint pontosan ellenőrzött mennyiség, mérőeszköz vagy anyagminta, amelynek segítségével más mennyiség nagyságát vagy mérőeszköz értékmutatásának helyességét lehet ellenőrizni. Az etalon fogalmával a mérési hibákhoz kapcsolódó 5. fejezetben foglalkozunk részletesen.

Az etalon jelenléte alapján a mérési eljárásokat három csoportba lehet sorolni:

- közvetlen összehasonlítás,
- közvetett összehasonlítás,
- differencia módszer.

A *közvetlen összehasonlítás* esetében a mérést fizikailag azonos természetű etalonnal való összehasonlítás alapján végezzük el. Az ilyen mérési eljárások előnye az etalon jelenléte miatti pontosság, de ebben az esetben is szükség van a mérőeszköz ellenőrzésére. Hátrányuk, hogy sok esetben ezek az eljárások iteratív összehasonlításon alapulnak, így hosszadalmasak és nem minden esetben áll rendelkezésre megfelelő etalon. Példaként olyan eljárásokat említhetünk, ahol az etalont könnyű meghatározni, mint a kétkarú mérleggel történő tömegmérés, vagy a Wheatstone-hidas ellenállásmérés esetében. Azoknál a méréseknél, ahol nehéz könnyen változtatható értékű etalont megadni, mint például a hőmérséklet- vagy nyomásmérésnél, ritkán alkalmaznak közvetlen összehasonlítást.

A *közvetett összehasonlítás* esetében nincs jelen etalon, a mérést a vizsgált jellemző okozta fizikai, kémia hatások alapján végezzük el. Az ilyen mérések általában gyorsak, és széleskörűen használhatók. Hátrányukként szokás említeni, hogy az etalon hiánya miatt a pontosságuk kisebb, de a modern méréstechnikai eszközöknél ez a probléma már nem jelentős. A közvetett mérési eljárásoknál is szükség van azonban az etalonra a mérőeszköz hitelesítésénél. A közvetlen módszernél említett példák közvetett összehasonlításon alapuló változatai a rugós erőmérővel történő tömegmérés, vagy feszültség és áramerősség adatokból történő ellenállás-meghatározás. Közvetett módszerekkel igen könynyen lehet hőmérsékletet vagy nyomást mérni, például a hőmérsékletváltozás okozta sűrűség vagy ellenállásváltozás alapján vagy nyomásváltozás miatti elmozdulás vagy alakváltozás következtében.

A *differencia módszer* a közvetett és közvetlen eljárások előnyeit ötvözi. Ennél a mérési módszernél is jelen van az etalon, így biztosított a pontosság, viszont a kiegyenlítést nem végezzük el teljesen, hogy gyorsabb legyen a mérés. Szemléltetésül vizsgáljuk meg a kétkarú mérleggel történő tömegmérést. A differencia módszernél nem állítjuk be a tökéletes egyensúlyi helyzetet, hanem egy segédskáláról olvassuk le az attól való eltérést, és ezzel az értékkel módosítjuk az etalonok által meghatározott eredményt. A mért érték pontosságának feltétele, hogy az etalon által meghatározott érték lényegesen nagyobb legyen a segédskáláról leolvasott értéknél.

4. fejezet

Metrológia

A mérés és modellezés kapcsolatáról szóló 1. fejezetben bemutattuk a mérés általánosításának lehetőségét. Az ott bemutatott levezetés eredményeként a mérés műveletét két lépésre bontottuk:

- a mérendő jellemző és a mérési eredmény megadására szolgáló szimbólum halmaz közötti leképezésre,
- és a skálainformáció, vagyis a mérési eredmény értelmezését lehetővé tevő információk megadására.

Az első lépés, vagyis a mérendő jellemző és a szimbólum halmaz közötti leképezés elvégzése minden mérés és megfigyelés során végrehajtandó feladat. A leképezést részletesen a mérés jel- és rendszerelméleti szempontból történő elemzése során tekintettük át. A második lépés a metrológia tárgykörébe tartozik. A skálainformáció megalkotása egy adott mérés esetében a viszonyításai alapnak tekinthető egységnyi mennyiség meghatározását jelenti. A műszaki gyakorlatban végzett mérések esetében ezt a viszonyítási alapot az SI néven elfogadott nemzetközi mértékegységrendszerben definiált alap- és kiegészítő mennyiségek jelentik. Az SI rendszer napjainkra már egy-két speciális területtől eltekintve általánosan bevezetésre került.

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a mértékegységrendszerek kialakulását, majd részletesen bemutatjuk az SI mértékegységrendszer alapegységeit, felépítését, fogalmait.

4.1. A mértékegységrendszerek kialakulása

A mérés kialakulása minden bizonnyal az emberré válás folyamatával párhuzamosan valósult meg. A legősibb közösségeknek is szükségük volt bizonyos alapvető mennyiségek: élelem- és ivóvízszükséglet, illetve távolságok meghatározására. Nem véletlen, hogy az első mértékegységek ennek megfelelően az emberi testrészekhez kapcsolódva alakultak ki. Az ókori öntözéses kultúrák már komoly mérési feladatokat oldottak meg, amikor kialakították a földek öntözését biztosító csatornahálózatokat, meghatározták a beszolgáltatandó termény mennyiségét. Az ókori Egyiptomban már komoly csillagászati tevékenységet is végeztek, Babilonban pedig már használták az idő múlásának a megadására az óra, perc és másodperc egységeket. Az aranynak és ezüstnek, mint pénzt megelőző értékmérőnek elterjedése további mérési problémákat vetett fel. Egyrészt meg kellett oldani a nemesfémek mennyiségének igen pontos mérését, másrészt a csalás elkerülésére olyan összetett fizikai mennyiségnek, mint a sűrűségnek a meghatározását. Az ókori Rómában széles körben kiépített vízvezeték-hálózat ugyancsak komoly mérnöki feladatot jelentett.

A mértékegységek fizikai állandókból történő levezetését először Huygens németalföldi természettudós javasolta a XVII. században. A hosszúság egységéül például a másodperc ingának a hosszát javasolta. Huygens alapgondolata azonban csak jó száz évvel később, 1791-ben valósult meg, amikor a francia nemzetgyűlés a párizsi akadémia javaslatára elfogadta a métert, a kilogrammot és a másodpercet, mint a metrikus mértékegységrendszer alapját. A három alapmennyiséget a következő módon definiálták:

- 1 méter az a hosszúság, amely egyenlő a Párizson áthaladó délkör negyedének, vagyis az Egyenlítő és az Északi sark közötti távolság tízmilliomod részével.
- A tömeg esetében az egy köbcentiméter 4 °C-os desztillált víz tömegét fogadták el, de az etalont ennek ezerszeresére, az 1 kilogrammra készítették el.
- Az idő alapmennyiségének meghatározását kézenfekvő módon a csillagászat segítségével végezték el. 1 másodperc az évi középnap hosszának 1/86400-ad része.

Az egyetemes mértékegységrendszer megteremtésének javaslata Gauss nevéhez fűződik. A Föld mágneses terének vizsgálata során kimutatta, hogy ennek nagysága kifejezhető a három metrikus alapmennyiség, tehát a hosszúság, a tömeg és az idő függvényében. Ezt a megfigyelését továbbfejlesztve javasolta, hogy valamennyi akkor használt mértékegységet e három alapmennyiségre vezessenek vissza. Bár javaslata helytálló, azonban nem célszerű, így további alapmennyiségek kerültek meghatározásra.

A francia elgondolás, vagyis az egységes, metrikus alapú mértékegységrendszer nemzetközivé válásának első jelentős lépcsője az 1875-ben, Párizsban aláírt nemzetközi mértékegyezmény volt. Az egyezményt aláíró országok, így köztük hazánk is kapott a méter etalonként szolgáló platina-irídium rúdból és a tömeg etalont jelentő, ugyanebből az ötvözetből készült hengerből.

A technika és a tudomány XIX. század végétől, XX. század elejétől beindult robbanásszerű fejlődése a mértékegységrendszerek sorát hozta létre. A mechanika, a hőtan, a villamosságtan területén számos különböző rendszert definiáltak általában úgy, hogy a három korábbi alapmennyiséghez negyedikként az adott területre jellemző egységet vezettek be. A XX. század közepére általánossá vált az egyes tudományterületek összekapcsolódása, mely az egységes mértékegységrendszer kialakulásához vezetett. Hosszú előkészítés után 1960-ban, Párizsban összeült az Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet, mely elfogadta az egységes mértékegységrendszert, mely a Système International d'Unites (Mértékegységek Nemzetközi Rendszere) megnevezést kapta, jele rövidítve SI. Az értekezlet ugyancsak elfogadta az általános metrológiai definíciókat, meghatározta az alap- és kiegészítő egységeket és azok definícióit, valamint a mértékegységek többszörösét és törtrészét kifejező előtagokat.

4.2. Az SI rendszer előnyei

Az SI mértékegység-rendszer alkalmazásának legfontosabb előnyei a következők:

Koherens jelleg Az SI rendszerben a mennyiséget és annak mértékegységét meghatározó egyenletek azonos alakúak, nincs szükség különböző átszámítási tényezőkre.

Egyszerűség A számítási egyenletek egyszerűek, könnyen áttekinthetőek és ellenőrizhetőek.

Összehasonlíthatóság A hasonló jellegű mennyiségre ugyanazt a mértékegységet használjuk függetlenül az alkalmazási területtől. Ez jelentős mértékben megkönnyíti a gazdasági és tudományos eredmények elemzését, összehasonlítását.

Egyetemesség Az SI rendszer alkalmazható a technika és a tudomány minden ismert területén.

Folytonosság Az SI rendszer megtartott sok, korábban széles körben használt mértékegységet, és az alapmennyiségek esetében olyan meghatározást keresett, melyek segítségével ezek nagysága változatlan maradt.

Tömeg és erő elkülönítése A rendszer létrehozása során elvégezték a tömeg és az erő egységeinek egyértelmű szétválasztását.

Ellentmondás mentesség Az SI rendszer nem tartalmaz ellentmondó megnevezéseket és értelmezésbeli eltéréseket.

Az SI rendszer felsorolt előnyei egyértelműen elősegítik az azt bevezető országok közötti gazdasági és technikai kapcsolatokat, és megkönnyítik a tudományos és az oktatási tevékenységet.

4.3. Metrológiai alapfogalmak

A következőkben a Metrológiai Szótár alapján bemutatjuk a metrológia, vagyis a mérési eredmény értelmezését lehetővé tevő rendszer legfontosabb alapfogalmait.

Mérhető mennyiség *A mérhető mennyiség egy jelenség, tárgy vagy anyag minőségileg megkülönböztethető és mennyiségileg meghatározható tulajdonsága.*

A mennyiség lehet általános értelemben mérhető fogalom, például hosszúság, tömeg, ellenállás, vagy pedig egy adott tárgyra vonatkozó jellemző: a rúd hossza vagy tömege, illetve a tekercs ellenállása.

Mennyiségrendszer *Az egymással összefüggésben lévő, általános értelemben vett mennyiségek összessége.*

Alapmennyiség *Az alapmennyiség egy mennyiségrendszer olyan mennyiségeinek egyike, amelyeket megállapodásszerűen egymástól függetlennek tekintenek.*

Mechanikai rendszereknél ilyen alapmennyiség lehet az út/hosszúság, az idő és a tömeg.

Származtatott mennyiség *Egy mennyiségrendszer alapmennyiségeinek függvényeként definiált mennyiség.*

Az alapmennyiségek segítségével lehet származtatni pl. a sebességet, a térfogatot, a térfogatáramot, a sűrűséget, stb.

Mennyiség dimenziója *A mennyiség dimenziója egy olyan kifejezés, szimbólum, amellyel a mennyiség a mennyiségrendszer alapmennyiségeit reprezentáló tényezők hatványainak szorzataként adható meg.*

Legyen a hosszúság dimenziója L, az időé T, ekkor a sebesség dimenziója $\mathrm{L{\cdot}T^{-1}}$. A dimenzió segítségével tehát bármely származtatott mennyiség esetén megmutathatjuk annak levezethetőségét az alapmennyiségekből. Fontos kiemelni, hogy a dimenzió tehát csak az alapul választott mennyiségekből való származtathatóságot mutatja meg, és nem értelmezi fizikai szempontból az adott mennyiséget. Ennek következményeként előfordulhat, hogy különböző fizikai mennyiségeknek azonos lesz a dimenzióegyenlete. Így, ha a tömeg dimenziója M, akkor az $\mathrm{M{\cdot}L^{-3}}$ egyaránt utalhat sűrűségre és $\mathrm{g/cm^3}$-ben kifejezett koncentrációra.

Egység dimenziójú mennyiség, dimenziómentes mennyiség *Az olyan mennyiséget, amelynek dimenzió-kifejezésében az alapmennyiségek dimenzióinak hatványkitevői mind zérusok, egység dimenziójú vagy dimenziómentes mennyiségnek nevezzük.*

Néhány példa egység dimenziójú mennyiségekre: fajlagos megnyúlás, súrlódási tényező és a Reynolds szám.

Mértékegység *A mértékegység megállapodás alapján elfogadott és definiált konkrét mennyiség, amellyel az ugyanolyan fajtájú más mennyiségek az e mennyiséghez viszonyított nagyságuk kifejezése céljából összehasonlíthatók.*

A mértékegységeknek minden mértékegységrendszerben megállapodások alapján elfogadott neve és jele van.

Mértékegységrendszer *Egy adott mennyiségrendszerhez tartozó mértékegységek meghatározott szabályok szerint képzett rendszere.*

Mértékegységrendszer például az SI Nemzetközi Mértékegység-rendszer, vagy a régebben használt cgsA vagy MKSA mértékegység-rendszerek.

Alapegység *Az alapegység az adott mennyiségrendszer alapmennyiségének mértékegysége.*

Egy alapmennyiségnek csak egy alapegysége lehet.

Származtatott egység *A származtatott mértékegység az adott mennyiségrendszer egy származtatott mennyiségének a mértékegysége.*

A származtatott mértékegységek elnevezése, jele utalhat a származtatás módjára, pl. sebesség: m/s vagy sűrűség: $\mathrm{kg/dm^3}$, de lehet külön neve és jele, pl. erő: newton N, nyomás: pascal, Pa.

Koherens mértékegység *A koherens mértékegység az alapegységek hatványainak szorzataként kifejezhető olyan származtatott egység, amelyben az arányossági tényező 1.*

A koherenciát csak egy meghatározott mértékegységrendszer alapegységeihez viszonyítva lehet értelmezni, így egy mértékegység az egyik rendszerben lehet koherens, míg a másikban nem.

Koherens mértékegységrendszer *Az olyan mértékegység-rendszert, amelynek minden származtatott mértékegysége koherens, koherens mértékegységrendszernek nevezzük.*

Belátható, hogy az SI Nemzetközi Mértékegységrendszer koherens származtatott mértékegységekből álló rendszer.

Mennyiség értéke *Valamely konkrét mennyiség nagyságának kifejezése egy mérőszám és egy mértékegység szorzataként.*

A mennyiség értéke általában pozitív érték, nulla, de a fizikai értelmezéstől vagy a skála megalkotásától függően negatív érték is lehet. Egy mennyiség értéke többféle módon is kifejezhető. Az egység dimenziójú mennyiségek értékeit általában csak a mérőszámmal adjuk meg.

Mérőszám *Egy mennyiség értékének és az érték kifejezésében használt egységnek a hányadosa.*

Legyen a mért tömeg mennyisége 5 kg. Ekkor 5 a mérőszám és az 1 kg az az alapegység, amelyhez képest a mért mennyiséget kifejeztük. A csúszási súrlódási együttható értéke μ=0,5. Ekkor csak a mérőszámot adjuk meg.

Egyezményes skála, referenciaérték-skála *Azonos fajtájú konkrét mennyiségek folytonos vagy diszkrét értékeinek olyan rendezett készlete, amelyet megállapodással vonatkoztatási alapként definiálnak az adott fajtájú mennyiség értékeinek nagyság szerinti elrendezéséhez.*

Ilyen skála például a vizes oldatok kémhatását kifejező pH skála, vagy benzin kompressziótűrését kifejező oktánszám-skála.

4.4. Az SI Nemzetközi Mértékegységrendszer

A történeti áttekintésben láttuk, hogy az 1900-as évek közepére a használatban lévő, de egymástól különböző mértékegységrendszerekben kifejezett mennyiségek megnehezítették az értelmezést és az összehasonlítást. Ennek feloldására, több éves előkészítő munka után, Párizsban, 1960-ban megrendezett Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet célja egy átfogó, koherens mértékegységrendszer megalkotása volt. Az értekezlet eredményeként született meg az SI Nemzetközi Mértékegységrendszer.

4.4.1. Az SI rendszer alap- és kiegészítő egységei

A Nemzetközi Mértékegységrendszernek a következő hét alapegysége van:

Hosszúság *Mértékegysége: méter; jele: m; dimenzió jele:*L

Egy méter annak az útnak a hossza, melyet a fény vákuumban 1/299 792 458 másodperc időtartam alatt tesz meg.

Tömeg *Mértékegysége: kilogramm; jele: kg; dimenzió jele:*M

Egy kilogramm az 1889. évben, Párizsban megtartott Első Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet által a tömeg nemzetközi etalonjának elfogadott platina-irídium hengernek a tömege, melyet a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, a franciaországi Sévresben őriznek.

Idő *Mértékegysége: másodperc; jele: s; dimenzió jele:*T

Egy másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának az időtartama.

Villamos áramerősség *Mértékegysége: amper; jele: A; dimenzió jele:*I

Egy amper az olyan állandó elektromos áram erőssége, amely két egyenes, párhuzamos, végtelen hosszúságú, elhanyagolhatóan kicsiny kör keresztmetszetű és egymástól 1 méter távolságban, vákuumban lévő vezetőben áramolva, e két vezető között méterenként $2{\cdot}10^{-7}$N erőt hoz létre.

Termodinamikai hőmérséklet *Mértékegysége: kelvin; jele: K; dimenzió jele:* Θ

Egy kelvin a víz hármaspontja termodinamikai hőmérsékletének 1/273,16-szorosa.

Anyagmennyiség *Mértékegysége: mól; jele: mol; dimenzió jele:*N

Egy mól annak a rendszernek az anyagmennyisége, amely annyi elemi egységet tartalmaz, mint ahány atom van 0,012 kg szén-12-ben.

Az elemi egység fajtáját meg kell adni (pl. atom, molekula, ion, stb.).

Fényerősség *Mértékegysége: kandela; jele: cd; dimenzió jele:*J

Egy kandela az olyan fényforrás fényerőssége adott irányban, amely $540{\cdot}10^{12}$ hertz frekvenciájú monokromatikus fényt bocsát ki és a sugárerőssége ebben az irányban 1/683 W/sr.

A Nemzetközi Mértékegységrendszer kiegészítő egységei a következők.

Síkszög *Mértékegysége radián; jele: rad*

Egy radián a kör sugarával egyenlő hosszúságú körívhez tartozó középponti síkszög nagysága.

Térszög *Mértékegysége: szteradián; jele: sr*

Egy szteradián a gömbsugár négyzetével egyenlő területű gömbfelületrészhez tartozó középponti térszög.

Megjegyzés: a kiegészítő egységek egység dimenziójú mennyiségek.

4.4.2. Az SI-rendszer származtatott egységei

A Nemzetközi Mértékegységrendszer származtatott egységeit az alap- és a kiegészítő egységek segítségével képezzük a megfelelő mennyiséget megadó fizikai egyenlet alapján. A levezetésben az alap- és kiegészítő egységek hatványainak szorzata vagy hányadosa szerepel. Néhány származtatott egységnek külön elnevezése is van, ezekre szokás külön nevű egységként hivatkozni. Ilyen külön nevű származtatott egységek a teljesség igénye nélkül:

- frekvencia: hertz, Hz;
- erő: newton, N;
- nyomás: pascal, Pa;
- energia: joule, J
- teljesítmény: watt, W;
- villamos töltés: coulomb, C;
- villamos feszültség: volt, V;
- villamos ellenállás: ohm, Ω.

4.4.3. Az SI rendszeren kívüli egységek

Az 1960-as párizsi értekezlet, annak érdekében, hogy a „hétköznapi” mértékegység fogalmakat ne kelljen minden esetben teljes átírni, a korábban használatos mértékegységek alkalmazását is lehetővé tette. Ezek a mértékegységek két csoportba lettek besorolva. Az első csoportba került egységek korlátozás nélkül használható törvényes egységek. A következők tartoznak ide:

- Térfogat: liter, jele: l vagy L;
- Síkszög: fok, jele: °; ívperc, jele: ', ívmásodperc, jele: ";
- Tömeg: tonna, jele: t;
- Idő: perc, jele: min; óra, jele: h; nap, jele: d; hét, hónap, év;
- Hőmérséklet: Celsius-fok, jele: °C;

A második csoportba tartozó mértékegységeket kizárólag csak a meghatározott szakterületen szabad alkalmazni. Néhány példa ezekre:

- Hosszúság esetében a légi és tengeri közlekedésben használható a *tengeri mérföld*.
- Földterület meghatározásakor a *hektár*.
- Nyomás esetében folyadékok és gázok nyomására a *bar*.
- Elektromos látszólagos teljesítmény meghatározására a *voltamper*.
- Elektromos meddő teljesítmény esetében a *var*.

4.4.4. Az SI rendszer prefixumai

Az igen nagy, illetve igen kicsi mennyiségek egyszerűbb kifejezésére a következő prefixumokat definiálták az SI rendszerben:

deka	da	10^1	deci	d	10^{-1}
hekto	ha	10^2	centi	c	10^{-2}
kilo	k	10^3	milli	m	10^{-3}
mega	M	10^6	mikro	μ	10^{-6}
giga	G	10^9	nano	n	10^{-9}
tera	T	10^{12}	piko	p	10^{-12}
peta	P	10^{15}	femto	f	10^{-15}
exa	E	10^{18}	atto	a	10^{-18}
zeta	Z	10^{21}	zepto	z	10^{-21}
yotta	Y	10^{24}	yocto	y	10^{-24}

A felsorolt prefixumok közül a hekto a literhez és a pascalhoz, a deka a grammhoz, a deci a literhez és a méterhez, a centi pedig a literhez, méterhez, grayhez és a sieverthez kapcsolódhat. Néhány mértékegységhez nem szabad prefixumot kapcsolni, ilyen például az idő mértékegységei a másodperc kivételével, a Celsius-fok és a szög mértékegységei.

Mind a megfelelő szakirodalomban, mind a hétköznapi életben elterjedten használatosak a következő kifejezések:

- *ppm* - milliomod rész
- *pphm* - százmilliomod rész
- *ppb* - billiomod rész

Az 5ppm tömegarány például 5mg-nyi komponenst jelent kilogrammonként.

4.4.5. Bináris prefixumok

Az informatika és a digitális rendszerek körében a kettes számrendszer használata terjedt el széleskörűen. A kezdeti kisebb kapacitású gépeknél és kis sávszélességű hálózatoknál nem, vagy csak ritkábban volt szükség nagy mennyiségek kifejezésére. Az egyre nagyobb kapacitású memóriaegységek megjelenése ezen a területen is szükségessé tette a prefixumok bevezetését a könnyebb kifejezés érdekében. Mint láttuk, a hagyományos, tízes alapú mértékegység kifejezéseknél a 10 különböző hatványaihoz rendeljük hozzá a ezeket az egyszerűsítő előtagokat. Az informatika területén alkalmazott bináris rendszerek esetében a 2 hatványait célszerű figyelembe venni. A decimális rendszerben a kilo előtag 1000-szeres szorzónak felel meg, a 2^{10} pedig 1024-gyel egyenlő, így könnyen elterjedt az egyszerűsítő kifejezésként a k vagy K rövidítés használata. Ez azonban természetesen pontatlan, hiszen 1 kbyte az 1024 byte, vagy 32 kB pedig 32768 byte. Az ellentmondások megszüntetésére az IEC (International Electrotechnical Comission) 1998-ban fogadta el a bináris prefixumok bevezetésére vonatkozó ajánlást, a következők szerint:

decimális			bináris		
név	*jel*	*érték*	*név*	*jel*	*érték*
kilo	k	10^3	kibi	Ki	2^{10}=1024
mega	M	10^6	mebi	Mi	2^{20}
giga	G	10^9	gibi	Gi	2^{30}
tera	T	10^{12}	tebi	Ti	2^{40}
peta	P	10^{15}	pebi	Pi	2^{50}
exa	E	10^{18}	exbi	Ei	2^{60}
zeta	Z	10^{21}	zebi	Zi	2^{70}
yotta	Y	10^{24}	yobi	Yi	2^{80}

A javaslatot az SI rendszert felügyelő Nemzetközi Mérésügyi Iroda is befogadta. Magyarországon a Magyar Szabványügyi Testület 2007-ben honosította, és MSZ EN 60027-2 néven kihirdette.

5. fejezet

Mérési hibák

A 3.1 fejezetben áttekintettük a mérés ún. jel- és rendszerelméleti modelljét. A modell felállításánál bevezettük a jelátviteli csatorna fogalmát, melynek kettős célja volt. Egyrészt ezzel modelleztük azt, hogy a mérőeszközök közvetve csatlakoznak a megfigyelendő objektumhoz, másrészt - részben e közvetett kapcsolat miatt, - a mérés során zajok, zavarások adódnak hozzá a megfigyelt jelhez. A jel- és rendszerelméleti modell szerint ezek a hibák a jelátviteli csatornában adódnak hozzá a hasznos jelhez.

Általánosságban megállapíthatjuk, hogy minden mérés hibával terhelt, de természetesen nem mindegy a hiba jellege, nagysága és egyéb jellemzői. A mérés hiba fogalmát a 1.3 fejezetben már használtuk mind hagyományos, mind általánosított értelemben. A hagyományos megfogalmazás szerint a mérési hiba a mérendő jel elméleti és az általunk meghatározott mért értéke közti különbség. A mérési hibát tehát egyszerű különbségképzés segítségével meghatározhatjuk a pontos érték és a mérési eredmény ismeretében. Az általánosított hiba fogalma szintén a pontos érték és a mérési eredmény közti eltérésen alapul, csak ezt az alkalmazott szimbólum halmazon értelmezett metrika segítségével kell meghatározni. Bár a korábban ismertetett példáknak megfelelően a műszaki gyakorlatban is előfordulnak olyan feladatok, amikor a mérési hiba nem határozható meg egy egyszerű kivonással, de az elemi fizikai, kémiai mérések többségének esetében igen, ezért ebben a fejezetben a hagyományos mérési hibához kapcsolódó fogalmakat tekintjük át. Miután a mérési eredmények általában csak kiinduló pontjai további számításoknak, ezért megvizsgáljuk azt is, hogy ezeknél az elemi méréseknél elkövetett hibák hogyan befolyásolják a számított értékek pontosságát.

5.1. Mérési hibák forrásai

Bár a mérési hibák erősen kötődnek a mérési folyamathoz, a következőkben felsorolunk néhány olyan tényezőt, melyek általában okozói lehetnek az előfordulásuknak. A mérési hibák legfontosabb okai a következők:

- megfigyelés, mérés körülményei,
- mérőeszköz tulajdonságai,
- külső zajok, zavarások.

A *megfigyelés körülményei* sokféle módon befolyásolhatják a mérést. A mérést nagyon sokszor egy nagy darabszámban vagy mennyiségben gyártott termékből vett mintán végezzük el. Nagyon fontos, hogy a mintavétel során betartsuk a mintavétel szabályait, hiszen rosszul vett mintán hiába végezzük el jól a mérést, az eredmény mégis félrevezető lesz. A mintavétel nemcsak ilyenkor játszik szerepet, hanem olyankor is, amikor például egy hosszabb ideig működő rendszert akarunk megfigyelni, és ehhez kiválasztjuk a mérés időtartamát vagy időpontjait. A modellezésről szóló 1. fejezetben részletesen megvizsgáltuk, hogy a modell elkészítése hogyan segíti ezt a folyamatot. További befolyásoló tényező a mérés körülményei szempontjából a vett minta esetleges előkészítése, illetve az ennek során használt segédanyagok. Ugyancsak a mérés körülményeihez tartozik a mintavételt, a minta előkészítését és a mérést elvégző személy hozzáértése, gondossága is.

A *mérőeszköz* általános metrológiai tulajdonságai, mint a pontossága, érzékenysége és stabilitása, szintén hibaforrások lehetnek. Nagyon fontos a mérőeszköz karbantartása, megfelelő állapotban tartása és az értékmutatásának előírt időközönként történő ellenőrzése, vagyis kalibrálása, hitelesítése. Tágabb értelemben idetartoznak a mérőeszköz kiegészítő szerelvényei, a vezetékek, csatlakozók, stb., továbbá a kiértékeléshez használt matematikai modell helyessége, pontossága. A mért jel lehet mechanikai (elmozdulás), villamos (áramerősség) vagy nyomás (pneumatikus) jellegű, amit a megjelenítéshez vagy a további feldolgozáshoz (szabályozáshoz) át kell alakítani. Az átalakítás során különböző konverziós hibák léphetnek fel. Ugyancsak előfordulhatnak hibák az adatok bevitele vagy tárolása során is.

Külső zajok, zavarások is számos hibát okozhatnak. A környezeti tényezők, mint a környezet hőmérséklete, közvetlen napsugárzás, légmozgás, páratartalom és ezek ingadozásai jelentős eltérést okozhatnak. További problémát jelenthetnek a mechanikai hatások (rezgés), a kémiai környezet (korrozív közegek), vagy sugárzás jelenléte. Ugyancsak idetartoznak a jelvezetéket érő hatások is, amelyek például olyankor lépnek fel, ha a gyengeáramú jelvezeték egy erősáramú berendezéshez vagy annak kábeléhez kerül a megengedettnél közelebb.

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a mérési folyamat bármely szakaszában léphetnek fel hibák, melyek ellen azonban lehet védekezni. Ehhez azonban meg kell tudnunk határozni a hiba forrását, és hatását.

5.2. Irányított mérőrendszer

Mielőtt rátérnénk a mérési hibák jellemzésére, vizsgáljuk meg az irányított mérőrendszer fogalmát.

Irányított mérőrendszerről a következő feltételek teljesülésekor beszélhetünk:

1. A méréseket mindig *előre meghatározott körülmények* között kell elvégezni. A modellezéssel foglalkozó 1. fejezetben részletesen tárgyaltuk, hogy a modellalkotás hogyan segíti a megfigyelés tervezését. Az ott leírtaknak megfelelően a modellezési folyamat segít kiválasztani a mérendő jellemzőt, és ennek alapján tudjuk megtervezni a megfigyelés időpontját, időtartamát, illetve ha aktív tervezést alkalmazunk, akkor a bemeneten használt tesztjelet. Amíg a kapott eredmények nem indokolják, addig ezeket az előre meghatározott körülményeket tartani kell.

2. *Zavarások kezelése*. A mérési folyamatot érő zavarások hatásának csökkentése érdekében a következőket tehetjük.

    - A legjobb, ha a zavarást megszüntetjük, kiküszöböljük, hiszen így a megfigyelt jelre kifejtett hatása is megszűnik.
    - Nem minden típusú zavarást lehet megszüntetni, ilyen lehet pl. a hőmérséklet vagy a nyomás hatása. Amennyiben ezek az adott mérési folyamatnál zavarást jelentenek, akkor ezeket lehetőség szerint állandó értéken kell tartani. Ha megoldható, akkor ez az állandó érték legyen valamilyen standard érték, pl. „szobahőmérséklet", mert erre vonatkoztatva általában ismert az adott zavarás hatása. Eltérő értéknél figyelembe kell venni a megfelelő korrekciót.
    - Számos esetben, adott technológiai körülmények között azonban egyik előző megoldás sem alkalmazható. Ilyenkor magát a zavarást is mérni kell, és a kiértékelés során kell a hatását figyelembe venni.

3. Mindig végezzünk *párhuzamos méréseket*. Párhuzamos mérés esetén pontosan ugyanolyan körülmények között ismételjük meg a mérést, általában háromszor. Párhuzamos mérések elvégzése egyrészt segít bizonyos típusú mérési hibák feltárásában, másrészt ugyancsak alkalmas a mérési hibák egy csoportja hatásának csökkentésére.

4. A kapott mérési eredményeket a *matematikai statisztika* módszereivel kell feldolgozni. A módszerek kiválasztásánál figyelembe kell vennünk a modellezés, illetve a mérés körülményeit, mert a rosszul választott módszerrel egyrészt helytelen eredményt kapunk, másrészt rossz következtetésekre juthatunk.

5. *A mérés körülményeinek rögzítése.* Explicit mérésnél (ld. 3.2. fejezet) a kiértékelés csak a teljes megfigyelési folyamat befejeződése után történik, így ha az utólagos adatfeldolgozás során az adatokban valami eltérést tapasztalunk, akkor a körülmények pontos ismerete nélkül nehéz lehet megtalálni az okot. A gond általában az, hogy nem mindig egyszerű eldönteni, hogy mi az ami lényeges, és mi az ami nem. Az adott mérési folyamathoz kapcsolódó tapasztalat igen előnyös lehet.

Ha a felsorolt feltételeket teljesíteni tudjuk, akkor a mérési eredményeink azonos - általában normális - eloszlásúak lesznek, melyeknek a várható értéke jó közelítéssel megegyezik a keresett értékkel, tehát a mérés torzítatlan lesz, és a mérési eredmények egymáshoz közel helyezkednek el, vagyis a szórásuk kicsi lesz. Ha a feltételek teljesítése nehézségekbe ütközik, akkor a mérési eredmények szórása megnő, és előfordulhat, hogy a kiértékelés során kapott eredmény torzított lesz, azaz a ténylegestől jelentősen eltérő értéket kapunk.

5.3. Hibafüggvények

A mérési hibákat csoportosíthatjuk a leírásuk alapján, mely szerint a következő két hibafüggvényt különböztetjük meg:

- az abszolút hibafüggvényt,

- a relatív hibafüggvényt.

Az *abszolút hibafüggvény*t, H_i, a mérési eredmény és a pontos érték különbségeként kapjuk meg:

$$H_i = x_{m_i} - x_0 \ , \tag{5.1}$$

ahol x_{m_i} a mérési eredmény, x_0 a pontos érték, i a mérés sorszáma. Az abszolút hiba mértékegysége megegyezik a mért mennyiség mértékegységével.

A *relatív hibafüggvény*, h_i, esetében az abszolút hiba és a pontos érték százalékos arányát határozzuk meg:

$$h_i = \frac{H_i}{x_0} \cdot 100[\%] \ . \tag{5.2}$$

A relatív hiba dimenziómentes érték.

Jól látható, hogy mindkét hibafüggvény meghatározásakor szükség van a keresett jellemző pontos értékére. Ez általában ismeretlen egy adott mérési eljárásnál. Ismert viszont a műszer kalibrálásakor, vagyis amikor pontosan ismert értéket mérünk a műszer értékmutatásának ellenőrzésére, így a mérési tartomány különböző pontjaiban meghatározhatjuk az abszolút és relatív hiba mértékét. A műszerek gyári ismertetőjében, az ún. gépkönyvben is találhatunk erre vonatkozó adatot. Például egy digitális kijelzőjű eszköz gépkönyvbeli pontossági adatai legyenek a következők:

$$\pm 0.2\% \pm 1 digit \ .$$

Az első adat a teljes mérési tartományra vonatkoztatott relatív hibát, míg a második adat az utolsó kijelzett számjegy bizonytalanságát, vagyis az abszolút hiba mértékét adja meg.

Ennek alapján egy konkrét mérés relatív hibáját a következő formában adhatjuk meg:

$$h_i = h_0 + \frac{H_{max}}{x_0} \cdot 100 \ . \tag{5.3}$$

Azaz az adott mérés hibáját a teljes tartományra vonatkozó relatív hiba (h_0) és a megadott abszolút hiba és a pontos érték arányának összegeként kapjuk meg. Abban az esetben, ha nem ismerjük a helyes értéket, akkor a mérés relatív hibáját a mért értékre vonatkoztatva adhatjuk meg. Ha a mérés abszolút hibája nem túl jelentős, akkor a két érték között nincs nagy eltérés.

Példa

Egy digitális kijelzőjű hőmérő mérési tartománya 0–600 °C, pontossága $\pm 0,1\% \pm 2$ digit. A mérendő hőmérséklet pontos értéke 350 °C. Határozzuk meg a mérés relatív hibáját!

A megoldás:

A mérési tartomány megadásából látható, hogy az abszolút hiba, mely az utolsó kijelzett számjegyre vonatkozik, itt az egész fokokra értendő. Így a relatív hiba:

$$h_{350} = 0,1\% + \frac{2°C}{350°C} \cdot 100\% = 0,671\% \ .$$

Ha a tartományt a 0,0 - 600,0 °C formátumban adjuk meg, akkor a relatív hiba:

$$h_{350} = 0,1\% + \frac{0,2°C}{350°C} \cdot 100\% = 0,157\% \ .$$

Amennyiben nem ismerjük a pontos értéket, és a mérés leolvasott értéke a 350 °C, akkor az abszolút hiba értékét figyelembe véve a következő hibahatárokat kapjuk:

$$h_{350} = 0,1\% + \frac{2°C}{348°C} \cdot 100\% = 0,675\% \,,$$

$$h_{350} = 0,1\% + \frac{2°C}{352°C} \cdot 100\% = 0,668\% \,.$$

5.4. Hibatípusok

A hibák típus szerinti osztályozása a következő besorolás szerint végezhető el:

Dinamikus hiba esetén a mérési eredmény leolvasását a műszer „beállása” előtt végezzük el. A dinamikus hiba abból adódik, hogy a műszer, a konstrukciójából adódó tehetetlenség miatt, még nem a mért jelnek megfelelő értéket mutatja.

Statikus hiba esetén a mért érték és a helyes érték közötti különbség külső zavarásokból, a műszer rossz beállításából, vagy egyéb okokból származik.

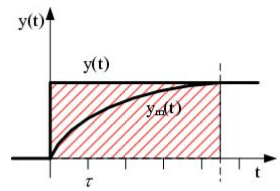
Véletlenszerű hibákról akkor beszélünk, ha a mért értékek eltérésének nagysága és iránya a pontos értéktől véletlenszerű. A véletlenszerű hibák fajtái az eltérés nagysága alapján: *véletlen hibák*, *kiugró hibák* és *nagyságrendi eltérések*.

A rendszeres hibák esetében a mért érték és a pontos érték közötti eltérés állandó, tehát ugyannál a mérésnél az eltérés mindig ugyanolyan nagyságú és irányú. A rendszeres hibák esetében megkülönböztetünk *állandó rendszeres* hibát, ami a műszer teljes mérési tartományában ugyanolyan mértékben torzítja a mért értéket, és arányos rendszeres hibát, aminek a hatása függ a mért értéknek a műszer mérési tartománybeli helyétől.

5.4.1. Dinamikus hiba

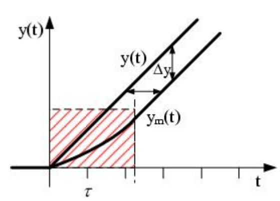
Mérés során dinamikus hibát akkor követünk el, ha nem várjuk meg, hogy a mérőeszköz kimenete kellő mértékben beálljon a mért jellemző értékének megfelelően. Ugrásszerű jelváltozást feltételezve beállási időnek nevezzük azt az időtartamot, aminek eltelte után a mért jellemző értéke és a műszer által mutatott érték közötti eltérés kevesebb, mint 1%. A műszer leírásai, technikai ismertetői más adatok mellett tartalmazzák a műszer időállandóját is. Ennek ismeretében, a beállási időt annak kb. négy-ötszörösére becsülhetjük. Ez az érték azonban csak a meghatározásakor alkalmazott körülmények között lesz igaz. A beállási időt jelentősen befolyásolja a mérendő közeg anyagi minősége, halmazállapota is, így például gázok esetében ez az érték többszöröse lehet a folyadékoknál kapott értéknek. A műszereket általában a mechanikai és kémiai védelem érdekében tokozzuk, aminek szintén jelentős hatása van az időállandóra. Ugyancsak növelheti az időállandót a nyomtatás, ha az eredményeket például regisztrálón jelentetjük meg. Az így kialakított teljes rendszer időállandója lényegesen nagyobb lesz, mint magának a műszernek az időállandója, és meghatározását a teljes mérőrendszerre vonatkoztatva, adott közegre célszerűen kísérleti úton végezhetjük el.

Vizsgáljuk meg a beállási idő alakulását a következő két esetben. Elsőként tételezzük fel, hogy a mérendő érték ugrásszerűen változik. Ebben az esetben a mérőeszköz a jelet az 5.1 ábrán látható módon követi. Ilyen esetekben akkor tekintjük a műszer kimenetét „beálltnak", azaz akkor fogadjuk el, hogy a műszer a vizsgált jel értékét mutatja, ha a műszer kimenete és a jel közötti eltérés 1% vagy annál kisebb. Ha a leolvasás ennél korábban történik, akkor dinamikus hiba terheli a leolvasott értéket. Elsőrendű differenciálegyenlettel leírható műszer esetére jön ki a már korábban említett, kb. 4,5-szeres időállandónyi várakozási idő a dinamikus hiba elkerüléséhez. A 5.1 ábrán az időtengelyen feltüntetett osztások az időállandónak felelnek meg, a dinamikus hibát pedig a vonalkázott tartományban követünk el.



5.1. ábra. Dinamikus hiba tartománya ugrásszerű jelváltozás esetén

Egy másik lehetőségként tételezzük fel, hogy a jel állandó meredekséggel változik. Ebben az esetben természetesen a műszer a jel folyamatos változása esetén nem fogja a tényleges értéket mutatni, hanem annál mindig kevesebbet. Ismét elsőrendű műszermodellt és egységnyi meredekséggel változó jelet feltételezve belátható, hogy a műszer kimenete egy adott idő eltelte után az időállandónak megfelelő értékkel később mutatja ugyanazt az értéket, mint ami jel értéke volt. Ha ismerjük a mérőrendszer időállandóját, akkor a késést ennek függvényében korrigálni tudjuk. Ebben az esetben a dinamikus hibát akkor követünk el, ha a leolvasást az állandósult értékű késés kialakulása előtt követjük el. Ezt a tartományt az 5.2 ábrán pirossal jelzett szakasz jelenti.



5.2. ábra. Dinamikus hiba sebességugrásszerű jelváltozás esetén

A valóságos jelek változása általában tetszőleges lehet. Ha azt akarjuk, hogy minél kisebb legyen a dinamikus hiba értéke, akkor a jel dinamikájának ismeretében kiválaszthatjuk a megfelelő időállandóval rendelkező módszert. Ha az a célunk, hogy bizonyos gyors, de apró változásokat okozó zajok ne jelenjenek meg a mért értékben, akkor olyan időállandóval rendelkező műszert válasszunk, amely az időállandója miatt ezeket a zavarásokat kiszűri, de a vizsgált jel tényleges változását kimutatja.

5.4.2. Statikus hibák

Ha a mérést a dinamikus hiba lehetőségét kizárva végezzük el, és a mérési eredmény és a jel tényleges értéke különbözik, akkor statikus hibáról beszélünk. A statikus hibának nagyon sokféle oka lehet, a bevezetőben már felsoroltunk néhányat. Ugyanakkor ezeknek a hibaforrások a hatása kétféle lehet: egyes hibák nagysága és előjele véletlenszerűen változik, tehát hatásukra ugyanannak az értéknek többszöri, vagyis párhuzamos mérése esetén, egyszer többet, máskor kevesebbet kapunk a tényleges értéknél, míg más hibák esetén az tapasztaljuk, hogy a hiba mindegyik párhuzamos mérést ugyanolyan mértékben és irányban módosítja. Az első csoportba tartozó hibákat *véletlenszerű hibáknak*, míg a második csoportba tartozókat *rendszeres hibáknak* nevezzük.

Véletlenszerű hibák

A véletlenszerű hibák tetszőleges mértékben és irányban módosíthatják a mérési eredményt. Okozóik általában olyan, vagy a környezetből, vagy a mérőrendszerből, mérést végző személytől származó hatások, melyek a mérést az adott pillanatban véletlenszerűen befolyásolják, módosítják. Ezeket a hibákat általában a mérési eredmények szórásához viszonyítva lehet csoportosítani. Ehhez feltételezzük, hogy a vagy a műszerhez mellékelt leírás adataiból, vagy korábbi mérések tapasztalataiból ismert a mérés szórása, és további mérések jellemzése véletlenszerű hiba szempontjából ennek alapján történhet.

Véletlen hibák A véletlen hibák minden mérésnél, így irányított mérőrendszer esetén is előfordulnak. Az az általános megállapítás, mely szerint minden mérés hibával terhelt, a véletlen hibákra vonatkozik.

A véletlen hibákat is egyrészt a környezeti hatások, másrészt a mérőrendszer működése során fellépő zajok, zavarások okozzák, azonban mértékük nem haladja meg a mérési eredmény várható értéke körüli 3 szórásnyi intervallumot. A véletlen hibák olyan normális eloszlással írhatók le, melynek zérus a várható értéke és a teljes mérési eljárásra jellemző a szórása.

Véletlen hibák ellen, tulajdonságaikat kihasználva, párhuzamos mérésekkel lehet védekezni. A hibák irányának és nagyságának véletlen jellege miatt, többször elvégezve ugyanolyan körülmények között a mérést, a hibák egymást kompenzálják, így jó közelítéssel a helyes értéket kapjuk. Az elvégzendő párhuzamos mérések számát a mérési eljárás szórása alapján lehet meghatározni.

Kiugró hibák A kiugró hibák esetében már az irányított mérőrendszer kapcsán előírt feltételek nem teljesülnek, tehát a környezetből, vagy a mérőrendszer működéséből származó zavarások kiküszöbölése, állandó értéken tartása, illetve mérés útján való figyelembe vétele nem valósult meg. Ennek következtében az ilyen mérés eredménye a várható értéktől lényeges eltér. A szórás alapján meghatározva ennek a típusú hibának a tartományát, kiugró hibával terhelt a mérés, ha az eredmény a várható érték $\pm$ 3-6 szórásnyi tartományába esik. Amennyiben ismerjük a mérési eredmények eloszlását és annak paramétereit, akkor ennek alapján el tudjuk dönteni egy adott mérési eredményről, hogy annak eltérését véletlen vagy kiugró hiba okozza. Ha nincs a mérési eredmények szórására vonatkozó adatunk, és néhány párhuzamos mérés során kapott eredmények esetében akarjuk eldönteni, hogy van-e köztük véletlen hibával terhelt, akkor erre hihetőségi tesztek vagy kiugró eredmény ellenőrzésére szolgáló statisztikai próbák állnak rendelkezésre.

Nagyságrendi eltérés A véletlenszerű hibák harmadik csoportját alkotó nagyságrendi eltérések esetében, mint azt a megnevezésük is jelzi, igen nagy eltérést tapasztalunk a kapott és a várt eredmény között. Egyértelmű, hogy ebben az esetben az irányított mérőrendszer feltételei, a kiugró hibához hasonlóan, nem teljesülnek, de itt még nagyobb a gond. Tipikusan ilyen hibát kapunk, ha egy változtatható mérési tartományú műszer esetében az eredmény rögzítése során rosszul jegyeztük le a pillanatnyi tartományt.

A nagyságrendi hibák okainak kiderítése különösen explicit mérési struktúrák esetében jelent gondot, hiszen ekkor a mérési eredmények kiértékelése csak a mérés befejezése után történik meg, így a hiba okának meghatározására csak akkor van esélyünk, ha minden, a mérést befolyásoló körülményt rögzítettünk.

Rendszeres hibák

A statikus hibák másik nagy csoportját a rendszeres vagy módszeres hibák okozzák. A rendszeres hibák, ellentétben a véletlenszerű hibákkal, az adott mérést mindig egy irányban és azonos mértékben torzítják. Míg a véletlen hibák hatását párhuzamos méréssel kompenzálhatjuk, addig az állandó és egyirányú hatás miatt ez a megoldás a rendszeres hibák esetében nem vezet eredményre.

Méréselméleti szempontból *helyes mérés*ről beszélünk, ha a mérési eredménynek nincs rendszeres hibája, *pontos mérés* esetében pedig csak véletlen hibák befolyásolják a mérést. Ennek a megállapításnak megfelelően, egy helytelen vagy rossz mérés is lehet pontos, mivel ekkor a rendszeres hiba miatt rossz értéket kaptunk, de magának a mérési eredménynek meghatározása kis szórással történt; és egy helyes mérés is lehet pontatlan, ha nincs rendszeres hibánk, de a meghatározást nagy szórással végeztük el. Nyilvánvaló, hogy a cél helyes és pontos mérési eljárás kialakítása, hiszen ekkor lehet a legkisebb ráfordítással a legmegfelelőbb mérési eredményt elérni.

A rendszeres hibák tehát mindig ugyanabba az irányba és ugyanolyan mértékben torzítanak egy adott mérést. Az ilyen hibát létrehozó okok szintén részben a környezetben, részben a mérőrendszerben illetve a mérést végző személyben kereshetők, de a hatásuk, szemben a véletlenszerű hibákkal, folyamatos, állandó és nem pillanatszerű. Ilyen hibát okozhat például egy olyan, a környezetből származó zavarás, melynek hatása állandó, és nem vettük figyelembe az irányított mérőrendszer kialakításánál. Példa lehet erre egy a mérés során végig fennálló hőhatás vagy egy mérleg vízszintezésének elmulasztása. A mérési eljárásból származó hibaként megemlíthetünk konstrukciós okokat (pl. mérlegnek a két karja nem egyforma hosszú), kopásból, egyéb meghibásodásból származó okokat, vagy a kiértékelési eljárásban vétett hibákat (pl. egy konstans elírása).

A rendszeres hibák kimutatása általában összetett feladat. Mint láttuk, a véletlenszerű hibákat és a rendszeres hibákat különböző típusú okok hozzák létre, így azok egymástól függetlenek, de nyilvánvaló, hogy a jelentős mértékű véletlen hiba megnehezíti a rendszeres hiba kimutatását. Így a rendszeres hibák kimutatásához lehetőség szerint olyan körülményeket kell biztosítani, melyek mellett a mérési eredmények szórása a lehető legkisebb. A rendszeres hibák kimutatására szolgáló eljárásokat kalibrálásnak vagy hitelesítésnek nevezzük. Ez a két megnevezés nem teljesen ugyanazt a folyamatot jelenti, a 5.5 szakaszban részletesen bemutatjuk a köztük lévő különbségeket. Alapvetően azonban mind a két esetben a következő módon járunk el. A vizsgálandó mérőeszközzel egy pontosan ismert értékű mennyiséget mérünk meg. Az ilyen mintát *etalon*nak nevezzük, és jellemző tulajdonsága, hogy a mérés során vizsgált értékének helyességét más, a mérési eljárástól független ellenőrzés biztosítja. A véletlen hibák hatásának kiküszöbölésére ebben az esetben is párhuzamos méréseket végzünk. Ahhoz, hogy minél pontosabb képet kapjuk az esetleges rendszeres hiba természetéről, az ellenőrző mérést a mérőeszköz mérési tartományában elosztva, annak minél több pontjában végezzük el. Ez nem minden eszköz esetében végezhető el, hiszen ehhez a megfelelő értékű etalont is biztosítani kell. Az egyes pontokban kapott párhuzamos mérési eredmények átlagait a valódi értékek függvényében ábrázoljuk. Regresszió segítségével egyenest illesztünk a kapott pontokra. Ha az így kapott egyenes az origóban metszi a tengelyeket és 45° meredekségű, akkor nincs rendszeres hiba. Ha az egyenes meredeksége 45°, de a tengelymetszet nem az origóban van, akkor *állandó rendszeres hiba* befolyásolja a mérést. Az ilyen mérések esetében, függetlenül a mérendő érték nagyságától, mindig ugyanolyan mértékben torzítja a hiba a mérést. Ha az egyenes ugyan az origóban metszi a tengelyeket, de a meredeksége 45°-tól eltér, akkor *arányos rendszeres hibá*ról beszélünk. Ekkor, a hiba mértéke függ a mérendő érték nagyságától, azaz, ha kisebb értéket mérünk, akkor kisebb lesz az értéke, nagyobb érték mérése esetén nagyobb lesz a rendszeres hiba nagysága. Előfordulhat, hogy a mérőeszköznek mind állandó, mind arányos rendszeres hibája van. Ekkor a kalibráló egyenes nem az origóban metszi a tengelyeket és nem 45° meredekségű.

A rendszeres hibák jellemzésére a 5.4 egyenlettel megadott összefüggés használható:

$$m_i = \alpha + \beta \cdot \mu^0{}_i + \varepsilon_i\ , \tag{5.4}$$

ahol m_i az i-dik mérési pontban meghatározott eredmény, α a rendszeres hiba állandó része, $\beta - 1$ a rendszeres hiba arányos része, $\mu^0{}_i$ a tényleges érték (az etalon értéke), ε_i a véletlen hiba.

Ha sem α, sem $\beta - 1$ értéke nem nulla, akkor a mérés mind állandó, mind arányos hibával terhelt.

Abban az esetben, ha nem áll rendelkezésre etalon, akkor különböző elven működő mérőeszközökkel mérjük meg ugyanazokat a mennyiségeket. Azért célszerű más konstrukciójú műszereket választani, hogy így a környezetből származó hatások nagy valószínűséggel ne tudják ugyanolyan módon befolyásolni a méréseket. Ha a két műszerrel elvégzett mérések során ugyanazt az értéket kapjuk, akkor nagy valószínűséggel azt állíthatjuk, hogy a mind két műszer rendszeres hibától mentesen mér (ennek legalábbis nagyobb a valószínűsége különböző műszerek esetén, mint annak, hogy a két műszer rendszeres hibája egyforma). Ha eltérő értéket kapunk, akkor célszerűen egy harmadik műszerrel is el kell végezni a méréseket.

5.5. Hitelesítés, kalibrálás

A Metrológiai Szótárnak megfelelően a kalibrálás azon műveletek összessége, amelyekkel meghatározott feltételek mellett megállapítható az összefüggés egy mérőeszköz, vagy mérőrendszer értékmutatása, illetve egy mértéknek vagy anyagmintának tulajdonított érték és a mérendő mennyiség etalonnal reprodukált megfelelő értéke között. A definíciónak megfelelően tehát kalibrálás segítségével

- ellenőrizhetjük, hogy az adott műszer helyesen, vagyis rendszeres hibától mentesen mér;
- meghatározhatjuk egy adott mennyiség pontos értékét;
- mindkét esetben meghatározhatjuk az esetlegesen szükséges korrekció mértékét;
- kimutathatjuk például a környezeti tényezők hatását a mérési folyamatra.

Kalibrálás során a mérést etalon segítségével végezzük el.

A kalibrálás és a hitelesítés között alapvetően az elvégzendő műveletek jogi szabályozásában van különbség. Mindazon műszerek esetében, ahol a mérés eredményeként fizetési, elszámolási kötelezettség keletkezik, hitelesítés segítségével kell a műszer értékmutatásának helyességét megállapítani. Egyéb mérési műveleteknél használt műszerek esetében kalibrálást végzünk. A hitelesítés tehát jogilag szigorúbban szabályozott és kötelezően betartandó lépéseket tartalmazó folyamat, de természetesen kalibrálás esetén sem lehet az a cél, hogy technikai értelemben ne végezzük el azt a lehető legnagyobb gondossággal. A fenti táblázatban összefoglaltuk a hitelesítés és a kalibrálás legfontosabb jellemzőit és különbségeit.

Hitelesítés	Kalibrálás
A jog eszközei által szabályozott hatósági tevékenység.	Nem hatósági tevékenység.
A mérőeszközöket csak az OMH hitelesítheti.	Mérőeszközöket bárki kalibrálhat.
Hitelesíteni a jogszabály által meghatározott mérőeszközöket kell.	Kalibrálni, szükség esetén, bármely eszközt lehet.
A hitelesítésnek jellemzően előfeltétele a mérőeszköztípusra vonatkozó hitelesítési engedély megléte.	A kalibrálásnak nincs engedélyezési előfeltétele.
A sikeres hitelesítést tanúsító jel (hitelesítési bélyeg, plomba stb.) és/vagy hitelesítési bizonyítvány tanúsítja.	A kalibrálás eredményeként kalibrálási bizonyítvány készül.
A hitelesítési bizonyítvány hatósági dokumentum és meghatározott időtartamig érvényes.	A kalibrálási bizonyítvány nem hatósági dokumentum és nincs érvénytartama.
A hitelesítést jogszabályban előírt időközönként meg kell ismételni.	A kalibrálás megújításáról a tulajdonos saját hatáskörében és saját felelősségére dönt.

5.5.1. Etalonok

A Metrológiai Szótár megfogalmazása szerint az etalon olyan mérték, mérőeszköz, anyagminta vagy mérőrendszer, melynek az a rendeltetése, hogy egy mennyiség egységét, illetve egy vagy több ismert értékét definiálja, megvalósítsa, fenntartsa vagy reprodukálja, és referenciaként szolgáljon. A definíciónak megfelelően az etalonok elsődleges célja, hogy segítségükkel elvégezhessük a műszerek kalibrálását, hitelesítését. További funkciójuk, hogy a magasabb szinten álló etalonokkal ellenőrizhessük az alacsonyabb szintű etalonok helyességét.

Etalonok esetében nagyon sokszor valamilyen hitelesített mennyiségre gondolunk. A gyakorlatban léteznek is ilyen etalonok, melyek definiálhatják az SI rendszer egy alapmennyiségét, vagy származtatott mennyiségét. Példaként említhető az 1 kg-os tömegetalon vagy 100 Ω-os normálellenállás. Léteznek olyan műszerek, amelyek segítségével igen nagy pontosságú és megbízható mérés lehet végezni. Ilyeneket elsősorban olyankor készítenek, ha az mennyiség definíciója alapján nehéz lenne etalon készíteni, mint például az áramerősség-mérés esetében az etalon ampermérő, vagy a pH-mérésnél a standard hidrogén elektród. Végül etalonként szolgálnak az olyan mérőoldatok és egyéb anyagminták, melyek segítségével elemzéseket lehet végezni.

Az etalonok osztályozása a Metrológia Szótár alapján a következő:

Nemzetközi etalon olyan etalon, melynek hitelességét nemzetközi megállapodások biztosítják.

Országos etalon nak nevezzük nemzeti határozattal elismert etalonokat.

Elsődleges etalon a legjobb metrológiai minőségűnek kijelölt vagy széles körben elismert etalon, amelynek az értéke elfogadható az ugyanannak a mennyiségnek más etalonjaira való hivatkozás nélkül. Az elsődleges etalon fogalma mind az alap-, mind a származtatott mennyiségekre alkalmazható.

Másodlagos etalon olyan etalon, melynek értékét elsődleges etalonnal való összehasonlítás révén határozzák meg.

Referenciaetalon nak nevezik az adott helyen rendelkezésre álló etalonok közül a legjobb metrológiai minőségű etalont, amelyre ott a méréseket visszavezetik.

5.6. Pontosság, pontossági osztályok

A pontosság fogalmához kapcsolódóan a Metrológiai Szótárban a következők találhatók:

A *pontosság* a mérőeszköznek az a tulajdonsága, hogy a mérendő mennyiség valódi értékéhez közeli értékmutatást vagy választ szolgáltat.

Egy adott mérendő mennyiség mért értékei a mérendő mennyiség helyes értékeitől egy előre megadott értéknél kevesebbel térnek el.

Míg az első definíció a pontosság kifejezés hétköznapi megfelelőjét adja, addig a második megfogalmazás a mérés általánosításának megfelelően az eredmények egy adott intervallumba, vagy osztályba esését vizsgálja. Ebben az értelemben pontosnak nevezzük a mérési eljárást, ha a mérés eredményei a helyes értéktől nem térnek el egy meghatározott értéknél jobban.

E megfogalmazás alapján a mérési eljárásokat és a mérőműszereket *pontossági osztályok*ba sorolhatjuk, így minősítve az értékmutatásuk helyességét és pontosságát.

A pontossági osztályok meghatározása a következő képlet szerint történik:

$$h_p \geq \frac{H_{max}}{x_k} \,, \tag{5.5}$$

ahol h_p pontossági osztály értéke, az x_k konvencionális érték, H_{max} a műszer abszolút hibája. Tehát a pontossági osztályba sorolásnak megfelelően a műszer, vagy a mérési eljárás abszolút hibájának (H_{max}) a konvencionális értékre (x_k) vonatkoztatott aránya nem haladhatja meg az adott pontossági osztályra (h_p) előírt értéket. A pontossági minősítésekhez felhasznált abszolút és relatív hibafüggvényeket a 5.3 fejezetben ismertetettük részletesen.

A pontossági osztályok jelölése szakterületenként különbözhet, van ahol betűvel, van ahol számmal történik a megadásuk. E jegyzetben a százalékban megadott értékkel hivatkozunk rájuk. A legfontosabb pontossági osztályok és ennek alapján a műszerek besorolása a következő:

- laboratóriumi műszerek: 0,1; 0,2;
- laboratóriumi üzemi műszer: 0,5;
- üzemi műszer: 1,0; 1,5; 2,5; 5,0.

A felsorolásnak megfelelően egy laboratóriumi műszer esetében a pontossági elvárás nagyobb, mint egy üzemi műszer esetében.

A pontossági osztályba sorolásnál figyelembe vett konvencionális érték a következő lehet:

- a műszer végkitérésben mért értéke (felső méréshatára),
- megállapodás alapján meghatározott érték.

A végkitérésbeli érték konvencionális értékként olyan műszereknél használatos, ahol a mérendő jel egy megadott tartományban változhat. A megállapodás szerinti értéket pedig számláló jellegű műszereknél alkalmazzák elsősorban.

Mint láttuk, a pontossági osztályba sorolás a mérési eljárás, vagy műszer pontosságáról ad információt. A pontossági osztály és a konvencionális érték ismeretében meghatározható, hogy maximálisan mekkora lehet a műszertől származó abszolút és relatív hiba a helyes érték ismerete nélkül is. Ezt a mérési eredményre vonatkozó abszolút és relatív hibakorlát meghatározásával fejezzük ki.

Az *abszolút hibakorlát* (H_{max}) értéke a következő összefüggés alapján határozható meg:

$$H_{max} = h_p \cdot x_v \,, \tag{5.6}$$

ahol h_p a pontossági osztály, x_v a végkitérésben mutatott érték. A 5.6 képletnek megfelelően, az abszolút hibakorlát értéke független a mért értéktől, és azt fejezi ki, hogy bármekkora mért érték esetén mekkora lehet annak maximálisan az abszolút hibája a végkitérésre vonatkoztatva.

A *relatív hibakorlát* (h_{max}) meghatározása következő:

$$h_{max} = h_p \cdot \frac{x_v}{x_m} , \tag{5.7}$$

ahol h_p a pontossági osztály, x_v a végkitérésben mutatott érték és x_m a mért érték. A relatív hibakorlát tehát a relatív hibafüggvényhez hasonlóan a lehetséges maximális abszolút hiba és a mért érték arányát adja meg. Mint az összefüggésből is látható, a relatív hiba nagysága függ a mért értéktől, minél kisebb értéket mérünk, annál nagyobb lesz a relatív hiba egy adott abszolút hibájú mérőműszer esetében.

A relatív hibakorlát alapján meghatározható a legkisebb értelmesen mérhető érték elvi határa, ami a műszer abszolút hibakorlátjának megfelelő érték. Ennél kisebb értéket meghatározva a relatív hibakorlát 100%-nál nagyobb lesz. Megjegyezzük, hogy a gyártók általában a leolvashatóságot úgy határozzák meg egy adott műszer esetében, hogy az abszolút hibakorlát közeli érték se legyen leolvasható. Azonban egy olyan, több szakaszból álló mérési eljárás esetében, ahol a műszer pontossága lényegesen jobb, mint az eljárás többi lépésének pontossága, előfordulhat ilyen jellegű hiba. Ha csak a minél kisebb értékű hibaarányt tartjuk szem előtt, akkor célszerűen a műszer mérési tartományának 60 és 100% közötti részére kell a méréseket tervezni. Ekkor azonban könnyen túlléphetjük a felső határt például egy hirtelen zavarás miatt, így érdemes tervezéskor a felső értéket 90%-nak venni, és általában a jobb kihasználás érdekében az alsó határt is lejjebb, pl. 40%-nak választjuk meg.

5.7. Hibaterjedés

A mérés során meghatározott értékekkel egyrészt jellemezhetjük a technológiai folyamat menetének alakulását, másrészt általában felhasználjuk azokat további, méréssel nem, vagy csak nehezen meghatározható mennyiségek értékének számolással történő megadására. Az *elemi mérések* során elkövetett hibák azonban a számított értékekben is megjelennek. Így például, ha egy test térfogatát a jellemző méreteinek mérésével, majd a megfelelő térfogatszámítási képletbe történő behelyettesítéssel határozzuk meg, akkor elemi mérések, például az élhossz meghatározása során elkövetett hibák a számított mennyiség, azaz itt a térfogat értékét is befolyásolják.

Egyszerűbb esetben a számított mennyiség hibakorlátját az elemi mérések hibakorlátjából származtatjuk a következő módon:

- Ha a számítási művelet összeadás vagy kivonás, akkor az elemi mérések abszolút hibakorlátjainak összegzésével határozzuk meg a számolt érték abszolút hibakorlátját, majd ennek és a számolt értéknek a hányadosaként megkapjuk a relatív hibakorlátot.

- Ha a számolt érték szorzás vagy osztás, akkor az elemi mérésék relatív hibakorlátjait összegezve meghatározzuk a számolt érték relatív hibakorlátját, majd ennek és a számolt értéknek a szorzataként az abszolút hibakorlátot.

A számított eredmények hibakorlátjainak megadása tehát a következő módon történik:

1. A műszer pontossági osztálya és konvencionális értéke alapján meghatározzuk a mérés abszolút hibakorlátját, majd a mért értékek figyelembe vételével a relatív hibakorlátot a számításhoz szükséges minden egyes elemi mérés esetében.
2. Elvégezzük a számított érték meghatározását a megfelelő képlet alapján, majd a számítás jellegének megfelelően vagy az abszolút vagy a relatív hibakorlátot határozzuk meg az elemi mérések megfelelő hibakorlátjainak összegzésével.
3. A meghatározott hibakorlát és a számított érték felhasználásával meghatározzuk a másik hibakorlátot.
4. Ha a számolási művelet több lépésből áll, akkor a további eredmények hibakorlátjainak meghatározásánál, a 2. és 3. lépésnek megfelelően, a korábban számolt értékek relatív és abszolút hibakorlátjait alkalmazzuk.

Megjegyezzük, hogy létezik a hibaterjedésnek további, összetettebb meghatározása, mely a mért változók szórását és az esetleges egymásra hatásuk következtében fellépő kovarianciát is figyelembe veszi. Ennek a törvénynek a levezetése a szakirodalomban megtalálható.

5.8. Mérési hibák eredet szerinti csoportosítása

5.8.1. Műszerhibák

A mérőeszköz értékmutatásának hibája a korábbiaknak megfelelően különböző típusú lehet. Miután általában nem ismerjük a mérendő mennyiség pontos értékét, ezért a 5.6 részben tárgyaltaknak megfelelően az abszolút és a relatív hibakorlátot adhatjuk meg. A mérőeszköz legnagyobb megengedett hibája ennek megfelelően a műszer leírásában, specifikációjában megadott határérték. Az ellenőrzőponti hiba a mérőeszköz hibája egy a műszer ellenőrzésére kiválasztott értéknél, mennyiségnél. A nullahiba az az ellenőrzőponti hiba, melyet nulla értékű mérendő mennyiség esetén kapunk. Az alaphiba a referencia feltételek mellett (előírt környezeti körülmények között) meghatározott műszerhiba. A műszer rendszeres hibájára szokás torzításként is hivatkozni. Torzításmentes műszernek nincs rendszeres hibája. A műszer ismétlőképességével a mérőeszköz véletlen hibáját jellemezzük.

5.8.2. Etalonhibák

Az etalonokat bemutató részben (5.5.1 fejezet) részletesen foglalkoztunk az etalon fogalmával, típusaival. Ahhoz, hogy egy etalon a mérési folyamatban betöltött szerepét el tudja látni, szükség van értékének rendszeres ellenőrzésére, megfelelő, előírt körülmények közötti tárolására és a használat során a kezelési szabályainak a betartására.

5.8.3. Környezeti hatások

A műszerek működését, értékmutatásuk helyességét, és az ismétlőképességüket nagymértékben befolyásolják a különböző környezeti tényezők. A legfontosabb befolyásoló környezeti hatások:

- hőmérséklet,
- páratartalom,
- légsebesség,
- rezgés,
- elektromos áram, mágneses tér,
- sugárzás.

A hőmérsékletre és a páratartalomra vonatkozó előírásokat a legtöbb műszerspecifikáció tartalmazza. A hőmérséklet tekintetében szokás megkülönböztetni

referenciaértéket, melynél a kalibrálást, hitelesítést kell elvégezni;

üzemeltetési tartományt, melyben működtetve a gyártó garantálja a megadott pontosságot;

tárolási, szállítás tartományt, melyben kikapcsolt állapotban nem károsodik a műszer.

A többi környezeti paraméterre előírt értéket csak az arra érzékeny műszernél szokás megadni.

5.8.4. Beépítési hibák

A műszerek leírásai részletes leírást adnak az eszközök beépítésével kapcsolatos előírásokról. Ezek a leírások az egyes eszközökre specifikusak, így erre itt nem térünk ki. Betartásuk viszont nagyon fontos, hiszen az ettől való eltérés általában rendszeres hibát okoz, melynek mértéke igen nagy, 10-20% is lehet.

6. fejezet

Adatok feldolgozása

A mérési adatok általában ömlesztve, vagy a mérnöki gyakorlatban gyakran idő szerint rendezve jelennek meg. Bár az időbeli sorrendnek természetesen általában nagy jelentősége van, azonban sok esetben célszerű ezeket az adatokat más szempontok szerint is csoportosítani, illetve összevonni, és további, de kevesebb számú mennyiségekkel jellemezni az átláthatóbb kezelés érdekében.

E fejezet célja, hogy bemutassa azokat az adatfeldolgozási, statisztikai alapműveleteket, melyek segítségével az adatok rendezése és elsődleges feldolgozása elvégezhető.

6.1. Elemi műveletek

A mérési adatok tehát elsődlegesen a következő formákban jelennek meg a felhasználó előtt:

- regisztrálóról vagy más adatrögzítőről származó, idő szerint részben rendezett eredmények;
- különböző mérési eredmények, melyeket a mérési hely azonosít;
- rendezetlen megfigyelések halmaza.

Az adatok rendezetlen vagy részben, idő vagy hely szerint rendezett, felsorolásszerű halmazát szokás *lajstrom*nak nevezni. A lajstromok elemeire, vagyis az egyedi adatokra x_i jelöléssel hivatkozunk, ahol az i index utal az x elem lajstrombeli helyére. Ha lényeges, akkor egy második indexszel hivatkozhatunk az adat további jellemzőjére.

6.1.1. Számlálás

A legegyszerűbb statisztikai művelet az adatok *számlálás*a vagy megszámolása. Ennek elsődleges célja az, hogy megkapjuk a rendelkezésre álló adatok számát, mely számos további művelethez lesz szükséges kiindulási adat. Az adatok számát általában n-nel jelöljük.

A számlálásnak további célja lehet, hogy például rendelkezésre áll-e az előírt számú adat, vagy az, hogy bizonyos statisztikai elemzéseknél egyező számú adatot kell a különböző adatsoroknak tartalmaznia, és ezt ellenőrizzük ezen a módon.

6.1.2. Rangsorolás

Az adatok elemzésének egyik fontos szempontja lehet a legkisebb és a legnagyobb értékek megkeresése, illetve az adatok egymáshoz képest vett nagyság szerinti viszonya. Ezt legegyszerűbben a *rangsorolás* segítségével, vagyis az adatok növekvő vagy csökkenő érték szerinti sorba rendezésével oldhatjuk meg.

A rangsorolt adatokra a lajstrombeli helyüktől való megkülönböztetés érdekében az $x_{(i)}$ jelöléssel szokás hivatkozni, hiszen általában a lajstrombeli és a rangsorolás utáni sorrend nem egyezik meg, azaz $x_i \neq x_{(i)}$. Amennyiben növekvő sorrendbe rendeztük az adatokat, akkor a legkisebb elem, vagyis a minimum lesz az $x_{min} = x_{(1)}$, a legnagyobb elem, azaz a maximum az $x_{max} = x_{(n)}$, és például az ötödik legnagyobb érték az $x_{(n-4)}$ jelű elem lesz. A rangsorolást egyben felhasználhatjuk az adatokhoz történő *rangszám* hozzárendelésére is. Az R_i rangszám az a pozitív egész szám, mely megmutatja, hogy i-dik adat hányadik a rangsorba rendezett adathalmazban:

$$R_i = k, \text{ha}\, x_i = x_{(k)}\ . \tag{6.1}$$

Belátható, hogy legkisebb, vagyis a minimális érték rangszáma 1, míg a legnagyobb értéké n.

Bizonyos adatsorok esetében előfordulhat, hogy tartalmaznak egyforma nagyságú adatokat. Ebben az esetben is célszerű, ha a rangszámok tartománya 1-től n-ig terjed, ezért a rangszámok hozzárendelésénél a következő két módon lehet eljárni:

Kapcsolt rang esetében valamennyi azonos adat ugyanazt, a sorban következő rangszámot kapja, a nagyság szerint sorban következő pedig azt a rangszámot, amelynek az értéke annyival nagyobb, mint ahányszor előtte az egyforma adatok száma volt. Így, ha nagyság szerinti rendezéskor az ötödik és hatodik elem értéke megegyezik, akkor ezek egyaránt az 5 rangszámot kapják, míg a következő elem a 7-t.

Átlag rang alkalmazásakor az azonos adatokhoz a sorban következő rangszámok átlagát rendeljük. Az előbbi példa ötödik és hatodik eleméhez ebben az esetben a 5,5 rangszám kerül hozzárendelésre.

Mindkét esetben lehetnek problémák a rangszámok értelmezésével. A kapcsolt rang esetében nem biztos, hogy lesz n rangszámú, hiszen ha az utolsó két érték megegyezik, akkor azok az $n-1$-es rangszámot kapják. Az átlag rangnál akár az 1, akár n rang kimaradhat, ha a sorba rendezett adatoknál a legkisebb vagy a legnagyobb értékű adatok megegyeznek, továbbá lehetnek tört értékű rangok. Fontos eltérést jelent a két megoldás között, hogy a rangszámok összege, melyre bizonyos statisztikai vizsgálatoknál szükség van, a kapcsolt rangok esetében kisebb lesz, mint az átlag rang alkalmazásakor.

A nagyság szerinti sorba rendezést felhasználhatjuk még az adatsorok jellemzésénél, illetve bizonyos statisztikai vizsgálatokat is végezhetünk a rangszámok alapján. Érdemes megjegyezni, hogy a sorba rendezés és a rangszámok hozzárendelése nemcsak kvantitatív, azaz számértékkel és mértékegységgel jellemzett változók esetében alkalmazható, hanem sok esetben kvalitatív, vagyis minőségi változó esetében is. Ehhez természetesen az kell, hogy a minőségi tulajdonságok között meghatározható legyen egyfajta sorrendiség, mely alapján a rendezés elvégezhető lesz.

6.1.3. Összegzés

Az összegzés vagy szummázás az adatok mennyiségi értékeinek összeadását jelenti:

$$x_{\text{össz}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \tag{6.2}$$

Az adatok összegének értéke önmagában is fontos információ lehet, de nagyon sok esetben ez is mint kiindulási adat szerepel további műveleteknél.

6.2. Középértékek

A mérési adatok számszerű értékeinek ismerete fontos információt jelent a megfigyelt változó értékének alakulásáról, de sok esetben célszerű azt - a jobb átláthatóság érdekében - vagy a teljes adathalmaz esetében, vagy bizonyos intervallumokon kisebb számú, de jellemző értékekkel helyettesíteni. A jól megválasztott helyettesítő értékkel tehát információsűrítést hajtunk végre, segítve ezzel a mérési adatok könnyebb értelmezését. Az információsűrítés egyik legfontosabb módja a középérték-számítás. A véletlen hibák tárgyalásakor (lásd a 5.4.2. szakaszt) láttuk, hogy hatásuk párhuzamos mérésekkel csökkenthető. Ennek megfelelően a középértékek meghatározásának a mérési eredmények esetében lehet olyan célja is, hogy a véletlen hibák okozta ingadozást elfedjük, és bizonyos esetekben a kiugró vagy nagyságrendi hibákkal terhelt mérések hatását semlegesítsük.

A középérték tehát egy adatsort vagy annak egy részét helyettesíti, így annak érdekében, hogy ez megfelelő legyen, a középértékkel szemben az alábbi követelményeket szokás megfogalmazni:

- Közepes helyet foglaljon el, azaz a mérési adatok minimuma és maximuma között legyen.
- Lehetőség szerint egyszerű legyen a meghatározásának matematikai módszere.
- Számszerű értékeket tartalmazó adatok esetén feleljen meg a mérési adatok megjelenési típusának.
- Legyen könnyen értelmezhető.
- Legyen minél kevésbé érzékeny a kiugró mérési adatokra, azaz legyen robusztus.

Bár a felsorolt követelmények mindegyike fontos, de a különböző középértékek nem egyformán elégítik ki azokat. A középértékek két fő csoportra oszthatók: a számított és a helyzeti középértékekre. A számított középértékek közé soroljuk a számtani, a négyzetes, a mértani és a harmonikus átlagot, míg a helyzeti középértékek közé tartozik a módusz, a medián, illetve tágabb értelemben a kvantilisek. A számított középértékekre jellemző, hogy szinte mindig közepes értéket vesznek fel, hiszen meghatározások minden adat figyelembe vételével történik, viszont a kapott érték nem feltétlenül lesz a mért adatok típusával egyező. A helyzeti középértékek esetében a tipikusság könnyen teljesül, viszont meghatározásukkor nem játszik szerepet valamennyi adat. Ez utóbbi következtében ugyanakkor a helyzeti középértékek általában kevésbé lesznek érzékenyek a kiugró értékekre, mint a számított átlagok.

A következőkben részletesen ismertetjük a felsorolt középérték-fajtákat. Megállapítható azonban, hogy egyik sem elégíti ki maradéktalanul a felsorolt követelményeket, tehát célszerű az elemzés célja, esetleges további lépései alapján a legalkalmasabbat választani. Arra is van lehetőség, hogy ugyanarra az adatsorra több különböző középértéket is meghatározzunk, viszont ilyenkor fontos a típusuk és esetleg a pontos értelmezésük megadása.

6.2.1. Számtani átlag

A számtani átlag a számított középértékek közül a leggyakrabban használt mutatószám. A számtani átlagot kiszámíthatjuk az explicit mérési struktúrának megfelelően valamennyi mérési adat beérkezése után, de elvégezhetjük a meghatározását on line módon, vagyis mérés közben folyamatosan, minden új adat beérkezése után. Módosítás segítségével az átlagban szereplő értékekhez állandó vagy változó súlyokat rendelhetünk, így tovább finomítva a kapott átlagérték értelmezhetőségét.

Egy adatsor *számtani átlag*a az a szám, mellyel az n számú adatot helyettesítve, azok értékösszege változatlan marad. Kiszámítása:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{6.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x} \,. \tag{6.4}$$

A számtani átlag jellemző matematikai tulajdonságai:

- A csak egyforma értéket tartalmazó adatsorok kivételével mindig közepes értéket vesz fel: $x_{min} < \bar{x} < x_{max}$.
- Az egyes értékek számtani átlagtól való eltérésének összege zérus: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$.
- Az egyes értékek számtani átlagtól való eltérésének négyzetösszege minimális: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \to min$.
- Ha az adatokon lineáris transzformációt hajtunk végre, akkor ugyanezt a transzformációt az átlagértéken is végrehajtva megkapjuk a transzformált adatok átlagát: $\tilde{x}_i = a + bx_i \Rightarrow \bar{\tilde{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{x}_i = a + b\bar{x}$.

A számtani átlag egy különleges esete a *súlyozott átlag*. Ennek kiszámítási módja a következő:

$$\bar{\bar{x}} = \sum_{i=1}^{n} {w_i}' x_i \,, \tag{6.5}$$

ahol w_i súlyok tetszőleges számértékek és ${w_i}' = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$.

Mérési adatok feldolgozása esetében súlyozott átlagot például akkor alkalmazhatunk, ha ugyanazt a mérési adatot több különböző módon határoztuk meg, és a kapott értékek között azok megbízhatósága alapján különbséget akarunk tenni.

A számtani átlag 6.3 képlet alapján történő meghatározása történhet valamennyi mérési adat beérkezése után, ahogy ezt az explicit mérési struktúrák kapcsán a 3.2 fejezetben említettük. Ha a mérés menete, mielőbbi kiértékelés megkívánja, akkor minden újabb beérkező adat után valamennyi adat újbóli átlagolását el kell végezni. Ezt a műveletet, vagyis az átlagszámítás mérés közbeni alkalmazását egyszerűsíti a *rekurzív* vagy *futóátlag* számítási mód, melyet a következő módon végezhetünk el:

$$\begin{aligned} \bar{x}_r(0) &= 0\,, \\ \bar{x}_r(k) &= \bar{x}_r(k-1)+\frac{1}{k}(x(k)-\bar{x}_r(k-1)) = \frac{k-1}{k}\bar{x}_r(k-1)+\frac{1}{k}x(k)\,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

ahol $\bar{x}_r(k)$ a k számú adat alapján vett átlag, és $x(k)$ a k-dik mérési adat.

A rekurzív átlagnál tehát az előző lépésben kiszámolt átlagot korrigáljuk a frissen beérkezett mérési adattal, így sokkal kevesebb memória terület felhasználásával, gyorsabban kapunk eredményt minden új megfigyelés beérkezése után.

A következő képletek szolgálnak a rekurzív átlag esetleges utólagos korrekciójára:

- új adat beszúrása:

$$\bar{x}_{korr} = \frac{1}{n+1}(n\bar{x}+x_{n+1}) = \frac{n}{n+1}\bar{x}+\frac{1}{n+1}x_{n+1}\,, \tag{6.7}$$

- i-dik adat törlése:

$$\bar{x}_{korr} = \frac{n}{n-1}\bar{x}-\frac{1}{n-1}x_i\,, \tag{6.8}$$

- i-dik adat cseréje:

$$\bar{x}_{korr} = \bar{x}-\frac{1}{n}(x_{i_{el}}-x_{i_{be}})\,. \tag{6.9}$$

A számtani átlag meghatározásakor valamennyi adat egyforma súllyal szerepel, függetlenül attól, hogy azt az összes adat egy lépésben történő feldolgozásával végezzük el (6.3), akár rekurzív módon (6.6) határoztuk meg. A súlyozott átlagszámítás esetén (6.5) az adatok különböző súllyal befolyásolják az átlagot, viszont ezek a súlyok állandóak. Ha az adatok időben lassan változnak, azaz értékükben eltolódás figyelhető meg például valamilyen külső hatás következtében, akkor az átlagolás során célszerű a frissebb mérési adatokat nagyobb súllyal figyelembe venni, így a régebbi mérési adatoknak az átlagra történő hatását csökkenteni. Erre kínál megoldást a *mozgóátlagolás*.

A mozgóátlagolás elvégzésére két lehetőség áll rendelkezésre.

1. Az első esetben az átlagolást az utolsó N számú érték alapján végezzük el, azaz az ennél korábbi értékeket figyelmen kívül hagyjuk. Magát az átlagolást elvégezhetjük a számtani átlag alapképletével a megfelelő határértékek figyelembe vételével:

$$\bar{x}_m(k) = \frac{1}{N}\sum_{i=k-N+1}^{k} x_i\,, \tag{6.10}$$

ahol N az úgy nevezett „ablak”-szélesség. A módszert szokás *ablakos átlagolás*nak nevezni, mivel mintegy ablakot tolunk végig a mérési adatokon, és mindig csak az ablakban látható mérési adatokon végezzük el az átlagolást. A szakirodalomban megtalálható az ablakos átlagolás rekurzív változatának képlete is.

2. A másik módszer a régebbi adatokhoz fokozatosan csökkenő súlyt rendel, ez a *felejtő átlagolás*, melyet a következő képlet alapján végezhetünk el:

$$\bar{x}_m(k) = \sum_{i=-\infty}^{k} x_i w(k-i) \ , \tag{6.11}$$

ahol

$$w(i) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}(\frac{\tau-1}{\tau})^i & \text{ha } i \geq 0 \\ 0 & \text{ha } i < 0 \ , \end{cases}$$

és τ az átlagolás felejtési időállandója.

Az ablakos mozgóátlagolást vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az ablakszélesség megválasztása döntően befolyásolja a kapott átlagértékek alakulását. Ha az adatok elmozdulása viszonylag jelentős, és a mérést terhelő zaj kicsi, akkor célszerű kis ablakszélességet választani. Miután a zajok zavaró hatása kicsi, ezért a keskeny ablakban viszonylag könnyű az adatok eltolódását észrevenni, vizsgálni. Ha az adatok elmozdulása viszonylag kicsi, és a zaj nagy, akkor célszerű nagyobb ablakszélességet használni annak érdekében, hogy a zaj hatását minél inkább semlegesíteni tudjuk. A másik két esetben, tehát nagy elmozdulás és nagy zaj vagy kis elmozdulás és kis zaj esetében az ablakszélességnek valamilyen közepes értéket választhatunk, hogy a zaj hatását ki tudjuk szűrni az adatok elmozdulása mellől. Hasonló megfontolások alapján választhatjuk a felejtési időállandó értékét is.

Összevetve a számtani átlagot a középértékekkel szemben általánosan megfogalmazott követelményekkel megállapíthatjuk, hogy

- közepes, tehát speciális esetektől eltekintve értéke mindig a legkisebb és legnagyobb érték között helyezkedik el;
- meghatározása általában egyszerű, de általában számolás igényes;
- nem mindig tipikus, a számítás eredményeként kapott érték és a mérési adatok típusa eltérhet (pl. egész értékek alapján számított átlag lehet tört is);
- érzékeny a kiugró vagy nagyságrendi hibával terhelt, illetve a kimaradó adatokra, mivel ezek, számuk függvényében, erősen torzíthatják a számtani átlag értékét.

6.2.2. További számított átlagok

A *négyzetes átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok négyzetösszege változatlan marad. Kiszámítása:

$$\bar{x}_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \ . \tag{6.12}$$

A *mértani* vagy *geometriai átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok szorzata marad változatlan. Meghatározása:

$$\bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \,. \tag{6.13}$$

A *harmonikus átlag* az az érték, mellyel az adatsor értékeit helyettesítve, azok reciprok összege marad változatlan:

$$\bar{x}_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} 1/x_i} \,. \tag{6.14}$$

A felsorolt átlagértékek tulajdonságai megegyeznek a számtani átlag esetében az általános követelményeknek való megfeleléséről leírtakkal.

6.2.3. Momentumok

A momentumok a számított átlagértékek csoportjába tartoznak, és elsősorban származtatott mutatószámok meghatározásánál használjuk őket. A mérési adatok *r-ed rendű momentum*át az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^r}{n} \,. \tag{6.15}$$

Belátható, hogy az elsőrendű momentum a számtani átlagot, a másodrendű momentum a négyzetes átlag négyzetét adja meg.

Az adatok elhelyezkedése szempontjából, a mérési hibák besorolása miatt, fontos lehet az átlagértéktől való távolság. Erre ad mérőszámot a *centrális momentum*. Az r-ed rendű centrális momentumot a következő képlettel határozhatjuk meg:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r}{n} \,. \tag{6.16}$$

Belátható, hogy az elsőrendű centrális momentum értéke nulla, ezt a tényt használjuk ki, mikor a véletlen hibák hatását párhuzamos mérésekkel küszöböljük ki (lásd a 5.4.2 fejezetben).

6.2.4. Módusz

A *módusz* a helyzeti középértékek közé tartozik, és értéke megfelel az adatsor legtöbbször előforduló értékének. A meghatározása alapján a tipikusság követelményét leginkább ez a középérték elégíti ki. Ugyanakkor belátható, hogy bizonyos esetben előfordulhat, hogy vagy nem lehet meghatározni, vagy több módusszal is rendelkezik az adathalmaz. A módusz hiánya olyankor fordulhat elő, ha a mérőeszköz felbontása nagy, ugyanakkor a rendszerben lévő zajok miatt a mérési eredmények ingadoznak, így vagy nincs két egyforma érték, vagy nagyon sok érték számossága egyezik meg. Ennek alapján egyedi értékek esetében a móduszt olyankor érdemes meghatározni, ha van néhány olyan mérési eredmény az adathalmazban, melyeknek a gyakorisága a többi eredményhez képest nagyobb. Szélsőséges értékekre, így a kiugró vagy a rendkívüli hibákkal terhelt mérési adatokra nem érzékeny a módusz, azaz robusztusnak tekinthető. Miután a módusz a legtöbbször előforduló mérési eredmény, így a mérési tartomány bármely értéke, akár valamelyik határérték is lehet elvileg módusz. Ekkor a módusz a közepes értékre vonatkozó kritériumot nem feltétlenül teljesíti.

6.2.5. Medián

A *medián* szintén helyzeti középérték. A medián a nagyság szerint sorba rendezett értékek esetén a középső érték, tehát az az érték, melynél ugyanannyi kisebb és nagyobb érték fordul elő. Ennek megfelelően a módusz egyaránt képes a számtani átlag kiugró mérési adatokra való érzékenységét, és a módusz esetenkénti meghatározhatatlanságát, egyértelműségének hiányát, illetve nem feltétlenül közepes jellegét kompenzálni. Meghatározása páratlan számú adatot tartalmazó adathalmaz esetén tipikus: sorba rendezés után a medián értéke megegyezik a $(n+1)/2$-dik elem értékével. Páros számú adat esetén a medián a két középső elem átlaga lesz: sorba rendezés után az $n/2$-dik és a $n/2+1$-dik elem értékének számtani átlagolásával kapjuk meg. Ennek megfelelően páros számú elem esetén kaphatunk olyan értéket a mediánra, mely a mérési adatok között nem szerepel. Ugyanakkor a meghatározás módja miatt a medián biztos, hogy közepes érték lesz, és robusztus, azaz nem érzékeny az esetleges kiugró mérési hibákra.

6.2.6. Kvantilisek

A medián, az előző részben leírtaknak megfelelően, két egyenlő részre osztja a sorba rendezett mérési adatokat, tehát a mediánnál kisebb és nagyobb érték egyforma valószínűséggel fordul elő a mérési adatok között. Hasonló elven bevezethetünk további osztópontokat is, melyek a sorba rendezett mérési adatokat három, négy, illetve k egyenlő részre osztják. Ezeket az osztópontokat általánosan *kvantilis*eknek nevezzük és $q_j^{(k)}$-val jelöljük. $q_j^{(k)}$ jelenti azt a j-dik k-ad rendű kvantilist, melynél a mérési adathalmazban előforduló valamennyi érték j/k-ad része kisebb, ahol a j értéke $1,2,...,k-1$ lehet. A kvantilis értékét a mediánnál megismert módon határozhatjuk meg: vagy a megfelelő értéket kiválasztjuk, vagy két szomszédos értéket átlagolunk.

A fontosabb kvantilisek a következők:

- medián - felező, jele $Me = q_1^{(2)}$;
- tercilis - harmadoló;
- kvartilis - negyedelő, $Q_j = q_j^{(4)}, j = 1,2,3$;
- kvintilis - ötödölő;
- decilis - tizedelő, $D_j = q_j^{(10)}, j = 1,2,...,9$;
- percentilis - századoló, $P_j = q_j^{(100)}, j = 1,2,...,99$.

Mint látható, az általános meghatározásnak megfelelően az osztópontok száma mindig eggyel kevesebb, mint ahány részre osztják az adathalmazt. Ugyancsak kitűnik, hogy a különféle kvantilisek bizonyos értékei megegyezhetnek, így ha elég sok adatot tartalmaz a vizsgált adathalmaz, akkor a medián, a második kvartilis, az ötödik decilis és az ötvenedik percentilis értéke azonos.

A kvantilisek tehát az adatok méréstartománybeli elhelyezkedését jellemzik, segítségükkel megadható, hogy hány százalékuk lesz a megadott osztópontnál kisebb, illetve nagyobb. Ezt a tulajdonságukat például adatok ábrázolásánál, megjelenítésénél használhatjuk fel.

6.3. Szóródás

A különböző típusú középértékek ugyan helyettesítik az adathalmazt egy jellemző értékkel, de nem adnak információt az adatok méréstartománybeli elhelyezkedéséről, homogenitásáról. Ennek jellemzésére olyan mérőszámok használhatók, melyek a mérési adatok különbözőségét, szóródását jellemzik. Segítségükkel egyrészt jellemezhetjük a mérési adatok tartományát, az adatok különbözőségét egymástól, illetve egy meghatározott értéktől, másrészt elemzésükkel vizsgálhatjuk a szóródás okait és tendenciáit.

A szóródás jellemzésére használt legfontosabb mérőszámok:

- szóródás terjedelme,
- interkvartilis terjedelem,
- átlagos abszolút eltérés,
- szórás.

A felsorolt mérőszámokkal szemben általános elvárás, hogy teljes homogén adatsor esetén, tehát ha minden mérési adat megegyezik, az értékük nulla legyen, viszont, ha az adatokban van szóródás, akkor azt kimutassák. Fontos az is, hogy a megadott mérőszám a szóródás szempontjából értelmezhető legyen, és előny a könnyű meghatározhatóság.

6.3.1. A szóródás terjedelme és az interkvartilis terjedelem

A mérési adatok tartománybeli elhelyezkedésének legegyszerűbb jellemzésére a *szóródás terjedelme*, vagyis a legnagyobb és a legkisebb mért érték közötti különbség szolgál: $T = x_{max} - x_{min}$. A terjedelem könnyen számítható, jól értelmezhető, de érzékeny a kiugró mérési adatokra, vagyis a kiugró és nagyságrendi mérési hibákra.

Ezt az érzékenységet küszöböli ki az *interkvartilis terjedelem*. Egy mérési adathalmaz interkvartilis terjedelme az alsó és a felső, vagy másképpen az első és a harmadik kvartilis közti különbség: $TQ = Q_3 - Q_1$. Az interkvartilis terjedelem által meghatározott tartományban helyezkedik el a mérési adatok fele, illetve alatta és felette a további egy-egy negyede.

6.3.2. Átlagos abszolút eltérés

Az *átlagos abszolút eltérés* esetében a mérőszám bevezetésének célja az adatoknak egy adott középértéktől való elérésének bemutatása. A számtani átlag, illetve az elsőrendű centrális momentum esetében láttuk, hogy ha csak véletlen hibák jellemzik a mérésünket, akkor az eltérések átlaga nulla lesz. Az átlagos abszolút eltérés ezt a problémát úgy küszöböli ki, hogy az eltérések abszolút értékét összegzi és átlagolja a következő képletnek megfelelően:

$$\delta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| \,. \tag{6.17}$$

Belátható, hogy az átlagos abszolút eltérés értéke akkor lesz minimális, ha a számtani átlag helyett a mediánhoz viszonyítjuk az eltéréseket.

6.3.3. Szórás

A szórás a legáltalánosabban használt mérőszáma a szóródásnak. Származtatása a másodrendű centrális momentum alapján történik, annak négyzetgyöke lesz, tehát a szórás az átlagtól való eltérések négyzetösszege átlagának négyzetgyöke. A gyakorlatban, a meghatározás alapján megkülönböztetünk elméleti szórást, illetve korrigálatlan és korrigált tapasztalati szórást.

Elméleti szórás

Az elméleti szórást az alábbi képlet segítségével határozhatjuk meg:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{n}} \,, \tag{6.18}$$

ahol μ a meghatározandó mérési adat ideális, tényleges értéke, n a mérések száma. Az elméleti szórás meghatározásához tehát pontosan ismerni kell a meghatározandó mérési adatot, ami csak speciális esetben teljesül. Ez a helyzet például etalon mennyiség mérésekor, vagyis ha a műszert kalibráljuk, vagy ha éppen az összeállított mérőrendszer szórását akarjuk meghatározni. További feltétel az elméleti szórás meghatározásánál, hogy a mérések száma elvileg végtelen legyen, ami a gyakorlatban legalább harminc párhuzamos mérés elvégzését jelenti. Az elméleti szórás négyzetét szokás varianciának is nevezni.

Az elméleti szórás meghatározásánál a számlálóban szereplő kifejezés több származtatott mutatóban is szerepel, ezért szokás rá külön, mint eltérés négyzetösszegre hivatkozni:

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \,. \tag{6.19}$$

Nyilvánvaló, ha valamennyi adat megegyezik, akkor a szórás értéke az általános elvárásnak megfelelően nulla lesz, másrészt bebizonyítható, hogy a maximális értéke $\mu\sqrt{n-1}$.

Az elméleti szórást tehát elsősorban műszerek, vagy mérési eljárások bevizsgálása során lehet meghatározni, tehát olyankor, amikor van lehetőség pontosan ismert mennyiség nagyon sokszori meghatározására párhuzamos mérések keretében. Egy másik alkalmazási lehetőség, ha van egy pontosan ismert paraméterekkel rendelkező mérési eljárásunk, és ennek alkalmazásával vizsgálunk egy nagy elemszámmal rendelkező sokaságot, például egy tömegtermelésben előállított terméket. Ilyenkor az elméleti szórás meghatározásához nagyszámú mintán kell a vizsgálatot elvégezni.

Tapasztalati szórás

A gyakorlatban, ha nem ismerjük a tényleges értéket, akkor a mérési eljárásban az elméleti szórás helyett a tapasztalati szórással tudjuk meghatározni. A tapasztalati szórás meghatározásánál a keresett mérési adat elméleti értéke helyett a mérési adatok átlagához viszonyítjuk az eltéréseket. Ugyancsak a tapasztalati szórás képletét alkalmazzuk, ha csak kisszámú minta alapján akarjuk jellemezni a vizsgált érték szóródását. Belátható, hogy a tapasztalati szórás az elméleti szórás minták alapján végzett becslését szolgáltatja.

A tapasztalati szórás meghatározására a szakirodalomban kétféle módszer ismert. Az ún. korrigálatlan tapasztalati szórás a következő módon határozhatjuk meg:

$$s^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}} \,. \tag{6.20}$$

A korrigált tapasztalati szórást pedig az alábbi módon határozhatjuk meg:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \,. \tag{6.21}$$

Mint látható, mindkét esetben az elméleti szórással szemben az eltéréseket a mérések átlagához viszonyítjuk, de a korrigálatlan szórásnál a mérések számával, míg a korrigáltnál a mérések számának eggyel csökkentett értékével osztunk. Abban az esetben, ha a mérések száma viszonylag kevés, például három-négy, akkor az elméleti szórás alulbecslésének elkerülése érdekében érdemes a korrigált tapasztalati szórást alkalmazni. Ha a párhuzamos mérések száma nagy, és a meghatározandó érték nem ismert, akkor alkalmazhatjuk a korrigálatlan tapasztalati szórást. Megjegyezzük, hogy közgazdasági elemzéseknél általában éppen emiatt a korrigálatlan tapasztalati szórást határozzák meg.

Az elméleti szóráshoz hasonló módon, a tapasztalati szórás képletének számlálóját is szokás külön meghatározni és belátható, hogy a kifejezés átalakítható a következő módon:

$$SS = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - n\overline{x}^2 \,. \tag{6.22}$$

Az átalakítás következtében a korrigált tapasztalati szórás a következő képletekkel is meghatározható:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - n\overline{x}^2}{n-1}} \,. \tag{6.23}$$

A számtani átlaghoz hasonlóan a szórás, illetve az eltérés négyzetösszeg esetében is megvizsgálhatjuk, hogy a lineáris transzformációnak milyen hatása van az értékükre. Legyenek a lineáris transzformáció paraméterei a és b, transzformált változó pedig $\widetilde{x}_i$. Ekkor a transzformált változó:

$$\widetilde{x}_i = a + bx_i \,. \tag{6.24}$$

Az eltérés négyzetösszeg transzformációja:

$$SS_{\widetilde{x}} = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - (a + b\overline{x}))^2 = \sum_{i=1}^{n} b(x_i - \overline{x})^2 = bSS_x \,. \tag{6.25}$$

A transzformált korrigált tapasztalati szórás:

$$s_{a+bx} = |b| s_x \, . \tag{6.26}$$

A transzformációnak például akkor van különös jelentősége, ha a mérési sorozat elvégzése után derül ki, hogy a műszernek mind állandó, mind arányos rendszeres hibája van, így ennek megfelelően valamennyi mérési adatot a kalibrációnak megfelelően módosítani kell.

Ha a és b értékét a következő módon választjuk meg:

$$a = -\frac{\bar{x}}{s} \text{ és } b = \frac{1}{s} \, , \tag{6.27}$$

akkor a transzformált adatok számtani átlagára és a szórására a következő értékeket kapjuk:

$$\bar{\widetilde{x}} = 0 \text{ és } s_{\widetilde{x}} = 1 \, . \tag{6.28}$$

Az így transzformált mérési adatokat standardizáltnak nevezzük.

A szórás megadható még a további formákban is. Relatív szórásról beszélünk, ha a tapasztalati szórás értékét az átlagértékhez viszonyítva, százalékos formában adjuk meg:

$$s_{rel} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \, . \tag{6.29}$$

Vegyük észre, hogy a relatív szórás százalékban megadott, dimenziómentes viszonyszám lesz, hiszen mind a szórásnak, mind az átlagértéknek ugyanaz a mértékegysége. A relatív szórás segítségével a mérési tartomány különböző pontjaiban végzett párhuzamos mérések szórását hasonlíthatjuk össze.

Középérték szórása esetén a szórást a mérések számának négyzetgyökéhez viszonyítjuk:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \, . \tag{6.30}$$

Ezzel a mutatóval akkor jellemezhetjük a szórást, ha a különböző mérési pontokban eltérő számú mérést hajtottunk végre.

A két változat együttes alkalmazásával kapjuk a középérték relatív szórása mutatót:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\bar{x}\sqrt{n}} \cdot 100 \, . \tag{6.31}$$

6.4. Adatok megjelenítése

6.4.1. Adatbázisok, adattáblák

A mérési adatokat feldolgozáshoz, értelmezéshez érdemes különböző módon tárolni, megjeleníteni. Az alkalmazandó módszer kiválasztásánál az egyik legfontosabb szempont a mérési adatok száma. Néhány adat esetén természetesen bármilyen egyszerű módon megjeleníthetjük az adatainkat, de ha egy hoszszabb mérési periódus eredményeként esetleg több ezer adatot kell tárolni, akkor érdemes az adatokat a feldolgozás szempontjainak megfelelően csoportosítani.

Az adatok megjelenítése során alkalmazhatunk idősoros és keresztmetszeti táblázatokat, illetve ezek kombinációit. Az idősoros táblázatokban az adatokat a mérés időpontjának megfelelően soroljuk fel, tehát a felsorolás sorrendje ennek megfelelően kötött. Mérési adatok esetében általában ezt a leírási módszert alkalmazzuk.

Ha a mérési adatokat például a mérés helye szerint csoportosítjuk, akkor keresztmetszeti táblázatokat kapunk. Az ilyen táblázatokban a csoportok felsorolása (elvileg) tetszőleges, történhet akár a mérőhely sorszáma alapján, akár más szempontoknak megfelelően.

Alkalmazhatjuk a két csoportosítási mód kombinálását is, ekkor például „térben” és időben rendszerezve soroljuk fel az adatainkat.

Különösen nagy tömegű adat esetében érdemes azokat a kiértékelés jellegének megfelelően rendszerezni. Erre két statisztikai alapművelet szolgál, a csoportosítás és az összehasonlítás.

Ha különböző mérőhelyekről, műszerektől vagy mérési ciklusokból származnak az adataink, akkor érdemes azokat csoportosítani. A *csoportosítás* lényege, hogy a mérési adatokat különböző szempontok szerint osztályokba soroljuk. Fontos, hogy ezeket a szempontokat úgy válasszuk meg, hogy azok a mérés kiértékelése szempontjából lényegesek legyenek. Azt is szem előtt kell tartani, hogy a kiválasztott szempontok alapján az adatok egyértelműen besorolhatók legyenek. Mérési adatoknál is előfordulhat, hogy több szempont szerint végezzük el az adatok csoportosítását. Ezt kombinatív csoportosításnak is szokás nevezni. A szempontok száma azonban ne legyen túl sok, mert ekkor rosszabb lesz az adatok áttekinthetősége.

Az *összehasonlítás* esetében valamilyen szempont szerint összetartozó adatokat rendelünk egymás mellé, hogy azonosságuk vagy különbözőségük kimutatható legyen. Összehasonlítás történhet azonos időpontban különböző helyeken mért értékek között, de lehet azonos helyen különböző időpontokban mért értékeket is összevetni. Ebben az esetben arra kell figyelni, hogy az összehasonlítóság értelmezhető legyen, tehát például azonos jellegű mennyiségekre végezzük el, a megfigyelés körülményei azonosak legyenek, és például egy jól meghatározott módosítás hatását vizsgáljuk. Az összehasonlítás történhet

- hányadosképzéssel, mely elsősorban időbeli adatok esetében alkalmazott relatív mutatót ad;
- különbségképzéssel, mely keresztmetszeti adatoknál használt abszolút mutatót generál.

6.4.2. Adatok ábrázolása

A mérési adatokat tipikusan az idő függvényében szokás ábrázolni. Minden mérési adat külön pontként való megjelenítése csak kisszámú adat esetében jelenthet megoldást. Nagyszámú adat esetében a legegyszerűbb megoldás, ha az adatokat adott időtartamokra átlagoljuk, és az így kapott értékeket ábrázoljuk. Az átlagoláshoz használt időtartam megválasztásánál nagyjából a mintavételezéshez hasonlóan kell eljárni. Ha jól választjuk meg ezt az időtartamot, akkor az információ sűrítése mellett az adatoknak egyfajta elsődleges simítását is elvégezzük, hiszen a számtani átlag tompítja a kiugró értékek hatását.

Ha a mérési adatainkat nem az időbeliségük, hanem az értékük szerint csoportosítjuk, akkor az adatok számának függvényében kétféle módon járhatunk el. Kisszámú adat esetében egyszerűen meghatározzuk az azonos értékű adatok számát. Ezt a fajta besorolást nehezítheti, hogy a nagy felbontású műszerekről kapott értékek a zaj következtében az utolsó kijelzett értékben mutatnak különbözőséget. Az így kapott adatsort egyszerű gyakorisági sornak nevezzük.

Ha az adatok száma nagy, és az elvégzendő összehasonlítás megengedi, akkor érdemes az adatokat osztályokba összevonni, majd az osztályok elemszámát ábrázolni. Ennek eredményeként az ún. osztályközös gyakorisági sorokat, vagy más néven relatív gyakorisági hisztogramot kapunk. A relatív gyakorisági hisztogramok létrehozásának az általános szabályai a következők:

- Az osztályok számát a következő szempontok alapján választjuk meg:
  - Általában az osztályok száma 5 és 20 között legyen, az adatok számának és „egyformaságának” függvényében.
  - Az osztályok számát szokás a következő módon is meghatározni:
    $k = 1 + 3,3 \lg n$.
  - Ha túl kevés az osztályok száma, akkor összemoshatjuk a jellegzetességeket.
  - Ha túl sok osztályt választunk, akkor romlik az áttekinthetőség, és megjelenhetnek üres osztályok, amik az értelmezhetőséget nehezítik.
- Az osztályok szélességének megválasztása
  - Az osztályok szélességét a legnagyobb és a legkisebb adat közti különbség és az osztályok száma hányadosának kerekítésével határozhatjuk meg.
  - Általában célszerű egyforma szélességű osztályokat alkalmazni. Az eltérő szélességek megnehezítik az összehasonlítást.
  - Annak érdekében, hogy egy-két kiugró adat miatt ne kelljen feleslegesen sok, és sokszor üres osztályt létrehozni, lehetőség van a legalsó és a legfelső osztályok esetében ún. nyitott osztályok megadására. Ekkor a legalsó osztálynak az alsó, a legfelső osztálynak a felső határát nem adjuk meg, hanem a kiugró értékeket ezekben gyűjtjük.
  - Érdemes az osztályok szélességét kellő alapossággal megválasztani, mivel a rosszul megválasztott szélesség komoly torzítást okozhat.
- Határok rögzítése
  - Ha nem alkalmazunk nyitott osztályt, akkor a legkisebb mérési eredmény alapján meghatározzuk a legalsó osztály alsó határát.
  - A többi határt ennek, valamint az osztályszélességnek a figyelembe vételével határozzuk meg.
  - Az egyértelmű besorolás érdekében a határokat úgy kell megválasztani, hogy a határra ne eshessen adat. Ezt, az eredmények megjelenési formája alapján legkönnyebben úgy érhetjük el, hogy határok egy tizedessel nagyobb felbontásúak legyenek, mint a mérési adatok.

– Az osztályok alsó és felső határértékének átlagolásával meghatározhatjuk az osztályközép értékét.

A mérési adatoknak a megadott szabályok figyelembe vételével elvégzett csoportosítása után a kapott értékeket általában oszlopdiagram formájában szokás megadni.

Irodalomjegyzék

Az érdeklődő hallgatók az egyes fejezetekhez további kiegészítő anyagot és hasznos információkat találnak következő könyvekben:

Modellezés, jel- és rendszerelmélet

- Dr. Schnell László (főszerk.): *Jelek és rendszerek méréstechnikája*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1985
- Kailath, T. *Linear Systems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Csáki F. *Fejezet a szabályozástechnikából Állapotegyenletek.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973
- Close, C. M., Frederick, D. K. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems.* John Wiley and Sons, New York, 1995

Metrológia

- Csengeri Pintér P. *Mennyiségek, Mértékegységek, Számok, SI*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981

Mérési hibák, mérési adatok feldolgozása

- Kemény S., Deák A. *Kísérletek tervezése és értékelése*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000
- Pintér J., Rappai G. (szerk.) *Statisztika*. Pécsi Tudományegyetem, Közgazdaságtudományi Kar, Pécs, 2007